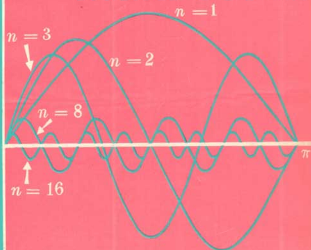
Análisis matemático

T. M. APOSTOL



EDITORIAL REVERTÉ, S.A

ANÁLISIS MATEMATICO

TOM M. APOSTOL

Departamento de Matemáticas
California Institute of Technology

ANÁLISIS MATEMÁTICO

INTRODUCCIÓN MODERNA AL CÁLCULO SUPERIOR



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

BARCELONA - BUENOS AIRES - MÉXICO

MCMLX

Título de la obra original

MATHEMATICAL ANALYSIS

Editada por
ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.
Reading, Massachusetts, U.S.A.

Versión española por el
Dr. D. **Francisco Vélez Cantarell,** Profesor Adjunto de la
Facultad de Ciencias de Barcelona

Revisada por el
Dr. D. **Enrique Linés Escardó,** Catedrático de la
Facultad de Ciencias de Barcelona

N.º Registro B. 389 - 60

Depósito Legal B 14070 - 1960

Impreso en España — Printed in Spain

GRAFESA: Torres Amat, 9 - Barcelona

PRÓLOGO

Al repasar el índice de este libro se verá que en él se estudian la mayoría de los temas incluídos ordinariamente en los tratados de « Cálculo Superior ». El propósito del autor ha sido ofrecer una exposición fiel, rigurosa y moderna de la materia y a la vez exenta de vana erudición. La mayor parte de los teoremas « difíciles » que en muchos textos de Cálculo se omiten o tratan superficialmente, son demostrados aquí rigurosamente. Con frecuencia, algunos de ellos se consideran excesivamente difíciles para ser tratados en los cursos llamados de « Cálculo Superior », pero por otra parte resultan elementales en un curso de Teoría de Funciones reales o complejas. Al incluir tales teoremas en este libro se contribuye a llenar el vacío existente entre los cursos ordinarios de Cálculo y los superiores de Análisis, y, lo que es más importante, a iniciar al lector en el pensamiento abstracto del que está impregnada la Matemática moderna.

En líneas generales el contenido del libro es el siguiente :

Un capítulo dedicado a la teoría de los conjuntos abstractos que contiene una formulación precisa del concepto de función.

Topología de conjuntos de puntos en el espacio euclídeo de n dimensiones.

Estudio completo de la diferenciación.

Discusión elemental de la conexión.

Amplio estudio de la integral de Riemann-Stieltjes, incluyendo la integración compleja y discusión sobre el número de giros.

Estudio de la medida de Jordan y de la medida exterior de Lebesgue.

Demostración del teorema de Green para regiones planas limitadas por curvas rectificables de Jordan arbitrarias.

Detallado estudio de las superficies y de las integrales de superficie.

Exposición completa de la inversión del paso al límite.

Un capítulo sobre las series y las integrales de Fourier, que incluye el teorema general del mismo autor, el teorema de convolución para las transformadas de Fourier y la fórmula de inversión para las transformadas de Laplace.

Introducción a la teoría de funciones de una variable compleja.

Como se ve, hay suficiente materia para un curso completo, pero algunas partes pueden omitirse sin perturbar la continuidad de la exposición. La obra contiene cerca de 500 ejercicios, muchos de los cuales han sido pensados para ilustrar la teoría general y para mostrar los puntos de la misma cuya omisión puede conducir a error.

Por varias razones entre las que se cuenta la falta de espacio se ha prescindido en lo posible de las aplicaciones y ejemplos pertenecientes al campo de la Física. No será difícil al docente conducir una discusión eurística al descubrimiento de un concepto difícil, pero muchas veces tal discusión llevada a un texto podría parecer algo ridícula. Además, la forma de presentar esas aplicaciones y ejemplos, es sobre todo cuestión de gusto personal; y por ello lo mejor será improvisarlas en las clases cuando el profesor lo juzgue conveniente.

A todo el que desee adentrarse en las nociones superiores del Análisis, le es indispensable un claro conocimiento de los conceptos fundamentales del Cálculo ; por ello esperamos que este libro, especialmente destinado a los estudiantes de matemáticas, será también de utilidad para los de Física e Ingeniería.

Durante la preparación del original el autor ha encontrado toda la colaboración que uno puede desear. Está particularmente reconocido a los profesores PAÚL R. HALMOS de la Universidad de Chicago y M. E. MUNROE de la Universidad de Illinois. Su cumplida crítica de la primera redacción se ha dejado sentir profundamente en la forma final que ha tomado el libro. Expresa también su especial agradecimiento al doctor BASIL GORDON del California Institute of Technology, que leyó la redacción definitiva y señaló varios errores. La generosidad del California Institute permitió utilizar la experiencia de la señorita Rosemarie Stampfel para mecanografiar el original. El autor debe también mucho a los estudiantes de Caltech que le proporcionaron el primer impulso para esta obra.

Finalmente, ha de dar las gracias a la Addison-Wesley Publishing Company, por el sincero interés con que tomó la edición de un libro de esta naturaleza, y por la excelente ayuda y cooperación que constantemente le han brindado.

TOM M. APOSTOL

Enero de 1957

CAPÍTULO I

SISTEMAS DE NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

1-1 Introducción. El sistema o campo de los números reales es uno de los conceptos fundamentales de la Matemática. Un estudio riguroso y exhaustivo del Análisis Matemático requeriría la inclusión de una definición cuidadosa del significado del número real, una discusión relativa a la construcción de los números reales (comenzando, por ejemplo, con los enteros), y una exposición de sus principales propiedades. Si bien estas nociones básicas constituyen una parte muy interesante de los fundamentos de las matemáticas, no serán tratadas aquí con detalle. En realidad, en la mayoría de las fases del Análisis, más que los métodos usados en la construcción del campo de los números reales nos interesan sus *propiedades*. Por lo tanto, tomaremos como punto de partida un pequeño grupo de axiomas de los cuales pueden deducirse todas las propiedades de los números reales. Para ahondar en los métodos utilizados en la construcción del campo real el lector debería consultar las referencias bibliográficas del final del capítulo.

Supondremos que el lector está familiarizado con la mayor parte de las propiedades de los números reales que en las próximas páginas se consideran, así como de algunas de sus consecuencias elementales. También daremos por sentado que el lector conoce las funciones elementales del cálculo, tales como las funciones trigonométrica, exponencial y logarítmica. Si bien las series se estudiarán con detalle más tarde, algunas cuestiones fundamentales relativas a ellas (con las que probablemente el lector ya está familiarizado desde el estudio del cálculo elemental) se utilizarán en la primera parte de este capítulo.

1-2 Propiedades aritméticas de los números reales. Dado un par de números reales x e y, podemos formar su suma $x + y$ y su producto xy, que satisfacen los siguientes axiomas:

AXIOMA 1. $x + y = y + x,\ xy = yx$ *(ley conmutativa).*

AXIOMA 2. $x + (y + z) = (x + y) + z,$
$x(yz) = (xy)z$ *(ley asociativa).*

AXIOMA 3. $x(y + z) = xy + xz$ *(ley distributiva).*

AXIOMA 4. Dado un par de números reales x e y, existe otro número real z tal que $x + z = y$. Este z se representará por $y - x$; el número $x - x$ se representará por 0. (Puede demostrarse que 0 es independiente de x.) Escribimos $-x$ en lugar de $0 - x$.

AXIOMA 5. Existe por lo menos un número real $x \neq 0$. Si x e y son dos números reales siendo $x \neq 0$, entonces existe otro número real z tal que $xz = y$. Tal número z se representa por y/x; el número x/x se representa por 1 y puede demostrarse que es independiente de x. Escribimos x^{-1} en lugar de $1/x$ si $x \neq 0$.

A partir de estos axiomas pueden deducirse todas las leyes usuales de la Aritmética; por ejemplo, $-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$, $-(x - y) = y - x$, $x - y = x + (-y)$, etc. (Para una más detallada exposición véase Ref. 1—4.)

1-3 Propiedades de ordenación de los números reales. Tenemos también una relación $<$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los axiomas siguientes:

AXIOMA 6. Siempre se verifica una y una sola, de las relaciones $x = y$, $x < y$, $x > y$.

NOTA. $x > y$ significa lo mismo que $y < x$.

AXIOMA 7. Si $x < y$, para todo z tenemos $x + z < y + z$.

AXIOMA 8. Si $x > 0$ e $y > 0$, será $xy > 0$.

AXIOMA 9. Si $x > y$ e $y > z$, será $x > z$.

De estos axiomas se deducen las reglas usuales para las operaciones con desigualdades. Por ejemplo, si tenemos $x < y$, será $xz < yz$ si $z > 0$, mientras que $xz > yz$ si $z < 0$. También, si $x > y > 0$ y $z > w > 0$, será $xz > yw$. (Para una discusión completa de estas reglas ver Ref. 1-1.) Un décimo axioma se da en la Sección 1-9.

NOTA. El simbolismo $x \leq y$ expresa en forma abreviada la locución: «$x < y$ o $x = y$». Así tenemos $2 \leq 3$ puesto que $2 < 3$, y $2 \leq 2$ ya que $2 = 2$. Análogamente se usa el símbolo $\geq$.

1-4 Representación geométrica de los números reales. Los números reales pueden ser representados geométricamente por los puntos de una recta (el *eje real*). Elegido un punto para representar el 0 y otro para representar el 1, queda determinada la escala. De esta forma a cada punto del eje real corresponde un número real y uno solo, e inversamente, cada número real queda representado por un solo punto.

1-5 Representación decimal de los números reales. Todo número real x tiene un desarrollo decimal de la forma

$$x = \pm N, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots,$$

donde N es o 0 o un entero positivo y cada a_i es uno de los dígitos de 0 a 9. La notación $N, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ es una escritura abreviada de la serie

$$N + a_1(10)^{-1} + a_2(10)^{-2} + \cdots + a_n(10)^{-n} + \cdots.$$

Cuando N es 0 y todas las a_i son iguales (p. ej. $a_i = a$), entonces la serie se convierte en una serie geométrica de razón 1/10 y su suma es

$$a\left(\frac{1/10}{1 - 1/10}\right) = \frac{a}{9}.$$

Si $a = 9$, esta serie tienen suma 1, lo que significa que el número 1 tiene *dos* desarrollos decimales

$$1 = 1{,}000\ldots = 0{,}999\ldots.$$

Más general, si un número tiene un desarrollo decimal terminado en ceros, por ejemplo, $1/8 = 0{,}125000\ldots$, entonces este número puede escribirse mediante un desarrollo decimal que termine en nueves disminuyendo el último dígito no nulo en una unidad. Así tenemos $1/8 = 0{,}124999\ldots$. Salvo casos semejantes a éstos, los desarrollos decimales son únicos.

1-6 Números racionales. Los números reales se clasifican en dos tipos, racionales e irracionales. Racionales son aquellos números reales que son el cociente de dos enteros; por ejemplo, 1/2, 7/5, − 5. Irracionales son los números reales que no son racionales; por ejemplo, π, $\sqrt{2}$, e. Los números racionales e irracionales pueden también distinguirse por sus representaciones decimales. Un número racional tiene un desarrollo decimal periódico : $1/2 = 0{,}5\widehat{0}$, $2/3 = 0{,}\widehat{6}$, $13/22 = 0{,}59\widehat{09}$, $1/8 = 0{,}124\widehat{9}$, $1/7 = 0{,}\widehat{142857}$. La parte decimal señalada con el arco es el período, es decir, el grupo de cifras que se repiten indefinidamente en el mismo orden. (El lector no tendrá dificultad en demostrar que tal repetición debe presentarse siempre que un número racional se escribe en forma decimal.) Recíprocamente, todo decimal periódico representa un número racional. Este hecho no es tan inmediato, puede demostrarse observando que un decimal periódico constituye una serie geométrica de la forma

$$a + b(1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots),$$

donde a, b, y r son racionales, siendo r cierta potencia de 1/10. Tal serie tiene como suma $a + b/(1 - r)$, que es racional. Como ejemplo, tomemos el decimal

periódico $x = 0,3\widehat{14}$. Podemos escribirlo mediante una serie como la siguiente :

$$x = \frac{3}{10} + 14\,(10^{-3}) + 14\,(10^{-5}) + 14\,(10^{-7}) + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + 14\,(10^{-3})\,[1 + (10^{-2}) + (10^{-4}) + \cdots]$$

$$= \frac{3}{10} + 14\,(10^{-3})\left[\frac{100}{99}\right] = \frac{311}{999}.$$

Dados dos números racionales, a y b, su promedio $(a + b)/2$ es también racional. Por consiguiente entre todo par de números racionales existe otro número racional. De aquí resulta que entre todo par de números racionales debe existir una *infinidad* de números racionales [¿Por qué?], lo cual implica que si consideramos un cierto número racional x, no tiene sentido hablar del número racional «inmediato superior».

1-7 Algunos números irracionales. Generalmente no es demasiado fácil demostrar que un número es irracional. No es sencilla, por ejemplo, la demostración de la irracionalidad de e^{π}. Sin embargo, la irracionalidad de ciertos números tales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ no es difícil de establecer y en efecto, fácilmente podremos probar el siguiente :

1—1 Teorema. *Si n es un entero que no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{n}$ es irracional.*

Demostración. Ante todo supongamos que n no contenga un factor cuadrado perfecto > 1. Si suponemos que $\sqrt{n}$ es racional obtendremos una contradicción. Sea $\sqrt{n} = a/b$, donde a y b son enteros primos entre sí. Entonces $nb^2 = a^2$ y, puesto que el primer miembro de esta ecuación es un múltiplo de n, también lo es a^2. Por otra parte, si a^2 es un múltiplo de n, debe ser a su vez a múltiplo de n, ya que n no tiene factores cuadrados > 1. (Esto se ve fácilmente considerando la descomposición de a en sus factores primos.) Esto significa que $a = cn$, donde c es un entero. Entonces la ecuación $nb^2 = a^2$ se convierte en $nb^2 = c^2n^2$, o bien $b^2 = nc^2$. Con análogo razonamiento se demuestra que b también debe ser un múltiplo de n. Así pues, a y b son ambos múltiplos de n, lo que contradice la hipótesis de que eran primos entre sí. Esta es la demostración si n no tiene factores cuadrados perfectos > 1.

Si n tiene un factor cuadrado, podemos escribir $n = m^2k$, donde $k > 1$ y está desprovisto de factores cuadrados > 1. Así tenemos $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$; y si $\sqrt{n}$ fuera racional, el número $\sqrt{k}$ sería también racional, en contradicción con lo que acabamos de demostrar.

La demostración de que el número e es irracional, requiere otro tipo de razonamiento.

1—2 TEOREMA. *Si* $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots + x^n/n! + \ldots$, *el número* e *es irracional.*

Demostración. Probaremos que e^{-1} es irracional. La serie correspondiente a e^{-1} es una serie alternada cuyos términos decrecen constantemente en valor absoluto. En ella el error cometido al detenernos en el término de orden n tiene el signo del primer término despreciado y un valor absoluto menor que el de éste. Por consiguiente, si $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$, tenemos la desigualdad

$$0 < e^{-1} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!},$$

de donde obtenemos

$$0 < (2k-1)!\,(e^{-1} - s_{2k-1}) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$$

para todo entero $k \geq 1$. Ahora bien, $(2k-1)!\,s_{2k-1}$ es siempre un entero. Si e^{-1} fuese racional, elegiríamos k suficientemente grande para que $(2k-1)!\,e^{-1}$ fuese también entero. Pero la última desigualdad nos dice que la diferencia entre estos dos números enteros sería un número comprendido entre 0 y $^1/_2$, lo que es imposible. Así pues e^{-1} no puede ser racional, y por tanto e tampoco.

Los antiguos griegos ya conocían la existencia de los números irracionales 500 años a. de J. C. No obstante, hasta el siglo XIX, no fue desarrollada una teoría satisfactoria de tales números, y en esa época fueron introducidas tres teorías diferentes por CANTOR, DEDEKIND y WEIERSTRASS. Para un estudio de las teorías de CANTOR y DEDEKIND y sus equivalencias, ver el Capítulo I de E. W. HOBSON, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, Vol. 1, 3.ª ed. Cambridge : University Press, 1927.

1-8 Algunas desigualdades fundamentales. Con frecuencia se presentan, en Análisis, cálculos con desigualdades. Estas tienen particular importancia en relación con el concepto de valor absoluto. Si x es número real, definimos su valor absoluto, representado por $|x|$, como sigue :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Una desigualdad fundamental concerniente a los valores absolutos viene dada por el siguiente :

1—3 TEOREMA. *Si* $a \geq 0$, *tenemos la desigualdad* $|x| \leq a$, *únicamente cuando* $-a \leq x \leq a$ *y recíprocamente.*

Demostración. Según la definición de $|x|$, tenemos la desigualdad $-|x| \leq x \leq |x|$, ya que $x = |x|$ o $x = -|x|$. Si suponemos que $|x| \leq a$, entonces podemos escribir $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$, y así la mitad del teorema está probada. Inversamente, supongamos $-a \leq x \leq a$. Entonces si $x > 0$, tenemos $|x| = x \leq a$, mientras que si $x < 0$, resulta $|x| = -x \leq a$. En ambos casos tenemos $|x| \leq a$ y el teorema está demostrado.

Como consecuencia importante tenemos

1–4 TEOREMA. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demostración. Pongamos $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$. La suma nos da $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, y según el Teorema 1-3 concluimos que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Puesto que $|-x| = |x|$, el Teorema 1-4 también origina la desigualdad

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

Sustituyendo x por $y \dot{-} x$, ésta puede escribirse en la forma

$$|x - y| \geq |x| - |y|,$$

y por inducción, podemos demostrar las generalizaciones

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x_1| - |x_2| - \cdots - |x_n|.$$

Podremos deducir ahora un resultado muy útil conocido por el nombre de *desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

1–5. TEOREMA. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*). *Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números reales arbitrarios, tenemos*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Demostración. Una suma de cuadrados nunca puede ser negativa. Por lo tanto tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$$

para todo x real. Esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Si $A > 0$, haciendo $x = -B/A$ se obtiene $B^2 - AC \leq 0$, que es la desigualdad que deseábamos. Si $A = 0$, la demostración es trivial.

NOTA. Para otra demostración de este teorema, ver Ejercicio 1-15.

1-9 Extremos superior e inferior. Designemos por S una colección o conjunto de números reales. La notación $x \in S$ significa que el número real x pertenece a S, y escribimos $x \notin S$ para indicar que x no está en S.

La notación $\{x|x$ satisface $P\}$ será utilizada para designar el conjunto de los números reales x que satisfacen la propiedad P.

1—6 DEFINICIÓN. *Sea A un conjunto de números reales. Si existe un número real x tal que para todo $a \in A$ se verifica $a \leq x$, se dice que x es una cota superior para el conjunto A y que A está acotado superiormente.* [De forma análoga se define la cota inferior].

1—7 DEFINICIÓN. *Sea A un conjunto de números reales acotado superiormente. Supongamos que exista un número real y que satisface las dos condiciones siguientes*:

a) *x es una cota superior de A*

b) *si y es otra cota superior de A, siempre $x \leq y$.*

Tal número x se llama extremo superior del conjunto A. [Abreviadamente se utiliza sup para designar el extremo superior. De forma análoga se define el extremo inferior de A si éste está acotado inferiormente. La abreviación para el extremo inferior es inf.]

Es fácil ver que tanto el sup como el inf de un conjunto, si existen, son únicos (ver Ejercicio 1-10).

Nuestro axioma final para el campo de los números reales implica la noción de extremo superior:

AXIOMA 10. Si A es un conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente, posee extremo superior.

Como consecuencia de este axioma, es inmediato que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente, posee extremo inferior. (La locución «no vacío» significa que el conjunto debe poseer por lo menos un número real.)

NOTACIONES. Si x es el sup de un conjunto A e y el inf, escribimos $x = \sup A$, $y = \inf A$.

EJEMPLOS.

1. Sea A el conjunto de los números de la fomrma $1/n$, donde n toma los valores de la serie natural $n = 1, 2, 3, \ldots$. Este conjunto está acotado superiormente por 1 e inferiormente por 0. Efectivamente 1 es el sup del conjunto y 0 es el inf. En este ejemplo el sup es también uno de los números del conjunto A, mientras que el inf no pertenece a A.

2. $A = \{x|0 < x < 1\}$. En este caso, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$. Sin embargo ni 0 ni 1 pertenecen a A.

3. $A = \{x|\ 0 < x^2 < 2\}$. Puesto que la desigualdad $0 < x^2 < 2$ es equivalente a las dos desigualdades $0 < x < \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2} < x < 0$, el sup de este conjunto es $\sqrt{2}$ y el inf $-\sqrt{2}$.

4. $A = \{x|x^2 > 2\}$. Aquí, no existe sup ni inf. Este conjunto no está acotado superior ni inferiormente.

5. $A = \{x|x > 0 \text{ y } x^2 > 2\}$. En este ejemplo no existe sup, pero el inf es $\sqrt{2}$.

La siguiente propiedad del extremo superior será de gran utilidad más adelante.

1–8 TEOREMA. *Sean A y B dos conjuntos acotados de números reales con $a = \sup A$, $b = \sup B$. Designemos por C el conjunto*

$$C = \{x + y\,|\,x \in A,\ y \in B\}.$$

Entonces es $a + b = \sup C$.

Demostración. Si $z \in C$, entonces $z = x + y \leq a + b$; de manera que $a + b$ es una cota superior de C. Sea c otra cota superior de C. Tenemos que demostrar que $a + b \leq c$. Para ello sea ε un número positivo dado. Existe un número x en A y un número en B tales que

$$a - \varepsilon < x, \qquad b - \varepsilon < y.$$

Por la adición de estas desigualdades, encontramos

$$a + b - 2\varepsilon < x + y \leq c.$$

Esto es, $a + b \leq c + 2\varepsilon$. Pero como ε es arbitrario, resulta $a + b \leq c$.

1-10 Números complejos. De los axiomas que rigen la relación $<$ se deduce que el cuadrado de un número real nunca es negativo. Así, por ejemplo, la sencilla ecuación cuadrática $x^2 = -1$ no tiene solución en números reales.

Nuevos tipos de números, llamados *números complejos*, deben introducirse para conseguir las soluciones de tales ecuaciones. La introducción de tales números proporciona, al propio tiempo, las soluciones de las ecuaciones algébricas generales de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1 \ldots a_n$ son números reales cualesquiera. (Esta proposición es conocida como *Teorema fundamental del Algebra.*)

Definiremos ahora los números complejos y los comentaremos con más detalle.

1–9 DEFINICIÓN. *Consideraremos como número complejo un par ordenado de números reales que representaremos por la notacion* (x_1, x_2). *El primero,* x_1, *se llama la parte real del número complejo ; el segundo,* x_2, *es la parte imaginaria. Dos complejos* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *se llaman iguales, y escribiremos* $x = y$, *si* $x_1 = y_1$ *y* $x_2 = y_2$ *y recíprocamente. Definimos la suma* $x + y$ *y el producto* xy *mediante las ecuaciones*

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2), \qquad xy = (x_1 y_1 - x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

1–10 TEOREMA. *Las operaciones de adición y multiplicación que acabamos de definir, satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.*

Demostración. Nos referiremos únicamente a la ley distributiva, ya que es la de mayor dificultad. Si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, y $z = (z_1, z_2)$, tendremos

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (x_1, x_2)(y_1 + z_1,\ y_2 + z_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 z_1 - x_2 y_2 - x_2 z_2,\ x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1) \\ &= (x_1 y_1 - x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) + (x_1 z_1 - x_2 z_2,\ x_1 z_2 + x_2 z_1) \\ &= xy + xz \end{aligned}$$

1–11 TEOREMA.

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2) \qquad (x_1, x_2)(0, 0) = (0, 0),$$
$$(x_1, x_2)(1, 0) = (x_1, x_2) \qquad (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0).$$

Demostración. Las demostraciones aquí son inmediatas según la definición, como lo son las de los Teoremas 1-12, 1-13, 1-15 y 1-16.

1–12 TEOREMA. *Dados dos números complejos* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$, *existe otro número complejo z tal que* $x + z = y$. *Entonces* $z = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$. *Tal número z se expresa por* $y - x$. *El número complejo* $(-x_1, -x_2)$ *se representa por* $-x$.

1—13 TEOREMA. *Para cualquier par de números complejos x e y, tenemos*

$$(-x)y = x(-y) = -(xy) = (-1, 0)(xy).$$

1—14 DEFINICIÓN. *Si $x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$ e y son números complejos definimos $x^{-1} = [x_1/(x_1^2 + x_2^2), -x_2/(x_1^2 + x_2^2)]$, e $y/x = yx^{-1}$.*

1—15 TEOREMA. *Si x e y son números complejos siendo $x \neq (0,0)$, existe un número complejo z tal que $xz = y$, que es $z = yx^{-1}$.*

Son de especial interés las operaciones con números complejos cuyas partes imaginarias son 0.

1—16 TEOREMA. $(x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0)$,
$(x_1, 0)(y_1, 0) = (x_1 y_1, 0)$
$(x_1, 0)/(y_1, 0) = (x_1/y_1, 0)$, si $y_1 \neq 0$.

NOTA. Es evidente que según el Teorema 1-16, podemos representar las operaciones aritméticas con números complejos de parte imaginaria nula mediante las operaciones usuales entre números reales, operando únicamente con las partes reales. Por lo tanto, los números complejos de la forma $(x, 0)$ tienen propiedades aritméticas análogas a las de los números reales. Por esta razón, es conveniente considerar el sistema de los números reales como un caso especial de los números complejos, y convendremos en la identificación del número complejo $(x, 0)$ con el número real x. Por eso, escribimos $x = (x, 0)$. En particular, $0 = (0,0)$ y $1 = (1,0)$.

1-11 Representación geométrica de los números complejos. Así como los números reales se representan geométricamente mediante los puntos de una recta, los números complejos se representan por los puntos de un plano. El número complejo $x = (x_1, x_2)$ puede ser imaginado como el «punto» de coordenadas $)x_1, x_2)$. Dicho esto, la definición de adición equivale a la adición según la *regla del paralelogramo.* (Ver Fig. 1-1).

La idea de la representación geométrica de los números complejos mediante puntos de un plano fue propuesta por GAUSS en 1799, e independientemente, por ARGAND en 1806. Más tarde GAUSS ideó la expresión un tanto desafortunada de «número complejo». Otras representaciones son posibles para los números complejos. En lugar de utilizar puntos de un plano, pueden usarse puntos sobre otras superficies. RIEMANN encontró que la esfera es especialmente útil para tal objeto. Los puntos de la esfera son proyectados desde el Polo Norte sobre

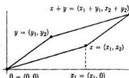


Fig. 1-1. Adición de números complejos

el plano tangente en el Polo Sur y así a cada punto del plano corresponde un punto de la esfera. Con la excepción del mismo Polo Norte, cada punto de la esfera corresponde exactamente a un punto del plano. Esta correspondencia se denomina una *proyección estereográfica*. (Ver Fig. 1-2).

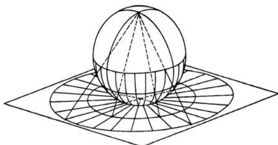


Fig. 1-2. Proyección estereográfica

1-12 La unidad imaginaria. Conviene considerar el número complejo (x_1, x_2) como un vector bidimensional de componentes x_1 y x_2. La adición de números complejos en el sentido de la definición 1-9 es equivalente a la adición de dos vectores componente a componente. El número complejo $1 = (1, 0)$ juega el mismo papel que el vector unidad en la dirección horizontal. Introduciremos ahora lo mismo para un vector unitario en la dirección vertical.

1—17 DEFINICIÓN. *El número complejo* $(0, 1)$ *se representa por* i *y se llama la unidad imaginaria.*

1—18 TEOREMA. *Todo número complejo* $x = (x_1, x_2)$ *puede escribirse en la forma* $x = x_1 + ix_2$.

Demostración. $x_1 = (x_1, 0)$, $ix_2 = (0, 1)(x_2, 0) = (0, x_2)$,
$x_1 + ix_2 = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2)$.

El próximo teorema nos explica que el número complejo i nos proporciona una solución de la ecuación $x^2 = -1$.

1—19 TEOREMA. $i^2 = -1$.

Demostración. $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

1-13 Valor absoluto de un número complejo. Vamos ahora a generalizar el concepto de valor absoluto al sistema de los números complejos.

1—20 DEFINICIÓN. Si $x = (x_1, x_2)$, *definimos el módulo o valor absoluto de* x, *como el número real no negativo* $|x|$ *dado por*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

1—21 TEOREMA. a) $|(0, 0)| = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.
b) $|xy| = |x|\,|y|$.
c) $|x/y| = |x|/|y|$, si $y \neq 0$.
d) $|(x_1, 0)| = |x_1|$.

Demostración. Las proposiciones a) y d) son inmediatas. Para demostrar b), escribimos $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, así que $xy = x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. Observando que tenemos

$$|xy|^2 = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = |x|^2\,|y|^2,$$

resulta la proposición b). La ecuación c) puede deducirse de b) escribiéndola en la forma $|x| = |y|\,|x/y|$.

Geométricamente, $|x|$ representa la longitud del segmento que une el origen con el punto x. Más general, $|x - y|$ es la distancia entre los puntos x e y. Utilizando esta interpretación geométrica, el teorema siguiente establece que un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos lados.

1—22 TEOREMA. *Si* x *e* y *son números complejos, tendremos*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad (\textit{desigualdad triangular}).$$

La demostración (sin el empleo de la geometría) queda como un ejercicio.

1-14 Imposibilidad de una ordenación de los números complejos. Todavía no hemos definido una relación de la forma $x < y$ si x e y son números complejos arbitrarios, por la razón de que es imposible dar una definición de $<$ para números complejos que posea todas las propiedades expresadas por los Axiomas 6, 7 y 8. Para justificarlo, supongamos que fuera posible definir una relación de orden $<$ que cumpliera los Axiomas 6, 7 y 8. Entonces, puesto que $i \neq 0$, tendríamos o bien $i > 0$ o $i < 0$, según el Axioma 6. Supongamos $i > 0$. Tomando entonces $x = y = i$ en el Axioma 8, obtenemos $i^2 > 0$ o sea $-1 > 0$. Sumando 1 a los dos miembros (Axioma 7), llegamos a $0 > 1$. Por otra parte, aplicando el Axioma 8 a $-1 > 0$ se obtiene $1 > 0$. Así obtenemos $0 > 1$ y $1 > 0$, lo cual según el Axioma 6, es absurdo. Por tanto el suponer $i > 0$ nos lleva a una contradicción [¿Por qué la desigualdad $-1 > 0$ no era ya una contradicción?]. Un razonamiento parecido demuestra que no podemos tomar $i < 0$. Por tanto, los números complejos no pueden ser ordenados de manera que los Axiomas 6, 7 y 8 se satisfagan.

1-15 Exponenciales complejas. La exponencial e^x (x real) ha sido mencionada en el Teorema 1-2. Queremos ahora definir e^z, cuando z es un número complejo. Vamos a hacerlo de manera que las propiedades principales de la función exponencial real se conserven. Las citadas propiedades de e^x para x real vienen dadas por la ley de exponentes, $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$, y por el hecho de que $e^0 = 1$. Daremos una definición de e^z para z complejo que conserve tales propiedades y que se reduzca a la exponencial ordinaria cuando z sea real.

Si escribimos $z = x + iy$ (x, y reales), con objeto de que se mantenga la ley de exponentes, es necesario que sea $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Queda pues por definir lo que significa e^{iy}.

1—23 Definición. *Si $z = x + iy$, definimos $e^z = e^{x+iy}$ como el número complejo $e^z = e^x$ ($\cos y + i$ sen y).*

Tal definición* coincide claramente con la función exponencial ordinaria cuando z es real (esto es, $y = 0$). Tenemos que demostrar ahora que la ley de exponentes se cumple.

1—24 Teorema. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ *son dos números complejos, se verifica*

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Demostración.

$$e^{z_1} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1), \quad e^{z_2} = e^{x_2} (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2),$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i (\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)].$$

Ahora bien: $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$, puesto que x_1 y x_2 son reales. Asimismo,

$$\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 = \cos (y_1 + y_2)$$

y

$$\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2 = \operatorname{sen} (y_1 + y_2),$$

* Pueden darse diversos razonamientos plausibles para justificar la ecuación $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Por ejemplo, escribamos $e^{iy} = f(y) + ig(y)$ e intentemos determinar las funciones de variable real f y g de manera que las reglas usuales de las operaciones con exponenciales reales sean también aplicables a las exponenciales complejas. Por diferenciación formal se obtiene $e^{iy} = g'(y) - if'(y)$, si suponemos que $(e^{iy})' = ie^{iy}$. Comparando las dos expresiones para e^{iy}, vemos que f y g deben satisfacer las ecuaciones $f(y) = g'(y)$, $f'(y) = -g(y)$. Eliminando g resulta $f(y) = -f''(y)$. Como $e^0 = 1$, ha de ser $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. Se deduce que $f(y) = \cos y$ y $g(y) = -f'(y) = \operatorname{sen} y$. Por supuesto, este razonamiento no *demuestra* nada, pero indica ostensiblemente que la definición $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ es razonable.

y por consiguiente

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}\,[\cos(y_1+y_2) + i\,\mathrm{sen}\,(y_1+y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

Ahora vamos a obtener algunas propiedades importantes de la exponencial compleja. (En los siguientes teoremas, z, z_1, z_2 representan números complejos.)

1—25 TEOREMA. *e^z nunca es cero.*

Demostración. $e^ze^{-z} = e^0 = 1$. Luego e^z no puede ser cero.

1—26 TEOREMA. *Si x es real, entonces* $|e^{ix}| = 1$.

Demostración. $|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x = 1$, y $|e^{ix}| > 0$.

1—27 TEOREMA. *$e^z = 1$, si z es un múltiplo entero de $2\pi i$, y recíprocamente.*

Demostración. Si $z = 2\pi i n$, siendo n entero, entonces

$$e^z = \cos(2\pi n) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi n) = 1.$$

Inversamente, supongamos que $e^z = 1$. Esto significa que $e^x \cos y = 1$ y $e^x \,\mathrm{sen}\, y = 0$. Ya que $e^x \neq 0$, es necesario que sen $y = 0$, $y = k\pi$, siendo k un entero. Pero $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Por tanto $e^x = (-1)^k$, ya que $e^x \cos(k\pi) = 1$. Siendo por otra parte $e^x > 0$, k debe ser par. Por eso $e^x = 1$ luego $x = 0$. El teorema está demostrado.

1—28 TEOREMA. *$e^{z_1} = e^{z_2}$, si $z_1 - z_2 = 2\pi i n$ (siendo n un entero) y recíprocamente.*

Demostración. $e^{z_1} = e^{z_2}$ si $e^{z_1 - z_2} = 1$ e inversamente.

1-16 Argumento de un número complejo. Si el punto $z = (x, y) = x + iy$ se representa en coordenadas polares r y θ, podemos escribir $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, es decir $z = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = re^{i\theta}$. Los dos números r y θ determinan unívocamente a z. Inversamente, el número positivo r viene determinado unívocamente por z; pues efectivamente, $r = |z|$. Sin embargo, z determina el ángulo θ salvo múltiplos de 2π. Existen una infinidad de valores de θ que satisfacen las ecuaciones $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\,\mathrm{sen}\,\theta$, pero, naturalmente, dos cualesquiera de ellos difieren en un múltiplo de 2π. Cada uno de estos valores de θ es un *argumento de z* pero *uno* de ellos se distingue y se llama el *argumento principal* de z.

1—29 DEFINICIÓN. *Sea $z = x + iy$ un número complejo no nulo. El número real único θ que satisface las condiciones*

$$x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad -\pi < \theta \leq +\pi$$

se llama el argumento principal de z, y se representa por $\theta = \arg(z)$

La anterior discusión origina inmediatamente el siguiente teorema:

1—30 TEOREMA. *Todo número complejo $z \neq 0$ puede ponerse en la forma $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) + 2\pi n$, siendo n un entero.*

NOTA. Tal método de representación de los números complejos es especialmente útil en relación con la multiplicación y la división, pues tenemos

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{y} \quad \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

1—31 TEOREMA. *Si $z_1 z_2 \neq 0$, se verifica $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2)$ donde*

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq +\pi, \\ +1 & si \quad -2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi, \\ -1 & si \quad \pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq 2\pi. \end{cases}$$

Demostración. Pongamos $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$, donde $\theta_1 = \arg(z_1)$ y $\theta_2 = \arg(z_2)$. Entonces $z_1 z_2 = |z_1 z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Puesto que $-\pi < \theta_1 \leq +\pi$ y $-\pi < \theta_2 \leq +\pi$, tenemos $-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi$. Por consiguiente, existe un entero n tal que $-\pi < \theta_1 + \theta_2 + 2n\pi \leq \pi$. Este entero n es precisamente el entero $n(z_1, z_2)$ dado en el teorema, y para él tenemos $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi n$. Lo que demuestra el teorema.

1-17 Potencias enteras y raíces de números complejos.

1—32 DEFINICIÓN. *Dados un número complejo z y un entero n, definimos la potencia n-ésima de z así:*

$$z^0 = 1, \quad z^{n+1} = z^n z, \quad si \quad n \geq 0,$$
$$z^{-n} = (z^{-1})^n, \quad si \quad z \neq 0 \quad y \quad n > 0.$$

El Teorema 1—33, que establece que las leyes de exponentes usuales son válidas, puede probarse por inducción. Dejamos la demostración como un ejercicio.

1—33 TEOREMA. *Dados dos enteros m y n, tenemos*

$$z^n z^m = z^{n+m} \quad y \quad (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

1—34 TEOREMA. *Si $z \neq 0$, y n es un entero positivo, existen exactamente n números complejos distintos $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (llamados raíces n-ésimas de z), tales que*

$$z_k^n = z, \quad para \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Además, estas raíces se obtienen utilizando las fórmulas

$$z_k = Re^{i\phi_k}, \quad donde \quad R = |z|^{1/n},$$

y

$$\phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

NOTA. Las n raíces n-ésimas son los vértices de un polígono regular inscrito en el círculo de radio $R = |z|^{1/n}$ y centro en el origen.

Demostración. Los n números complejos $Re^{i\phi_k}$, $0 \leq k \leq n-1$, son distintos y cada uno es una raíz n-ésima de z, ya que

$$(Re^{i\phi_k})^n = R^n e^{in\phi_k} = |z| e^{i[\arg(z) + 2\pi k]} = z.$$

Demostremos ahora que no existen otras raíces n-ésimas de z. Admitamos que $w = Ae^{i\alpha}$ es un complejo tal que $w^n = z$. En tal caso $|w|^n = |z|$, y por tanto $A^n = |z|$, $A = |z|^{1/n}$. Por consiguiente, de $w^n = z$ se deduce $e^{in\alpha} = e^{i[\arg(z)]}$, que implica $n\alpha - \arg(z) = 2\pi k$ para cierto entero k. Luego $\alpha = [\arg(z) + 2\pi k]/n$. Pero mientras k va recorriendo todos los valores enteros, w toma solamente los valores distintos $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. (Ver Fig. 1-3).

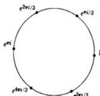


Fig. 1-3. Las seis raíces sextas de la unidad.

1-18 Logaritmos complejos. Según el Teorema 1-25, e^z nunca es cero. Es natural preguntar si existen otros valores que e^z no pueda alcanzar. El próximo teorema demuestra que el único valor excepcional es el cero.

1—35 TEOREMA. *Si z es un número complejo $\neq 0$, existen números complejos w tales que $e^w = z$. Uno de tales w es el número complejo*

$$\log|z| + i \arg(z),$$

y todos los demás tienen la forma

$$\log|z| + i\arg(z) + 2n\pi i \qquad (n \text{ es un entero}).$$

Demostración. Ya que $e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^{\log|z|} e^{i\arg(z)} = |z| e^{i\arg(z)} = z$, vemos que $w = \log|z| + i\arg(z)$ es una solución de la ecuación $e^w = z$. Pero si w_1 es alguna otra solución, entonces $e^w = e^{w_1}$ luego $w - w_1 = 2n\pi i$.

1—36 DEFINICIÓN. *Sea $z \neq 0$ un número complejo dado. Si w es un número complejo tal que $e^w = z$, entonces w se llama un logaritmo de z. El valor particular de w dado por*

$$w = \log |z| + i \arg (z)$$

Se denomina el logaritmo principal de z, y se representará simplemente por

$$w = \mathrm{Log}\, z.$$

EJEMPLOS.

1. Puesto que $|i| = 1$ y $\arg (i) = \pi/2$, $\mathrm{Log}\,(i) = i\pi/2$.
2. Puesto que $|-i| = 1$ y $\arg (-i) = -\pi/2$, $\mathrm{Log}\,(-i) = -i\pi/2$.
3. Puesto que $|-1| = 1$ y $\arg (-1) = \pi$, $\mathrm{Log}\,(-1) = \pi i$.
4. Si $x > 0$, $\mathrm{Log}\,(x) = \log x$, ya que $|x| = x$ y $\arg (x) = 0$.
5. Puesto que $|1 + i| = \sqrt{2}$ y $\arg (1 + i) = \pi/4$, $\mathrm{Log}\,(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\pi/4$.

1–37 TEOREMA. *Si* $z_1 z_2 \neq 0$, *se verifica* $\mathrm{Log}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2)$, *donde* $n(z_1, z_2)$ *es el entero definido en el Teorema* 1-31.

Demostración.
$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\,(z_1 z_2) &= \log |z_1 z_2| + i \arg (z_1 z_2)\\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i\,[\arg (z_1) + \arg (z_2) + 2\pi n(z_1, z_2)].\end{aligned}$$

1-19 Potencias complejas.

Utilizando logaritmos complejos, podemos ahora dar una definición de potencias complejas de números complejos.

1–38 DEFINICIÓN. *Si* $z \neq 0$ *y si* w *es cualquier número complejo, definimos*

$$z^w = e^{w\,\mathrm{Log}\, z}.$$

EJEMPLOS.

1. $i^i = e^{i\,\mathrm{Log}\, i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.
2. $(-1)^i = e^{i\,\mathrm{Log}\,(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$.
3. Si n es un entero, entonces $z^{n+1} = e^{(n+1)\,\mathrm{Log}\, z} = e^{n\,\mathrm{Log}\, z}\, e^{\mathrm{Log}\, z} = z^n z$, así pues la Definición 1-38 no contradice la Definición 1-32.

Los dos teoremas siguientes nos dan las reglas para calcular con potencias complejas :

1–39 TEOREMA. $z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1 + w_2}$.

Demostración. $z^{w_1+w_2} = e^{(w_1+w_2)\,\mathrm{Log}\, z} = e^{w_1\,\mathrm{Log}\, z}\, e^{w_2\,\mathrm{Log}\, z} = z^{w_1} z^{w_2}$.

1–40 TEOREMA. $(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{2\pi i w\, n(z_1, z_2)}$, *donde* $n(z_1, z_2)$ *es el entero definido en el Teorema* 1-31.

Demostración. $(z_1 z_2)^w = e^{w\,\mathrm{Log}\,(z_1 z_2)} = e^{w[\mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 + 2\pi i\, n(z_1, z_2)]}$.

1-20 Senos y cosenos complejos.

1—41. Definición. *Dado un número complejo z, definimos*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Nota. Cuando z es real, estas ecuaciones son compatibles con la Definición 1-23.

1—42 Teorema. *Si $z = x + iy$, se tiene*

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Demostración. $2 \cos z = e^{iz} + e^{-iz}$

$$= e^{-y} (\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y} (\cos x - i \operatorname{sen} x)$$
$$= \cos x (e^{y} + e^{-y}) - i \operatorname{sen} x (e^{y} - e^{-y})$$
$$= 2 \cos x \operatorname{ch} y - 2i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y.$$

La demostración para sen z es análoga.

Más propiedades de senos y cosenos se dan en los ejercicios.

Ejercicios

Números racionales e irracionales.

1-1. Hallar el número racional cuyo desarrollo decimal es 0,334444....

1-2. Demostrar que el desarrollo decimal de x termina en ceros (o en nueves) si x es racional y su denominador es de la forma $2^n 5^m$, donde m y n son enteros positivos o nulos, y recíprocamente

1-3. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

1-4. Si a, b, c, d son racionales y x es irracional, demostrar que $(ax + b)/(cx + d)$ es, en general, irracional. ¿Cuándo se presentan excepciones?

1-5. Dado cualquier real $x > 0$, encontrar un número irracional comprendido entre 0 y x.

1-6. Si $a/b < c/d$ siendo $b > 0$, $d > 0$, demostrar que $(a + c)/(c + d)$ está comprendido entre a/b y c/d.

1-7. Sean a y b enteros positivos. Demostrar que $\sqrt{2}$ siempre está comprendido entre las dos fracciones a/b y $(a + 2b)/(a + b)$. ¿Cuál de las fracciones está más próxima a $\sqrt{2}$?

1-8. Designemos por a y b las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ y sea $x_n = (a^n - b^n)/(a - b)$. Demostrar que $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, ..., $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

1-9. Determinar para qué valores del entero $n \geq 1$ el número $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ es racional, y para cuáles es irracional.

Extremos.

1-10. Demostrar que el sup y el inf de un conjunto son únicos cuando existen.

1-11. Hallar el sup y el inf de cada uno de los siguientes conjuntos de números reales:
a) Todos los números de la forma $2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r}$, donde p, q y r toman todos los valores enteros positivos.

b) $S = \{x \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.
c) $S = \{x \mid (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$, siendo $a < b < c < d$.

1-12. Sean S un conjunto de números reales acotado superiormente, a el sup de S y ε un número positivo. Demostrar que existe por lo menos un número x de S, tal que $a - \varepsilon < x \leq a$.

1-13. Sean A y B dos conjuntos de números reales acotados superiormente, $a = \sup(A)$ y $b = \sup(B)$. Si C es el conjunto de los números reales formados considerando todos los productos de la forma xy, donde $x \in A$ e $y \in B$, demostrar que, en general, $ab \neq \sup(C)$.

1-14. Sean x un número real > 0, y k un entero positivo > 1. Representemos por a_0 el mayor entero $\leq x$ y suponiendo que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ hayan sido definidos, representemos por a_n el mayor entero tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \cdots + \frac{a_n}{k^n} \leq x.$$

a) Demostrar que $0 \leq a_i \leq k - 1$ para $i = 1, 2, \ldots$
b) Explicar cómo pueden obtenerse geométricamente los números $a_0, a_1, a_2, \ldots$
c) Demostrar que la serie $a_0 + a_1/k + a_2/k^2 + \cdots$ converge y tiene por suma x.
d) Demostrar que x es el sup del conjunto de las sumas parciales de la serie c).

NOTA. La serie c) origina un desarrollo decimal de x en el sistema de base k.

Desigualdades.

1-15. Demostrar la identidad de Lagrange para los números reales

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1\leq k<j\leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Utilizar esta identidad para deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

1-16. Si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1-17. Probar la desigualdad de Minkowski

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

1-18. Demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right).$$

Números complejos.

1-19. Demostrar la ley asociativa para la multiplicación de números complejos: $z(yz) = (xy)z$.

1-20. Probar la desigualdad triangular (Teorema 1-22) para números complejos,

$$|x + y| \le |x| + |y|,$$

por métodos analíticos (es decir, sin utilizar la geometría). Deducir de aquí la siguiente desigualdad:

$$|x - y| \ge ||x| - |y||.$$

1-21. Si $z = x + iy$, el complejo conjugado de z es el número complejo $\bar{z} = x - iy$ (x e y son reales). Demostrar que

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, c) $z\bar{z} = |z|^2$,

d) $z + \bar{z} =$ al doble de la parte real de z.

e) $(z - \bar{z})/i =$ al doble de la parte imaginaria de z.

1-22. Si z_1 y z_2 son números complejos, demostrar que $|z_1 - z_2|$ representa la distancia entre ambos.

1-23. Describir (geométricamente) los conjuntos de números complejos z que cumplen las siguientes condiciones:

a) $|z| = 1$, b) $|z| < 1$, c) $|z| \le 1$,

d) $z + \bar{z} = 1$, e) $z - \bar{z} = i$, f) $\bar{z} + z = |z|^2$.

1-24. Dados tres números complejos z_1, z_2, z_3 tales que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Demostrar que tales números son vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo unidad con centro en el origen.

1-25. Si a y c son constantes reales, b complejo, demostrar que la ecuación

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0 \qquad (a \ne 0,\ z = x + iy)$$

representa un círculo en el plano xy.

1-26. Recordando la definición de arco tangente (tg^{-1}): dado un número real t, $\text{tg}^{-1}(t)$ es el único número real θ que satisface las dos condiciones

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}, \qquad \text{tg}\,\theta = t.$$

Si $z = x + iy$, demostrar que

a) $\arg(z) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, si $x > 0$,

b) $\arg(z) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$, si $x < 0$, $y \ge 0$,

c) $\arg(z) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$, si $x < 0$, $y < 0$,

d) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$, $y > 0$,

y $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ si $x = 0$, $y < 0$.

1-27. Definamos la siguiente «seudoordenación» de los números complejos: decimos que $z_1 < z_2$ si se verifica

I) $|z_1| < |z_2|$ o bien II) $|z_1| = |z_2|$ y $\arg(z_1) < \arg(z_2)$.

¿Cuáles de los Axiomas 6, 7, 8, 9 se satisfacen con esta relación?

1-28. ¿Cuáles de los Axiomas 6, 7, 8, 9 son satisfechos si la seudoordenación la definimos de la manera siguiente? Decimos $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si se verifica

I) $x_1 < x_2$ o bien II) $x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2$.

1-29. Establecer y demostrar un teorema análogo al Teorema 1-31, expresando $\arg(z_1/z_2)$ en función de $\arg(z_1)$ y $\arg(z_2)$.

1-30. Establecer y demostrar un teorema análogo al Teorema 1-37, expresando $\operatorname{Log}(z_1/z_2)$ en función de $\operatorname{Log}(z_1)$ y $\operatorname{Log}(z_2)$.

1-31. Demostrar el Teorema 1-33.

1-32. Demostrar que las raíces n-ésimas de 1 (también llamadas raíces n-ésimas de la unidad) vienen dadas por $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, donde $\alpha = e^{2\pi i/n}$, y probar que las raíces $\neq 1$ satisfacen la ecuación $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = 0$.

1-33. a) Demostrar que $|z^i| \leq e^\pi$ para todo complejo $z \neq 0$.

b) Demostrar que no existe una constante $M > 0$ para la cual $|\cos z| < M$ para todo complejo z.

1-34. Si $w = u + iv$ (u, v reales), demostrar que

$$z^w = e^{u \log|z| - v \arg(z)} e^{i[v \log|z| + u \arg(z)]}.$$

1-35. a) Demostrar que $\operatorname{Log}(z^w) = w \operatorname{Log} z + 2\pi i n$, ($n$ entero).

b) Demostrar que $(z^w)^\alpha = z^{w\alpha} e^{2\pi i n \alpha}$, ($n$ entero).

1-36. a) Si θ y α son reales, $-\pi < \theta \leq +\pi$, demostrar que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^\alpha = \cos(\alpha\theta) + i \operatorname{sen}(\alpha\theta).$$

b) Demostrar que, en general, la restricción $-\pi < \theta \leq +\pi$ es necesaria en a) tomando $\theta = -\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

c) Si α es entero, demostrar que la fórmula en a) es válida sin restricción para θ. En tal caso se conoce por el teorema de Moivre.

1-37. Utilizando el teorema de Moivre (Ejercicio 1-36) deducir las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta,$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta,$$

válidas para θ real. ¿Son válidas cuando θ es complejo?

1-38. Definida $\operatorname{tg} z = (\operatorname{sen} z)/(\cos z)$, demostrar que para $z = x + iy$, tenemos

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

1-39. Sea w un número complejo dado. Si $w \neq \pm 1$, demostrar que existen dos valores de $z = x + iy$ que satisfacen las condiciones $\cos z = w$ y $-\pi < x \leq +\pi$. Calcular dichos valores cuando $w = i$ y cuando $w = 2$.

1-40. Demostrar la identidad de Lagrange para números complejos:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - \sum_{1\leq k<j\leq n} |a_k \bar{b}_j - a_j \bar{b}_k|^2.$$

Utilizando tal identidad deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz para números complejos.

REFERENCIAS CITADAS

1—1. BIRKHOFF, G. and MACLANE, S., *A Survey of Modern Algebra*. New York: Macmillan, 1941.

1—2. HARDY, G. H., *A Course of Pure Mathematics*. 9.ª ed. Cambridge: University Press, 1947.

1—3. KNOPP, K., *Theory and Application of Infinite Series*. R. C. Young, traductor. New York: Hafner, 1951.

1—4. LANDAU, E., *Foundations of Analysis*. F. Steinhardt, traductor. New York: Chelsea, 1951.

1—5. RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1953.

1—6. WILDER, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*. New York: Wiley, 1952.

2-10 Sucesiones. Entre los ejemplos importantes de funciones están las definidas en subconjuntos de números enteros.

2—12 DEFINICIÓN. *Entenderemos por sucesión finita de n términos una función F cuyo dominio es el conjunto de los números* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

El recorrido es entonces el conjunto $\{F(1), F(2), F(3), \ldots, F(n)\}$, ordinariamente escrito $\{F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n\}$. Los elementos del recorrido se llaman *términos* de la sucesión y, naturalmente, pueden ser objetos arbitrarios de naturaleza cualquiera.

2—13 DEFINICIÓN. *Entenderemos por sucesión indefinida una función F cuyo dominio es el conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots\}$ *de todos los números enteros positivos. El recorrido de F, esto es, el conjunto* $\{F(1), F(2), F(3), \ldots\}$, *también se escribe* $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$, *y el valor de la función* F_n *se llama el término n-ésimo de la sucesión.*

En ciertas ocasiones, utilizaremos por brevedad la notación $\{F_n\}$ para indicar la sucesión indefinida cuyo término n-ésimo es F_n.

Sean $s = \{s_n\}$ una sucesión indefinida y k una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo recorrido es un subconjunto de los enteros positivos. Tomemos k de modo que «sea ordenada», es decir, consideremos que

$$k(m) < k(n) \quad \text{si} \quad m < n.$$

Entonces la función compuesta sk está definida para todos los enteros n del recorrido de k y para todos esos n, tenemos

$$sk(n) = s_{k(n)}.$$

Una tal función compuesta sk se llama una *subsucesión* de s o *sucesión contenida* en s. También para abreviar, a menudo usamos la notación $\{s_{k(n)}\}$ o $\{s_{k_n}\}$ para expresar la sucesión contenida en $\{s_n\}$ cuyo término n-ésimo es $s_{k(n)}$.

EJEMPLO. Sean $s = \{1/n\}$ y k definida por $k(n) = 2^n$. En tal caso $sk = \{1/2^n\}$.

2-11 El número de elementos en un conjunto.

2—14 DEFINICIÓN. *Dos conjuntos A y B se llaman equivalentes, y escribimos* $A \sim B$, *cuando existe, y solamente entonces, una función uno a uno cuyo dominio es el conjunto A y cuyo recorrido es el conjunto B.*

También decimos que F establece una *correspondencia «uno a uno»* entre los conjuntos A y B. Evidentemente, todo conjunto A es equivalente a sí mismo (basta tomar F que sea la función «identidad» para la que $F(x) = x$,

a B. La proposición $A \subset B$ no descarta la posibilidad de que $B \subset A$. Efectivamente, tenemos simultáneamente $A \subset B$ y $B \subset A$, si A y B tienen los mismos elementos y solamente en este caso. Entonces llamamos iguales a los conjuntos A y B y escribimos $A = B$. Si A y B no son iguales, escribimos $A \neq B$. Si $A \subset B$ pero $A \neq B$, entonces decimos que A es un *subconjunto* de B *en sentido estricto*.

Conviene considerar la posibilidad de un conjunto que no contiene elemento alguno; tal conjunto se llama el *conjunto vacío* y convenimos en considerarlo como un subconjunto de cualquier conjunto. Puede ser útil al lector imaginarse un conjunto como una caja que contiene ciertos objetos, sus elementos. El conjunto vacío es una caja vacía.

2-3 Pares ordenados. Supongamos que se considera un conjunto de dos elementos a y b; esto es, el conjunto $\{a, b\}$. Según nuestra definición de igualdad este conjunto es idéntico al conjunto $\{b, a\}$, ya que la cuestión de orden no está involucrada. Sin embargo, es también necesario considerar conjuntos de dos elementos en los que es importante el orden. Por ejemplo, en Geometría analítica plana, las coordenadas (x, y) de un punto representan un *par ordenado* de números. El *punto* $(3, 4)$ es distinto del punto $(4, 3)$, en tanto que el *conjunto* $\{3, 4\}$ es el mismo que el $\{4, 3\}$. Cuando deseemos considerar un conjunto de dos elementos a y b como *ordenado*, incluiremos los elementos en un paréntesis: (a, b). Entonces, a es el primer elemento y b el segundo. Es posible dar una definición del concepto de par ordenado de objetos (a, b) como conjunto, de interés exclusivamente teórico. Tal definición es la siguiente:

2-1 DEFINICIÓN. $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Esta definición establece que (a, b) es un conjunto que contiene dos elementos, $\{a\}$ y $\{a, b\}$. Utilizando esta definición, podemos demostrar el teorema siguiente:

2-2 TEOREMA $(a, b) = (c, d)$ *si*, $a = c$ *y* $b = d$ *y únicamente en este caso.*

Este teorema prueba que la Definición 2-1 es una definición «aceptable» de par ordenado, en el sentido de que el objeto a se distingue del objeto b. La demostración del Teorema 2-2 será un ejercicio instructivo para el lector. (Ver Ejercicio 2-5.)

2-4 Producto cartesiano de dos conjuntos.

2—3 DEFINICIÓN. *Dados dos conjuntos A y B, el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$ se llaman producto cartesiano de A y B y se representa por $A \times B$.*

EJEMPLO. Si R representa el conjunto de los números reales, el producto $R \times R$ es el conjunto de los números complejos.

2-5 Relaciones y funciones en el plano. Designemos por x e y dos números reales, de manera que el par ordenado (x, y) puede considerarse como las coordenadas rectangulares de un punto en el plano xy (o un número complejo). Frecuentemente encontramos expresiones de la forma

a) $\quad xy = 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x < y.$

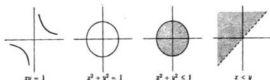


Fig. 2-1. Relaciones en el plano

Cada una de esas expresiones define un cierto conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales la expresión se satisface. Un tal conjunto de pares ordenados se llama *relación plana*. El correspondiente conjunto de puntos imagen en el plano xy se denomina la *gráfica* de la relación. Las gráficas de las relaciones dadas en (*a*) están dibujadas en la Figura 2-1.

Cada conjunto de pares ordenados (x, y) establece una relación plana. Algunos tipos especiales de relaciones son conocidas como *funciones*. Una función es una relación cuya gráfica tiene la propiedad de que cualquier paralela al eje OY la corta a lo sumo una vez. En otras palabras, siempre que dos puntos (x, y_1) y (x, y_2) de la gráfica tienen la misma coordenada x, entonces deben tener también la misma coordenada y; es decir debe ser $y_1 = y_2$. Así para cada punto (x, y) de la gráfica de una función, la coordenada x determina unívocamente la coordenada y. Por ejemplo, la relación definida por la ecuación $xy = 1$ es una función ya que para cada x existe una sola y tal que $xy = 1$; esto es $y = 1/x$. En cambio, la relación definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ *no* es una función puesto que en la gráfica existen puntos que tienen una misma coordenada x pero distintas coordenadas y. Un par de tales puntos son, por ejemplo, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Análogamente, los otros ejemplos antes citados no son funciones.

Si F es un conjunto de pares ordenados que constituyen una función, en lugar de escribir $(x, y) \in F$ para indicar que el par (x, y) pertenece al conjunto F, es frecuente escribir $y = F(x)$. Esta notación está en concordancia

con el hecho de que para cada par (x, y) de F, la y está determinada unívocamente por la x.

Si cada punto de la gráfica de una función F se proyecta verticalmente sobre el eje x, obtenemos sobre él un conjunto de puntos que llamamos el *dominio* de la función, expresado por $D(F)$. De la misma manera, proyectando la gráfica horizontalmente sobre el eje y obtenemos otro conjunto que denominamos el *recorrido* de la función y lo representamos por $R(F)$. Por ejemplo, consideremos la función F definida así:

$$F = \{(x, y) | y = x^3, \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y = \frac{3}{2}, \quad \text{si} \quad x = \frac{3}{2}, \quad y = 2, \quad \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3\}.$$

La gráfica de F está dibujada en la Figura 2-2. El dominio $D(F)$ está compuesto por el intervalo $-1 \leq x \leq +1$, el punto $x = \frac{3}{2}$, y el intervalo $2 \leq x \leq 3$. El recorrido $R(F)$ consta del intervalo $-1 \leq y \leq +1$, el punto $y = \frac{3}{2}$, y el punto $y = 2$.

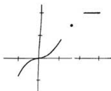


Fig. 2-2

2-6 Definición general de relación. Vamos ahora a introducir una definición de función muy general en la que las «variables» no tienen por qué ser números, sino que pueden ser objetos de cualquier naturaleza. Nuestra discusión irá guiada por el concepto antes expuesto, el de la noción de función en un plano. Tomamos como punto de partida la idea de par ordenado de objetos, que fue establecida en la Definición 2-1. Definamos ahora una *relación* de la manera siguiente:

2—4 DEFINICIÓN. *Entenderemos como relación un conjunto de pares ordenados. Si S es un conjunto de tales pares, y el par* $(a, b) \in S$, *decimos entonces «a está en la relación S respecto a b», y escribimos algunas veces aSb.*

Las fórmulas a) de la Sección 2-5 proporcionan ejemplos de relaciones en el plano. Ejemplos más generales son:

1. $S =$ al conjunto de pares ordenados de triángulos congruentes en un plano dado; esto es, S es un conjunto de pares (a, b) donde los símbolos a y b representan triángulos en un plano dado. El par $(a, b) \in S$ si, y únicamente si, los triángulos a y b son congruentes. (En Geometría es corriente escribir $a \cong b$ en lugar de aSb.)

2. $S =$ al conjunto de pares ordenados (a, b) de las personas tales que a es padre de b. Así pues aSb significa « a es padre de b ».

3. $S =$ al conjunto de pares ordenados (a, b) de las personas tales que a es hijo de b. Entonces aSb significa « a es un hijo de b ». [¿Cuál es la conexión entre esta relación y la del Ejemplo 2?].

Dada una relación S, podemos formar dos nuevos conjuntos, el *dominio* de la relación $D(S)$, y el *recorrido* $R(S)$:

2—5 DEFINICIÓN. *El dominio de la relación S está definido como el conjunto de todas las x para las cuales existe una y tal que* $(x, y) \in S$. *El recorrido de S es el conjunto de las y para las que existe una x tal que* $(x, y) \in S$.

2-7 Definición general de función.

2—6 DEFINICIÓN. *Una relación F se llama una función cuando*

$$(x, y) \in F \quad y \quad (x, z) \in F \quad \textit{implique} \quad y = z.$$

Una función es, pues, un conjunto de pares ordenados que tiene la propiedad especial de que siempre que dos pares (x, y) y (x, z) del conjunto tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo. Intuitivamente, una función puede ser imaginada como una tabla compuesta de dos columnas. Cada entrada en la tabla es un par de la forma (x, y), la columna de las x es el dominio y la de las y el recorrido. Si dos pares (x, y) y (x, z) aparecen en la tabla con el mismo valor de x, para que esa sea una función, es preciso que $y = z$. Así pues, para todo x en el dominio de la función F, existe un solo valor de y que corresponde a aquel de x ; es decir, una sola y tal que $(x, y) \in F$. Ya que esta y queda determinada unívocamente una vez fijado el valor de x, podemos introducir un símbolo para representarla. Escribimos $y = F(x)$ para indicar $(x, y) \in F$.

En lugar de la descripción de una función F mediante la presentación explícita de los pares que ella contiene, ordinariamente es preferible describir el dominio de F, y entonces, indicar el modo de obtener el valor $F(x)$ para cada x del dominio. El lector podría verificar que, efectivamente, lo expuesto caracteriza F. (Ver Ejercicio 2-3.)



Fig. 2-3. La aplicación definida por $F(z) = z^2$.

Cuando el dominio de F se compone de números reales, se dice que F es una función de variable real. Si el dominio de F es un conjunto de puntos en el plano (o un conjunto de números complejos), se dice que F es una función de dos variables reales (o una función de variable compleja). Si S es un subconjunto del dominio de F, decimos que F está definida en S. En este caso, el conjunto $F(x)$ para valores de x tales que $x \in S$, es la imagen de S originada por F y se representa por $F(S)$. Si $F(S) \subset T$, entonces se denomina *aplicación de S en T*. Si $F(S) = T$, se dice que es una *aplicación de S sobre T*. Una aplicación de S en sí misma se designa con el nombre de *transformación*.

Consideremos, por ejemplo, la función de una variable compleja definida mediante la ecuación $F(z) = z^2$. Esta función «aplica» todo sector S de la forma $0 \leq \arg(z) \leq \alpha \leq \pi/2$ del plano complejo z sobre un sector $F(S)$ descrito por las desigualdades $0 \leq \arg[F(z)] \leq 2\alpha$. (Ver Fig. 2-3.)

2-8 Funciones «uno a uno» e inversas.

2—7 DEFINICIÓN. *Sea F una función definida en S. Decimos que F es unívoca en S o simplemente que es una función «uno a uno» en S si, y únicamente cuando, para todo par x e y de S*

$$F(x) = F(y) \quad \textit{implica} \quad x = y.$$

Esto equivale a decir que una función que es uno a uno en S asigna valores distintos a elementos distintos de S. Tales funciones tienen importancia, como veremos, porque poseen *inversas*. No obstante, antes de establecer la definición de inversa de una función, conviene introducir una noción más general, la de *inversa de una relación*.

2—8 DEFINICIÓN. *Dada una relación S, la nueva relación $\breve{S}$ definida por*

$$\breve{S} = \{(a, b) | (b, a) \in S\}$$

se denomina la inversa de S.

Así un par ordenado (a, b) pertenece a $\breve{S}$ sólo y cuando el par (b, a), con los elementos invertidos, pertenece a S. Cuando la relación S, es una *relación plana*, esto significa simplemente que la gráfica de $\breve{S}$ es la reflexión de la gráfica de S con respecto a la recta $y = x$. En la relación definida por $x < y$, la relación inversa está definida por $y < x$. La inversa de «es padre de» es la relación «es hijo de».

2—9 DEFINICIÓN. *Supongamos que la relación F es una función. Consideremos la relación inversa $\breve{F}$, que puede o no ser una función. Si $\breve{F}$ es también una función, entonces $\breve{F}$ se llama función inversa de F y se expresa con la notación F^{-1}.*

La Figura 2-4 a) ilustra un ejemplo de una función F para la cual $\breve{F}$ no es una función. En la Figura 2-4 b) ambas relaciones $\breve{F}$ y F son funciones.

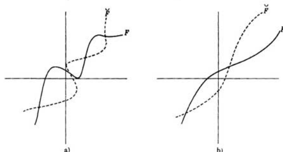


Figura 2-4.

El próximo teorema nos expresa que una función uno a uno en su dominio siempre tiene una inversa.

2—10 Teorema. *Si la función F es uno a uno en su dominio, también $\breve{F}$ es una función.*

Demostración. Para demostrar que $\breve{F}$ es una función, debemos probar que si $(x, y) \in \breve{F}$ y $(x, z) \in \breve{F}$, entonces $y = z$. Pero el hecho de que $(x, y) \in \breve{F}$ significa que $(y, x) \in F$; esto es, $x = F(y)$. Análogamente, $(x, z) \in \breve{F}$ significa que $x = F(z)$. Así pues $F(y) = F(z)$ y como hemos supuesto que F es uno a uno, esto implica $y = z$. Luego, $\breve{F}$ es una función.

2-9 Funciones compuestas.

2—11 Definición. *Dadas dos funciones F y G, tales que $R(F) \subset D(G)$, podemos formar una nueva función, la compuesta GF de F y G, definida de la manera siguiente: para todo x del dominio de F, es $GF(x) = G[F(x)]$.*

Ya que $R(F) \subset D(G)$, el elemento $F(x)$ pertenece al dominio de G, y, por lo tanto, tiene sentido considerar $G[F(x)]$. En general, no es legítimo que $GF = FG$. En efecto, FG puede carecer de sentido a menos que el recorrido de G esté contenido en el dominio de F. No obstante, la ley asociativa, $H(GF) = (HG)F$, se mantiene siempre que cada miembro de la ecuación tenga un significado. (La verificación será un ejercicio interesante para el lector. Ver Ejercicio 2-4.)

CAPÍTULO 2

NOCIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

2-1 Primeras ideas de la teoría de conjuntos. Desde que a fines del siglo XIX, la teoría de conjuntos fue desarrollada por G. CANTOR, no solamente ha tenido influencia en casi todas las ramas de la Matemática y las ha enriquecido, sino que también ha ayudado a clarificar las relaciones entre matemáticos y filósofos. No intentaremos tratar de la teoría de conjuntos de modo riguroso y exhaustivo, sino más bien nos limitaremos al estudio de algunas de las ideas más fundamentales que ella contiene. (El lector que desee profundizar más en esta cuestión puede consultar la bibliografía que en el final del capítulo se cita.)

Una colección de objetos considerada como una entidad única se llamará un *conjunto.* Los objetos de la colección se denominarán *elementos* o *miembros* del conjunto, y de ellos se dirá que *pertenecen al* conjunto o que *están contenidos* en él. El conjunto, a su vez *contendrá* aquellos objetos o *estará constituido* por ellos. Nos interesarán principalmente los conjuntos de objetos matemáticos; esto es, conjuntos de números, puntos, funciones, curvas, etc. Sin embargo, puesto que la mayor parte de la teoría de conjuntos no depende de la naturaleza particular de los objetos de la colección, simplificaremos los razonamientos considerando conjuntos cuyos elementos puedan ser de naturaleza cualquiera. A causa de esta cualidad de generalización es por lo que la teoría de conjuntos ha tenido tan fecunda aplicación en el posterior desarrollo de las matemáticas,

2-2 Notaciones. Ordinariamente designaremos los *conjuntos* con letras mayúsculas:

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ X,\ Y,\ Z;$$

y sus *elementos* con letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Escribimos $x \in S$ para indicar que « x es un elemento de S ». Si x no pertenece a S, escribimos $x \notin S$. Algunas veces designamos conjuntos poniendo los elementos entre corchetes; por ejemplo, el conjunto de los enteros positivos pares menores que 10 se expresa por $\{2, 4, 6, 8\}$.

A partir de un conjunto pueden formarse nuevos conjuntos, llamados *subconjuntos* del conjunto dado. Por ejemplo, el conjunto consistente en todos los enteros positivos menores que 10 y que sean divisibles por 4, es decir, $\{4, 8\}$, es un subconjunto del conjunto de los enteros positivos pares menores que 10. En general, decimos que un conjunto A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$ siempre que todos los elementos de A pertenecen también

si $x \in A$). Además, si $A \sim B$, también $B \sim A$, porque si F es una función uno a uno que hace A equivalente a B, la función inversa F^{-1} hará B equivalente a A. También, si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$. (La demostración se deja al lector. Ver Ejercicio 2-6.)

Un conjunto S se llama *finito* y se dice que contiene n elementos si

$$S \sim \{1, 2, ..., n\}.$$

El conjunto vacío también se considera finito. Los conjuntos que no son finitos se llaman *conjuntos infinitos*. La diferencia principal entre los dos tipos de conjuntos es que un conjunto infinito siempre es equivalente a alguno de sus subconjuntos distintos del conjunto dado, mientras que en un conjunto finito no es posible establecer una tal equivalencia. (Ver Ejercicio 2-7.) Es fácil ver, por ejemplo, que el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de todos los enteros positivos es equivalente al subconjunto $\{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ de las potencias de 2. La función uno a uno F que los hace equivalentes es la definida por $F(x) = 2^x$ para cada x de A.

2—15 Definición. *Si un conjunto A es equivalente al conjunto de todos los números enteros positivos o a algún subconjunto del mismo (finito o infinito), se dice que A es numerable. En caso contrario se dice que el conjunto es no numerable.*

Por tanto, a todo conjunto numerable A, corresponde una sucesión (finita o indefinida) $s = \{s_n\}$ de términos distintos, cuyos términos son los elementos de A. El conjunto A no es otra cosa que el recorrido de s.

2—16 Teorema. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Sean S el conjunto numerable dado y $A \subset S$. Si A es finito, no hay nada que demostrar, así pues podemos suponer que A es infinito (lo cual significa que S también lo es). Sea $s = \{s_n\}$ una sucesión indefinida de términos distintos tal que $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Definamos una función de los enteros positivos como sigue:

Sea $k(1)$ el menor entero positivo m tal que $s_m \in A$. Dando por supuesto que $k(1), k(2), \ldots, k(n-1)$ han sido definidos, sea $k(n)$ el menor entero positivo $m > k(n-1)$ tal que $s_m \in A$. Así pues k conserva el orden: $m > n$ implica $k(m) > k(n)$. Formemos la función compuesta sk. El dominio de sk es el conjunto de los enteros positivos y el recorrido de sk es A. Además, sk es uno a uno, ya que $sk(n) = sk(m)$ implica $s_{k(n)} = s_{k(m)}$, lo cual supone $k(n) = k(m)$, luego $n = m$. Lo que demuestra el teorema.

En lenguaje corriente, un conjunto numerable no puede tener más elementos que el conjunto de los números enteros. Sin embargo, existen conjuntos que no son numerables.

2—17 TEOREMA. *El conjunto de todos los números reales no es numerable.*

Demostración. Es suficiente demostrar que el conjunto de valores de x, que satisfacen la desigualdad $0 < x < 1$ no es numerable. Si los números reales de este intervalo fueran numerables, existiría una sucesión $s = \{s_n\}$ cuyos términos constituirían todo el intervalo. Demostraremos que esto es imposible construyendo, en el intervalo, un número real que no forma parte de aquella sucesión. Escribamos cada s_n como un número decimal:

$$s_n = 0,\, u_{n,1} u_{n,2} u_{n,3} \cdots,$$

en donde cada $u_{n,i}$ es $0, 1, 2, \ldots,$ ó 9. Consideremos el número real y que tiene por desarrollo decimal

$$y = 0,\, v_1 v_2 v_3 \cdots,$$

siendo

$$v_n = \begin{cases} 1, & \text{si } u_{n,n} \neq 1, \\ 2, & \text{si } u_{n,n} = 1. \end{cases}$$

Entonces, ningún término de la sucesión $\{s_n\}$ puede ser igual a y, ya que y difiere del s_1 en la primera cifra decimal, difiere del s_2 en la segunda cifra decimal, . . . , del s_n en la n-ésima cifra decimal. (Un caso análogo, al que se daría si fuera $s_n = 0{,}1999\ldots$ e $y = 0{,}20000\ldots$ no puede presentarse, debido a la elección hecha de las v_n). Puesto que $0 < y < 1$, el teorema está demostrado.

2—18 TEOREMA. *Designemos por P el conjunto de todos los enteros positivos y $P \times P$ sea el producto cartesiano de P por sí mismo. Entonces $P \times P$ es numerable.*

Demostración. Definamos una función f sobre $P \times P$ así:

$$f(m, n) = 2^m 3^n, \quad \text{si} \quad (m, n) \in P \times P.$$

Tal función f es uno a uno en $P \times P$ [¿Por qué?] y el recorrido de f es un subconjunto de P. Lo que demuestra el teorema.

2-12 Algebra de conjuntos. Dados dos conjuntos A_1 y A_2 definimos un nuevo conjunto, llamado *reunión* de A_1 y A_2, y expresado por $A_1 \cup A_2$, de la manera siguiente:

2—19 DEFINICIÓN. *La reunión $A_1 \cup A_2$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A_1 o a A_2 o a ambos.*

Esto equivale a decir que $A_1 \cup A_2$ consta de todos los elementos que pertenecen, por lo menos, a uno de los conjuntos A_1, A_2. Puesto que en esta definición no está involucrada la cuestión de orden, la reunión $A_1 \cup A_2$ es la

misma que $A_2 \cup A_1$; esto es, la reunión de conjuntos es conmutativa. Según la definición dada la reunión de conjuntos tiene la propiedad asociativa:

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3.$$

La definición de reunión puede ser extendida a cualquier colección finita o infinita de conjuntos:

2—20 Definición. *Si F es una colección arbitraria de conjuntos, la reunión de todos los conjuntos de F se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos de F, y se expresa por*

$$\bigcup_{A \in F} A.$$

Si F es una colección finita de conjuntos, $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, escribimos

$$\bigcup_{A \in F} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Si F es una colección numerable, $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$, escribimos

$$\bigcup_{A \in F} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots.$$

2—21 Definición. *Si F es una colección arbitraria de conjuntos, la intersección de todos los conjuntos de F se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de F, y lo expresamos por*

$$\bigcap_{A \in F} A.$$

La intersección de dos conjuntos A_1, y A_2 se indica por $A_1 \cap A_2$ y está constituida por todos los elementos comunes a ambos conjuntos. Si A_1 y A_2 no tienen elementos comunes, entonces $A_1 \cap A_2$ es el conjunto vacío y A_1 y A_2 se llaman *disjuntos*. Si F es una colección finita (como antes), escribimos

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

y si F es una colección numerable, ponemos

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots.$$

Si los conjuntos de la colección están desprovistos de elementos comunes, su intersección es el conjunto vacío. Nuestras definiciones de reunión e intersección se aplican, naturalmente, aun cuando F no sea numerable. Debido al método seguido en las definiciones de reunión e intersección, las leyes conmutativa y asociativa quedan automáticamente satisfechas.

2—22 DEFINICIÓN. *El complemento de A con respecto a B, que se escribe B-A, se define como el conjunto*

$$B - A = \{x | x \in B, \text{ pero } x \notin A\}.$$

Observemos que $B - (B - A) = A$ siempre que $A \subset B$. Asimismo $B - A = B$ si $B \cap A$ es vacío.

Las nociones de reunión, intersección y complemento están representadas en la Figura 2-5.

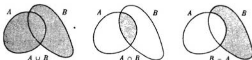


Fig. 2-5 Operaciones con conjuntos.

2—23 TEOREMA. *Sea F una colección de conjuntos. Para cualquier conjunto B, tenemos*

$$B - \bigcup_{A \in F} A = \bigcap_{A \in F} (B - A)$$

y

$$B - \bigcap_{A \in F} A = \bigcup_{A \in F} (B - A).$$

Demostración. Sean $S = \bigcup_{A \in F} A$ y $T = \bigcap_{A \in F} (B - A)$. Si $x \in B - S$, será $x \in B$, pero $x \notin S$. Por lo tanto, x no pertenece a conjunto alguno A de F. Luego, para todo A de F es $x \in B - A$. Pero esto implica que $x \in T$, o sea $B - S \subset T$. Invirtiendo el razonamiento, obtenemos $T \subset B - S$, y esto demuestra que $B - S = T$. Para demostrar la segunda proposición del enunciado, se utiliza un procedimiento análogo.

2—24 DEFINICIÓN. *Si F es una colección de conjuntos tales que un par cualquiera de ellos son disjuntos, se dice que F es una colección de conjuntos disjuntos.*

2—25 TEOREMA. *Si $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección numerable de conjuntos disjuntos, tales que cada A_n es numerable, la reunión $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ es también numerable.*

Demostración. Sean $A_n = \{a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Todo elemento x de S pertenece por lo menos a uno de los conjuntos de F y por tanto $x = a_{m,n}$, para algún par de enteros (m, n). El par (m, n) está determinado unívocamente por x, puesto que F es una colección de conjuntos disjuntos. Por tanto, la función f definida por $f(x) = (m, n)$ si $x = a_{m,n}$, $x \in S$, tiene como dominio S. El recorrido $f(S)$ es un subconjunto de $P \times P$ (representando P el conjunto de los números naturales) y por tanto numerable. Pero f es uno a uno luego $S \sim f(S)$, lo que demuestra que S es también numerable.

2—26 TEOREMA. *Sea $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$ una colección numerable de conjuntos. Consideremos $G = \{B_1, B_2, \ldots\}$, donde $B_1 = A_1$, y para $n > 1$,*

$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

En este caso G es una colección de conjuntos disjuntos, y se verifica

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Demostración. Cada conjunto B_n se ha construido de manera que no tiene elementos comunes con los conjuntos precedentes $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Luego G es una colección de conjuntos disjuntos. Sean $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Tenemos que demostrar que $A = B$. Ante todo, si $x \in A$, es $x \in A_k$ para algún valor de k. Si n es el menor de tales k, acontece que $x \in A_n$ pero $x \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, lo que indica que $x \in B_n$ y por tanto $x \in B$. En consecuencia $A \subset B$. Recíprocamente, si $x \in B$, entonces $x \in B_n$ para algún n, y por consiguiente $x \in A_n$ para este mismo n, y entonces $x \in A$, lo que demuestra $B \subset A$.

Utilizando los Teoremas 2-25 y 2-26, obtenemos inmediatamente

2—27 TEOREMA. *Si F es una colección numerable de conjuntos numerables, la reunión de todos los conjuntos de F es asimismo un conjunto numerable.*

EJEMPLOS.

1. El conjunto S de todos los números racionales es numerable.

Demostración. Indiquemos por A_n el conjunto de todos los números racionales positivos que tengan denominador n. El conjunto de todos los números

racionales positivos es igual a $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$. De aquí se sigue que S es numerable, ya que cada A_n es numerable.

2. El conjunto S de intervalos con extremos racionales es numerable.

Demostración. Designemos por $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de los números racionales y sea A_n el conjunto de todos los intervalos cuyo extremo izquierdo es x_n y cuyo extremos derecho es racional. Entonces A_n es numerable y $S = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Ejercicios

2-1 Sean S una relación y $D(S)$ su dominio. La relación S se dice que es

1) *reflexiva* si $a \in D(S)$ implica $(a, a) \in S$,
2) *simétrica* si $(a, b) \in S$ implica $(b, a) \in S$,
3) *transitiva* si $(a, b) \in S$ y $(b, c) \in S$ implica $(a, c) \in S$.

Una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva se llama una *relación de equivalencia*. Determinar cuales de estas propiedades posee S, si S es el conjunto de todos los pares de números reales (x, y) tales que

a) $x \leq y$, b) $x \nless y$, c) $x < |y|$,
d) $x^2 + y^2 = 1$, e) $x^2 + y^2 < 0$, f) $x^2 + x = y^2 + y$.

2-2 Las siguientes funciones F y G están definidas para todo x real mediante ecuaciones dadas. En cada uno de los casos, en los que pueda formarse la función compuesta GF, dar el dominio de GF y una fórmula (o fórmulas) que definan $GF(x)$.

a) $F(x) = 1 - x$, $G(x) = x^2 + 2x$.
b) $F(x) = x + 5$, $G(x) = |x|/x$, si $x \neq 0$, $G(0) = 1$.
c) $F(x) = 2x$, si $0 \leq x \leq 1$; $F(x) = 1$, para los demás valores de x.
$G(x) = x^2$, si $0 \leq x \leq 1$; $G(x) = 0$, para los demás valores de x.

Encontrar $F(x)$ si $G(x)$ y $GF(x)$ vienen dadas como sigue:

d) $G(x) = x^3$, $GF(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
e) $G(x) = 3 + x + x^2$, $GF(x) = x^2 - 3x + 5$.

2-3. Demostrar que dos funciones F y G son iguales si son válidas las dos condiciones siguientes:

a) F y G tienen el mismo dominio.
b) Para todo x en el dominio de F, $F(x) = G(x)$. y recíprocamente.

2-4. Dadas tres funciones F, G, H, ¿qué restricciones deben imponerse a sus dominios para que las cuatro funciones compuestas siguientes puedan ser definidas?

$$GF, \quad HG, \quad H(GF), \quad (HG)F$$

Aceptando que $H(GF)$ y $(HG)F$ puedan definirse, demostrar la ley asociativa:

$$H(GF) = (HG)F.$$

2-5. Probar el Teorema 2-2. [*Indicación*: $(a, b) = (c, d)$ significa $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Recurrir a la definición de igualdad de conjuntos].

2-6. Probar que si $A \sim B$ y $B \sim C$, es $A \sim C$.

2-7. Probar que un conjunto es finito si no contiene ningún subconjunto equivalente distinto del mismo, y recíprocamente.

2-8. Demostrar las siguientes identidades simbólicas para reunión e intersección de conjuntos:

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C).$
d) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$
e) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$
f) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C.$
g) $(A - B) \cup B = A$ si $B \subset A$, y recíprocamente.

2-9. Sean S un conjunto finito que consta de n elementos y T la colección de todos los subconjuntos de S. Demostrar que T es un conjunto finito y encontrar el número de sus elementos.

2-10. Designemos por R el conjunto de los números reales y por S el conjunto de todas las funciones reales cuyo dominio es R. Demostrar que S y R no son equivalentes. [*Indicación*: Suponer $S \sim R$ y que f sea una función uno a uno tal que $f(R) = S$. Si $a \in R$, entonces $g_a = f(a)$ es la función real que corresponde al número real a. A continuación definir h mediante la ecuación $h(x) = 1 + g_x(x)$ si $x \in R$, y demostrar que $h \notin S$].

2-11. Sea S la colección de todas las sucesiones cuyos términos son los enteros 0 y 1. Demostrar que S no es numerable.

2-12. Demostrar que los siguientes conjuntos son numerables: *a*) el conjunto de los círculos en el plano complejo que tienen radio racional y centros con las coordenadas racionales, *b*) cualquier colección de intervalos disjuntos de longitud positiva.

2-13. Sea f una función de variable real definida para todo x en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Supongamos que existe un número positivo M que tiene la propiedad siguiente: para cada elección de un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, la suma

$$|f(x_1) + \cdots + f(x_n)| \leq M.$$

Sea S el conjunto de todas las x en $0 \leq x \leq 1$ para las que $f(x) \neq 0$. Demostrar que S es numerable.

2-14. ¿Qué es falso en la siguiente «demostración» de que el conjunto de todos los intervalos de longitud positiva es numerable?

Designemos por $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto numerable de los números racionales y sea I cualquier intervalo de longitud positiva. Cada I contiene infinitos puntos racionales x_n, pero entre éstos habrá uno con el *menor índice* n. Definamos una función F mediante la ecuación $F(I) = n$, si x_n es el número racional con menor índice en el intervalo I. Esta función establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los intervalos y el subconjunto de los enteros positivos. Por tanto, el conjunto de todos los intervalos es numerable.

2-15. I) Definamos una *terna ordenada* (a, b, c) así:

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Demostrar que $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ si, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$; y recíprocamente.

II) Definido el producto cartesiano de tres conjuntos A, B, C como el conjunto

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}.$$

Demostrar que $A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

III) Establecer definiciones similares para sistemas ordenados de n elementos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y para productos cartesianos de n factores $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Referencias

2—1. Birkhoff, G. y MacLane, S., *A Survey of Modern Algebra*. New York: Macmillan, 1941.

2—2. Fraenkel, A., *Abstract Set Theory*. Amsterdam: North-Holland Pub., 1953.

2—3. Kamke, E., *Theory of Sets*. F. Bagemihl, traductor. New Tork: Dover, 1950.

2—4. Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*. New York Wiley, 1952.

CAPÍTULO 3

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS DE PUNTOS

3-1 Introducción. La mayor parte del capítulo anterior trata de conjuntos «abstractos», esto es, conjuntos de objetos cualesquiera prescindiendo de su naturaleza. En este capítulo consideramos conjuntos de números reales o de números complejos y estudiamos tales colecciones con más detalle.

En este estudio es conveniente y útil usar la terminología geométrica en muchas ocasiones. Así, hablaremos de conjuntos de puntos sobre el eje real o de puntos en el plano. Hacia el final del capítulo veremos cómo muchos de los conceptos introducidos pueden extenderse a tres o más dimensiones. Por brevedad, designaremos por E_1 el conjunto de todos los números reales y por E_2 el de todos los números complejos; E_1 también se llama *la recta real* y E_2 *el plano complejo.*

3-2 Intervalos y conjuntos abiertos en E_1. Los tipos más sencillos de conjuntos que se encuentran en la recta real son los intervalos. Es importante en algunas ocasiones distinguir entre intervalos que incluyen sus extremos e intervalos que no los incluyen.

3—1 DEFINICIÓN. *Consideremos $a < b$. El intervalo abierto (a, b) se define como el conjunto*

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

El intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto $\{x \mid a \leq x \leq b\}$. Los intervalos semi-abiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se definen de la misma manera, utilizando las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$, respectivamente. Los intervalos infinitos se definen como sigue:

$$(a, +\infty) = \{x|a < x\}, \qquad [a, +\infty) = \{x|a \leq x\},$$
$$(-\infty, a) = \{x|x < a\}, \qquad (-\infty, a] = \{x|x \leq a\}.$$

La recta real E_1 algunas veces se cita para representar el intervalo abierto $(-\infty, +\infty)$. Un solo punto también se considera como un intervalo cerrado «degenerado».

NOTA. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se usan aquí por conveniencia en la notación y no deben ser considerados como números reales. Más adelante ampliaremos el sistema de los números reales incluyendo estos dos símbolos, pero hasta entonces, el lector debería considerar que todos los números reales son «finitos» y que satisfacen la lista de axiomas del Capítulo 1.

Introducimos ahora las definiciones siguientes:

3—2 DEFINICIÓN. *Tomemos $h > 0$, y sea x un punto dado. El intervalo abierto $(x - h, x + h)$ se llama un entorno con x como centro y radio h. Indicaremos el entorno por $N(x; h)$, o simplemente por $N(x)$ si la consideración del radio no es indispensable.*

3—3 DEFINICIÓN. *Sea S un conjunto en E_1 y tomemos $x \in S$. Se dice que x es un punto interior de S si existe algún entorno $N(x)$ cuyos puntos pertenecen todos a S.*

3—4 DEFINICIÓN. *Sea S un conjunto en E_1. Se dice que S es un conjunto abierto si todo punto de S es interior a S.*

Así un conjunto abierto es tal que cada uno de sus puntos puede ser incluido en un entorno que está totalmente contenido en el conjunto. El tipo más sencillo de conjunto abierto es un intervalo abierto. El conjunto vacío es también abierto [¿Por qué?], como lo es la recta real E_1.

Los dos teoremas siguientes muestran cómo pueden construirse nuevos conjuntos abiertos a partir de conjuntos abiertos dados.

3—5 TEOREMA. *La reunión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea F una colección de conjuntos abiertos y designemos por S la reunión $S = \bigcup_{A \in F} A$. Supongamos $x \in S$. Entonces x debe pertenecer por lo menos a uno de los conjuntos de F, sea por ejemplo $x \in A$. Puesto que A es abierto, existe un entorno $N(x) \subset A$. Pero $A \subset S$, de modo que $N(x) \subset S$ y por tanto x es un punto interior de S. Esto significa que S es abierto.

3—6 TEOREMA. *La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

Demostración. Sea $S = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ donde cada A_k es abierto. Supongamos $x \in S$. (Si S es vacío, no hay nada que demostrar). Entonces $x \in A_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots n$ y por tanto existe un entorno $N(x; r_k) \subset A_k$. Si r es el menor de los números positivos $r_1, r_2, \ldots, r_n$, será $x \in N(x; r) \subset S$. Esto es, S es abierto.

Así vemos que a partir de conjuntos abiertos dados, se pueden construir nuevos conjuntos abiertos tomando reuniones cualesquiera o intersecciones finitas. Intersecciones arbitrarias, por el contrario, no siempre conducirán a conjuntos abiertos. Por ejemplo, la intersección de todos los intervalos abiertos de la forma $(-1/n, 1/n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es un conjunto que tiene un solo elemento, el 0.

La reunión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos es un conjunto abierto y, cosa sorprendente, todo conjunto abierto en la recta real puede obtenerse por ese procedimiento. La sección próxima está dedicada a demostrar tal afirmación.

3-3 Estructura de los conjuntos abiertos en E_1.

3—7 DEFINICIÓN. *Un conjunto de puntos en E_1 se llama acotado si es un subconjunto de algún intervalo finito*

3—8 DEFINICIÓN. *Sean S un conjunto abierto en E_1 y (a, b) un intervalo abierto que está contenido en S, pero cuyos extremos no pertenecen a S. En tal caso (a, b) se llama un intervalo componente de S.*

3—9 TEOREMA. *Sea S un conjunto abierto acotado. Se verifica:*
I) *Cada punto de S pertenece exclusivamente a un determinado intervalo componente de S.*
II) *Los intervalos componentes de S constituyen una colección numerable de conjuntos disjuntos cuya reunión es S.*

Demostración. Supongamos $x \in S$. Entonces x está contenido en algún intervalo abierto I enteramente constituido por puntos de S. Existen muchos intervalos I, pero el «mayor» de ellos será el intervalo componente deseado. Para demostrar que dicho mayor intervalo existe, procedemos así: Sea a el inf de los extremos izquierdos de todos los intervalos abiertos $I \subset S$ que contienen x, y b el sup de los extremos derechos de dichos intervalos. (Se utiliza aquí la acotación de S). De esta forma (a, b) contiene todos los intervalos abiertos $I \subset S$ que contienen x, y por tanto (a, b) contiene x. Además, por el método seguido en la construcción de (a, b), fácilmente se ve que $(a, b) \subset S$. [¿Por qué?]. El extremo b, sin embargo, no puede pertenecer a S, pues entonces para algún entorno $N(b)$ el intervalo $(a, b) \cup N(b)$ estaría contenido en S y contendría a x, lo que contradice la definición de b. Análogamente, el extremo $a \notin S$. Por consiguiente, (a, b) es un intervalo componente de S que contiene a x. Así pues, a cada x de S tenemos asociado por lo menos un intervalo componente I_x. Si dos de estos intervalos I_x e I_y tienen puntos interiores comunes, deben ser idénticos, ya que sus extremos no pertenecen a S. Esto prueba la parte I) del teorema.

La reunión de la totalidad de tales intervalos I_x es evidentemente S. Para demostrar II) es preciso probar que ellos forman una colección numerable. A tal fin designemos por $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ el conjunto numerable de los números racionales. En cada intervalo componente I_x existirá una infinidad de x_n, pero entre ellos habrá con certeza uno con *el menor índice n*. Definamos entonces una función F mediante la ecuación $F(I_x) = n$, si x_n es el número racional en I_x con el menor índice n. Esta función F es uno a uno puesto

que $F(I_x) = F(I_y) = n$ implica que I_x e I_y tengan común x_n y entonces $I_x = I_y$. Por consiguiente, F establece una correspondencia uno a uno entre los intervalos I_x y el subconjunto de los enteros positivos. Esto demuestra II). (Compárese esta parte de la demostración con el Ejercicio 2-14.)

NOTA. Se deduce del Teorema 3-9 que un intervalo abierto en E_1 no puede expresarse como la reunión de dos conjuntos abiertos disjuntos cuando ninguno de ellos es vacío. [¿Por qué?].

3—10 TEOREMA. *Todo conjunto abierto en E_1 es la reunión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos.*

Demostración. Sea S el conjunto abierto dado y designemos por J_n el intervalo $(-n, n)$. El conjunto $S_n = S \cap J_n$ es un conjunto abierto acotado y $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Puesto que cada S_n es la reunión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos, lo mismo le ocurre a S.

3-4 Puntos de acumulación y teorema de Bolzano-Weierstrass en E_1.

Uno de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos de puntos es la noción de punto de acumulación de un conjunto.

3—11 DEFINICIÓN. *Sea S un conjunto en E_1 y x un punto en E_1, no necesariamente contenido en S. Se dice entonces que x es un punto de acumulación de S, si todo entorno de x contiene por lo menos un punto de S distinto de x.*

3-12 TEOREMA. *Si x es un punto de acumulación de S, todo entorno $N(x)$ contiene una infinidad de puntos de S.*

Demostración. Supongamos lo contrario; esto es, que exista un entorno $N(x)$ que contenga tan sólo un número finito de puntos de S distintos de x, y sean estos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si r es el menor de los números positivos $|x - x_1|$, $|x - x_2|, \ldots, |x - x_n|$, entonces $N(x; r/2)$ será un entorno de x que no contendrá puntos de S distintos de x. Lo cual es una contradicción.

Este teorema implica, en particular, que no puede tener un punto de acumulación un conjunto que no tenga infinitos puntos. La recíproca, sin embargo, no es cierta. El conjunto de los números enteros $\{1, 2, 3, \ldots\}$ es un ejemplo de conjunto infinito desprovisto de puntos de acumulación. Pero si un conjunto infinito es *acotado*, debe tener un punto de acumulación. Este es un resultado muy importante en Análisis conocido como el *teorema de Bolzano-Weierstrass.*

3—13 TEOREMA. (*Bolzano-Weierstrass*). *Si un conjunto acotado S en E_1 contiene infinitos puntos, existe por lo menos un punto en E_1 que es de acumulación de S.*

Demostración. Supongamos S contenido en el intervalo finito $[a, b]$. Subdividamos $[a, b]$ en dos intervalos iguales. Por lo menos, uno de estos subintervalos contiene un subconjunto infinito de S. Designemos tal subintervalo por $[a_1, b_1]$. Análogamente, se obtiene un subintervalo $[a_2, b_2]$ que contiene un subconjunto infinito de S, y así sucesivamente. De esta manera se obtiene una colección numerable de intervalos, teniendo el n-ésimo intervalo una longitud $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Evidentemente el sup de los extremos izquierdos a_n y el inf de los extremos derechos b_n deben ser iguales, llamémosle x. [¿Por qué son iguales?] El punto x será de acumulación de S porque, si r es cualquier número positivo, el intervalo $[a_n, b_n]$ estará contenido en $N(x; r)$ en cuanto n sea lo bastante grande a fin de que $b_n - a_n < r/2$. El entorno $N(x; r)$ contiene un punto de S distinto de x y por tanto x es un punto de acumulación de S. Esto prueba el teorema. (Obsérvese que el punto de acumulación x puede o no pertenecer a S.)

EJEMPLOS. 1. El conjunto de números de la forma $1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, tiene el 0 como punto de acumulación.

2. El conjunto de los números racionales tiene todo número real como punto de acumulación.

3. Todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ es de acumulación del conjunto de los números del intervalo abierto (a, b).

3-5 Conjuntos cerrados en E_1.

3—14 DEFINICIÓN. *Un conjunto se llama cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Así pues un intervalo cerrado es un conjunto cerrado. Un intervalo abierto, sin embargo, no es un conjunto cerrado porque no contiene sus extremos que son puntos de acumulación del conjunto. Naturalmente, según la Definición 3-14 un conjunto que carece de puntos de acumulación es cerrado y, en particular, todo conjunto finito también lo es. El conjunto vacío es asimismo cerrado como lo es la recta real completa. (¡Estos dos últimos conjuntos son también abiertos!). Un conjunto que no es cerrado no es necesariamente abierto, como por ejemplo, el intervalo semi-abierto $(a, b]$, no es ni abierto ni cerrado.

El siguiente teorema expresa una relación entre conjuntos abiertos y cerrados.

3—15 TEOREMA. *Si S es abierto, el complemento $E_1 - S$ es cerrado. Recíprocamente, si S es cerrado, $E_1 - S$ es abierto.*

Demostración. Supongamos que S es abierto y sea x un punto de acumulación de $E_1 - S$. Si $x \notin E_1 - S$, $x \in S$ y, por tanto, para algún entorno es $N(x) \subset S$. Pero, siendo $N(x)$ un subconjunto de S, dicho entorno no puede

contener puntos de $E_1 - S$, en contradicción con el hecho de que x es un punto de acumulación de $E_1 - S$. Por consiguiente, $x \in E_1 - S$ y entonces $E_1 - S$ es cerrado.

Supongamos ahora que S es cerrado y que $x \in E_1 - S$. Entonces $x \notin S$ y por tanto x no puede ser punto de acumulación de S, ya que S es cerrado. Por lo tanto algún entorno $N(x)$ no tiene puntos de S y debe estar constituido exclusivamente por puntos de $E_1 - S$. Esto es, $N(x) \subset E_1 - S$ luego $E_1 - S$ debe ser por tanto abierto.

Como consecuencia de los Teoremas 3-15, 3-6 y 3-5, obtenemos

3—16 TEOREMA. *La reunión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.*

El Teorema 3-15 puede generalizarse así:

3—17 TEOREMA. *Si S es cerrado, el complemento de S (relativo a cualquier conjunto abierto que contenga a S) es abierto. Si S es abierto, el complemento de S (relativo a cualquier conjunto cerrado que contiene a S) es cerrado.*

Demostración. Supongamos $S \subset A$. Entonces $A - S = E_1 - [S \cup (E_1 - A)]$. (El lector debería verificar esta igualdad.) Si S es cerrado y A es abierto, entonces $E_1 - A$ es cerrado, $S \cup (E_1 - A)$ es cerrado, $A - S$ es abierto. Análogamente se demuestra el recíproco.

3-6 Generalizaciones a varias dimensiones. Gran parte de lo que llevamos dicho en este capítulo puede generalizarse al plano complejo. El punto de partida de la discusión en E_1 fue el concepto de entorno. Un entorno de un punto x_0 en E_1 fue definido como un intervalo abierto de la forma $(x_0 - h, x_0 + h)$. Sin embargo, tal intervalo puede también definirse mediante la desigualdad $|x - x_0| < h$. Si x y x_0 son números complejos, esta desigualdad tiene todavía sentido y, en efecto, representa el interior de un círculo con centro en x_0 y radio h. Tal círculo se llama un entorno bidimensional. Teniendo la noción de entorno, podemos definir conjuntos abiertos y cerrados y puntos de acumulación en E_2 exactamente como fueron definidos antes para E_1. Además, no hay motivo por el cual deban restringirse esas ideas a E_2, ya que no se requiere mayor esfuerzo para extenderlas a los espacios de tres o más dimensiones.

Recordemos que el «punto» en el espacio de dos dimensiones fué definido como un par ordenado de números reales (x_1, x_2). Del mismo modo en el espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales (x_1, x_2, x_3).

Es pues natural considerar un sistema ordenado de n números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y referirnos a él como a un punto en el espacio n-dimensional.

3—18 Definición. *Sea $n > 0$ un entero. Un conjunto de n números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama un punto n-dimensional o un vector con n componentes. Puntos y vectores se designarán mediante una sola letra en negrita: por ejemplo, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. El número x_k se llama la k-ésima coordenada del punto $\mathbf{x}$ o el k-ésimo componente del vector $\mathbf{x}$. El conjunto de todos los puntos n-dimensionales se llama espacio Euclídeo n-dimensional y se representa por E_n.*

Quizá el lector se pregunte si realmente hay ventaja en la discusión de los espacios de más de tres dimensiones. Efectivamente, el lenguaje del espacio n-dimensional hace más fácilmente comprensibles muchas cuestiones complicadas. El lector está probablemente bastante familiarizado con el análisis vectorial de tres dimensiones percatándose de la ventaja de escribir las ecuaciones del movimiento de un sistema que tiene tres grados de libertad como una sola ecuación vectorial mejor que como tres ecuaciones escalares. Parecida ventaja existe si el sistema tiene n grados de libertad. Los espacios de más dimensiones se presentan como cosa completamente natural en campos tales como la Relatividad y la Mecánica estadística y cuántica. Incluso espacios de infinitas dimensiones son corrientes en la Mecánica cuántica.

Definiremos ahora las operaciones algebraicas con puntos n-dimensionales.

3—19 Definición. *Consideremos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en E_n. Definimos:*

a) *Igualdad:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ si } x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n, \text{ y solamente en este caso.}$$

b) *Suma:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

c) *Multiplicación por escalares* (*escalar = un número real*):

$$a\mathbf{x} = (ax_1, \ldots, ax_n) \quad (a \text{ real}).$$

d) *Diferencia:*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{y}.$$

e) *Vector nulo u origen:*

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0).$$

f) *Vectores coordenados unidad:*

$$\mathbf{u}_k = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \ldots, \delta_{k,n}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

donde $\delta_{k,j}$ *es la «delta de Kronecker» definida por* $\delta_{k,j} = 0$, *si* $k \neq j$, $\delta_{k,k} = 1$.

NOTA. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, es también $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$ y esta representación es única en virtud de a).

La idea básica que realmente nos permitió generalizar el concepto de entorno de E_1 a E_2 fue la noción de valor absoluto. Esta puede ser ahora extendida a más dimensiones con tal de que sus propiedades fundamentales sean conservadas.

3—20 DEFINICIÓN. *Dados* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *en* E_n. *Definimos:*

a) *El valor absoluto, longitud o norma de* $\mathbf{x}$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

b) *La distancia entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Ahora es fácil establecer las propiedades esenciales del valor absoluto.

3—21 TEOREMA. *Designemos por* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *dos puntos en* E_n. *Tenemos*

a) $|\mathbf{x}| \geq 0$, *y* $|\mathbf{x}| = 0$ *si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *y únicamente en este caso.*
b) $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$.
c) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Demostración. Las proposiciones a) y b) son inmediatas según la definición. Para demostrar c) hacemos uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 1-5), que ahora puede escribirse así

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2.$$

Puesto que tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2) \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ &\leq |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2, \end{aligned}$$

la propiedad c) se deduce inmediatamente.

Con la noción de distancia, podemos definir ahora lo que se entiende por un entorno en E_n.

3—22 DEFINICIÓN. *Por esfera de radio $r > 0$ y centro en el punto $\mathbf{x}_0$ en E, entendemos el conjunto de todos los $\mathbf{x}$ en E_n tales que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r$. Los puntos $\mathbf{x}$ que satisfacen $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r$ forman una esfera cerrada, la frontera de tal esfera es el conjunto de $\mathbf{x}$ que verifican $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r$. Una esfera abierta con centro en $\mathbf{x}_0$ se llama un entorno de $\mathbf{x}_0$ y se representa por $N(\mathbf{x}_0)$ o por $N(\mathbf{x}_0; r)$, si r es el radio. La correspondiente esfera cerrada se designa por $\bar{N}(\mathbf{x}_0)$. La esfera cerrada, sin considerar su centro, se llama un entorno reducido de $\mathbf{x}_0$ y se designa por $N'(\mathbf{x}_0)$.*

Con esta generalización de la noción de entorno podemos definir conjuntos abiertos y cerrados en E_n en forma análoga a como se hizo en E_1. Debe precisarse, no obstante, que este método de definición de entornos es tan sólo una de las muchas definiciones posibles que podrían igualmente aceptarse. Por ejemplo, en lugar de utilizar círculos en E_2, esferas en E_3, y esferas n-dimensionales en E_n, podríamos usar rectángulos en E_2, paralelepípedos rectangulares en E_3 y paralelepípedos n-dimensionales en E_n. Estos pueden definirse como sigue:

3—23 DEFINICIÓN. *Sean $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ dos puntos distintos en E_n, tales que $a_k \leq b_k$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. El intervalo cerrado n-dimensional $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ se define como el conjunto*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(x_1, \ldots, x_n) | a_k \leq x_k \leq b_k, \ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Si $a_k < b_k$ para todo k, el intervalo abierto n-dimensional $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es el conjunto

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{(x_1, \ldots, x_n) | a_k < x_k < b_k, \ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Así, por ejemplo, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ puede considerarse como el «producto cartesiano»

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

de los n intervalos abiertos unidimensionales (a_k, b_k). Un intervalo abierto en E_n podría entonces ser considerado como un entorno de cualquiera de sus puntos, y, efectivamente, en los teoremas que siguen no se distingue si un entorno se considera como una «esfera» o como un «intervalo». Esto es debido a que cada esfera relativa a un punto $\mathbf{x}_0$ incluye un intervalo que contiene $\mathbf{x}_0$, y recíprocamente, cada intervalo que contiene $\mathbf{x}_0$ incluye una esfera relativa a $\mathbf{x}_0$. Sin embargo, en la discusión que sigue, usaremos entornos esféricos, de acuerdo con la Definición 3—22. En E_2, las esferas se llaman *discos* y los intervalos *rectángulos*. Si bien todas las definiciones y teoremas que siguen se establecen sin recurrir al razonamiento «intuitivo», el lector

deberá esforzarse en interpretar geométricamente las ideas siempre que sea posible. A menudo es útil ilustrar el significado de ciertos conceptos dibujando una figura en el plano.

3—24 DEFINICIÓN. *Sea S un conjunto de puntos en E_n y supongamos $\mathbf{x} \in S$. Se dice que $\mathbf{x}$ es un punto interior de S si existe un entorno $N(\mathbf{x}) \subset S$. El conjunto S se dice que es abierto si cada uno de sus puntos es un punto interior. El interior de S es la colección de sus puntos interiores.*

Ejemplos de conjuntos abiertos en el plano son: el interior de un disco; el primer cuadrante, esto es, el conjunto $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$; todo el espacio. Cualquier esfera abierta n-dimensional y cualquier intervalo abierto n-dimensional son conjuntos abiertos en E_n. (Ver Ejercicio 3-8). El lector debe tener en cuenta que un intervalo abierto (a, b) en E_1 ya no es un conjunto abierto si es considerado como un subconjunto del plano. Efectivamente, *ningún* subconjunto de E_1 (excepto el conjunto vacío) puede ser abierto en E_2, puesto que un tal conjunto no contienen entornos bidimensionales.

3—25 TEOREMA. *La reunión de una colección cualquiera de conjuntos abiertos en E_n es un conjunto abierto en E_n, y la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos en E_n es un conjunto abierto en E_n.*

Demostración. Las demostraciones son exactamente las mismas que las establecidas para el caso de una dimensión (Teoremas 3-5 y 3-6).

3—26 DEFINICIÓN. *Supongamos $S \subset E_n$, $\mathbf{x} \in E_n$. Se dice que $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de S si todo entorno $N(\mathbf{x})$ contiene por lo menos un punto de S distinto de $\mathbf{x}$; esto es, si $N'(\mathbf{x}) \cap S$ no es vacío.*

3—27 TEOREMA. *Supongamos $S \subset E_n$, $\mathbf{x} \in E_n$. Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de S, todo entorno $N(\mathbf{x})$ contiene una infinidad de puntos de S.*

Demostración. Idéntica a la del Teorema 3-12.

3—28 DEFINICIÓN. *Un conjunto S en E_n está acotado si existe alguna esfera que contenga a S; esto es, si para algún $r > 0$ tenemos $S \subset N(\mathbf{0}; r)$.*

3—29 TEOREMA. (*Bolzano-Weierstrass*). *Si un conjunto acotado S contiene una infinidad de puntos, existe por lo menos un punto en E_n que es punto de acumulación de S.*

Demostración. Puesto que S es acotado, podrá incluirse en alguna esfera n-dimensional $N(\mathbf{0}; a)$, $a > 0$, y por tanto en el interior del intervalo n-dimensional J_1 definido por las desigualdades

$$-a \leq x_k \leq a \qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

La demostración del teorema es una extensión de las ideas utilizadas al tratar del caso de una dimensión. (El lector puede encontrar de utilidad «ver» la demostración en el caso de E_2 recurriendo a la Fig 3-1). Escribamos J_1 simbólicamente como un producto cartesiano

$$J_1 = I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)};$$

esto es, como un conjunto de puntos $(x_1, \ldots, x_n)$, donde $x_k \in I_k^{(1)}$ y cada $I_k^{(1)}$ es un intervalo unidimensional $-a \leq x_k \leq a$. Cada intervalo $I_k^{(1)}$ puede descomponerse en dos subintervalos iguales $I_{k,1}^{(1)}$ e $I_{k,2}^{(1)}$ definidos mediante las desigualdades

$$I_{k,1}^{(1)}: \; -a \leq x_k \leq 0; \qquad I_{k,2}^{(1)}: \; 0 \leq x_k \leq a.$$

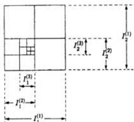


Fig. 3-1. Demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass en E_2.

Consideremos todos los productos cartesianos posibles de la forma

a) $$I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,k_n}^{(1)},$$

donde cada $k_i = 1$ ó 2. Pueden construirse exactamente 2^n productos de este tipo y, naturalmente, cada uno de tales productos es un intervalo n-dimensional. La reunión de estos 2^n intervalos es el intervalo original J_1, que contiene a S; y por tanto uno de los 2^n intervalos a) por lo menos debe contener infinitos puntos de S. Designémoslo por J_2, que puede expresarse también así

$$J_2 = I_1^{(2)} \times I_2^{(2)} \times \cdots \times I_n^{(2)},$$

donde cada $I_k^{(2)}$ es uno de los subintervalos de $I_k^{(1)}$ de longitud $a/2$. Podemos proceder ahora con J_2 como lo hicimos con J_1, bisecando cada intervalo $I_k^{(2)}$ y llegando a un intervalo n-dimensional J_3 que contiene un subconjunto infinito de S. Si continuamos este proceso, obtenemos una colección nume-

rable de intervalos n-dimensionales $J_1, J_2, J_3, \ldots$, en la que cualquiera de ellos tiene la propiedad de contener un subconjunto infinito de S. El m-ésimo término de la sucesión obtenido podemos expresarlo en la forma

$$J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}, \quad \text{donde } I_k^{(m)} \subset I_k^{(1)}.$$

Escribiendo

$$I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}],$$

tenemos

$$b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Para cada k fijo, el sup de todos los extremos izquierdos $a_k^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ debe pues coincidir con el inf de todos los extremos de la derecha $b_k^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, y su valor común lo designamos por t_k. Afirmamos ahora que el punto $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es de acumulación de S. Para probar esto, tomemos un cierto entorno $N(\mathbf{t}; r)$: El punto $\mathbf{t}$, naturalmente, pertenece a cada uno de los intervalos $J_1, J_2, \ldots$ antes construidos, y cuando m es tal que $a/2^{m-1} < r/2$, el entorno elegido incluirá J_m. Pero como J_m contiene infinitos puntos de S, lo mismo ocurrirá con $N(\mathbf{t}; r)$, lo que demuestra que $\mathbf{t}$ es realmente un punto de acumulación de S.

3–30 DEFINICIÓN. *Un conjunto S de E_n se llama cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.*

EJEMPLOS. Una esfera cerrada en E_n es un conjunto cerrado. Un intervalo cerrado n-dimensional es un conjunto cerrado. Un conjunto que es cerrado en E_1 también lo es en E_n para $n > 1$.

3–31 TEOREMA. *Un conjunto S en E_n es cerrado si $E_n - S$ es abierto, y recíprocamente.*

Demostración. Idéntica a la del Teorema 3-15.

3–32 TEOREMA. *La reunión de una colección finita de conjuntos cerrados en E_n es cerrada y la intersección de una colección cualquiera de conjuntos cerrados en E_n es cerrada.*

Demostración. Teoremas 3-25 y 3-31.

3-33 TEOREMA. *Supongamos $S \subset A \subset E_n$. Si A es abierto y S es cerrado, $A - S$ es abierto. Si A es cerrado y S es abierto, $A - S$ es cerrado.*

Demostración. $A - S = E_n - [S \cup (E_n - A)]$.

3-7 El teorema de recubrimiento de Heine-Borel. Nos proponemos en esta sección utilizar el teorema de Bolzano-Weierstrass para demostrar un resultado importante conocido con el nombre de *teorema de recubrimiento de Heine-Borel*. Empezamos por definir un *recubrimiento* de un conjunto.

3—34 DEFINICIÓN. *Una colección F de conjuntos se llama un recubrimiento de un conjunto dado S, si* $S \subset \bigcup_{A \in F} A$. *También se dice que la colección F recubre a S. Si F es una colección de conjuntos abiertos, F se llama un recubrimiento abierto de S.*

EJEMPLOS.

1. La colección de todos los intervalos de la forma $1/n < x < 2/n$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$) es un recubrimiento abierto del intervalo $0 < x < 1$. Este es un ejemplo de un recubrimiento numerable.

2. El eje real E_1 está recubierto por la colección de todos los intervalos abiertos (a, b). Este recubrimiento no es numerable. Sin embargo, contiene un recubrimiento numerable de E_1, es decir, todos los intervalos de la forma $(n, n + 2)$, donde n recorre los valores enteros.

3. Consideremos $S = \{(x, y)|x > 0,\ y > 0\}$. La colección F de todos los círculos con centros en (x, x) y radios x, $x > 0$, es un recubrimiento de S. Este recubrimiento no es numerable. No obstante, contiene un recubrimiento numerable de S, a saber, todos los círculos en los que x es racional. (Ver Ejercicio 3-14.)

Nuestro primer «teorema de recubrimiento» nos dice que todo recubrimiento abierto de un conjunto S en E_n contiene una subcolección numerable que también recubre S. Ante todo demostremos el resultado preliminar siguiente:

3—35 TEOREMA. *Designemos por* $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ *la colección numerable de entornos en* E_n *que tienen radios racionales y centros en puntos de coordenadas racionales. Supongamos que* $\mathbf{x} \in E_n$ *y sea S un conjunto abierto en* E_n *que contiene* $\mathbf{x}$. *Vamos a demostrar que por lo menos uno de los entornos de G contiene* $\mathbf{x}$ *y está contenido en S. Esto es, se verifica*

$$\mathbf{x} \in A_k \subset S \quad \textit{para algún } A_k \textit{ de } G.$$

Demostración. La colección G es numerable en virtud del Teorema 2-27. Si $\mathbf{x} \in E_n$ y S es un conjunto abierto que contiene $\mathbf{x}$, entonces existe algún entorno $N(\mathbf{x}\,;\,r) \subset S$. Encontraremos en S un punto $\mathbf{y}$ de coordenadas racionales que esté «próximo» a $\mathbf{x}$ y, utilizándolo como centro, se conseguirá un entorno en G que sea interior a $N(\mathbf{x}\,;\,r)$ y que contenga a $\mathbf{x}$. Escribiendo

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

encontramos un número racional y_k tal que $|y_k - x_k| < r/(4n)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| < \frac{r}{4}.$$

Por otra parte, encontrado un número racional q tal que $r/4 < q < r/2$, sucede que $\mathbf{x} \in N(\mathbf{y}; q)$ y $N(\mathbf{y}; q) \subset N(\mathbf{x}; r) \subset S$. Pero $N(\mathbf{y}; q) \in G$ y, por consiguiente, el teorema está demostrado. (Ver Fig. 3-2 para el caso E_2.)

3—36 TEOREMA. *Supongamos $A \subset E_n$ y que F sea un recubrimiento abierto de A. Existe entonces una subcolección numerable de F que también recubre A.*

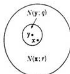


Fig. 3-2. Teorema 3-35 en E_2

Demostración. Designemos por $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ la colección numerable de todos los entornos en E_n que tienen centros y radios racionales. Este conjunto G se utilizará para extraer de F una subcolección numerable que recubra a A.

Supongamos $\mathbf{x} \in A$. Existe entonces un conjunto abierto S en F tal que $\mathbf{x} \in S$. Según el Teorema 3-35 existe un entorno A_k en G tal que $\mathbf{x} \in A_k \subset S$. Naturalmente, habrá una infinidad de tales A_k correspondientes a cada S, pero elegimos únicamente uno de ellos, por ejemplo, el de menor índice $m = m(\mathbf{x})$. Tenemos pues $\mathbf{x} \in A_{m(\mathbf{x})} \subset S$. El conjunto de todos los entornos $A_{m(\mathbf{x})}$ obtenidos al recorrer $\mathbf{x}$ todos los elementos de A es una colección numerable de conjuntos abiertos que recubre A. Para lograr de F una colección numerable que recubra A, hacemos corresponder a cada conjunto $A_{k(\mathbf{x})}$ uno de los conjuntos S de F que contenía $A_{k(\mathbf{x})}$. Lo que completa la demostración.

Es preciso anteponer otro resultado al teorema de Heine-Borel. Es aquí donde se utiliza el teorema de Bolzano-Weierstrass.

3—37 TEOREMA. *Sea $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ una colección de conjuntos no vacíos en E_n tales que*

I) $Q_{k+1} \subset Q_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

II) *Cada conjunto Q_k es cerrado y Q_1 es acotado.*

En tal caso la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ es cerrada y no vacía.

Demostración. Consideremos $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. El conjunto S es cerrado en virtud del Teorema 3-32. Para demostrar que S es no vacío, busquemos un

punto $\mathbf{x}$ de S. Podemos suponer que cada Q_k contiene infinitos puntos; de otro modo la demostración es trivial. Formemos ahora una colección de puntos distintos $A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ donde $\mathbf{x}_k \in Q_k$. Puesto que A es un conjunto infinito contenido en el conjunto acotado Q_1, tiene un punto de acumulación, tal como $\mathbf{x}$. Demostraremos que $\mathbf{x} \in S$ verificando que $\mathbf{x} \in Q_k$ para cada k. Bastará demostrar que $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de cada Q_k, ya que éstos son todos conjuntos cerrados. Pero todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene una infinidad de puntos de A, y ya que todos excepto (posiblemente) un número finito de puntos de A pertenecen a Q_k, tal entorno contiene también infinitos puntos de Q_k. Por consiguiente $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de Q_k y el teorema está demostrado.

El Teorema 3-36 establece que de cualquier recubrimiento abierto de un conjunto arbitrario A en E_n podemos extraer un recubrimiento numerable. El teorema de Heine-Borel nos dice, además, que si sabemos que A es *cerrado* y *acotado*, podemos reducir el recubrimiento a un recubrimiento *finito*.

3—38 TEOREMA (*Heine-Borel*). *Sea F un recubrimiento abierto de un conjunto cerrado y acotado A en E_n. Existe entonces una subcolección finita de F que también recubre A.*

Demostración. Una subcolección numerable de F, que llamamos $\{I_1, I_2, \dots\}$, recubre A en virtud del Teorema 3-36. Consideremos, para $m \geq 1$, la reunión finita

$$S_m = \bigcup_{k=1}^{m} I_k.$$

Esta es abierta, ya que es la reunión de conjuntos abiertos. Demostraremos que para algún valor de m la reunión S_m recubre A.

Para ello consideremos el complemento $E_n - S_m$ que es cerrado. Definamos una colección numerable de conjuntos $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ como sigue: $Q_1 = A$, y para $m > 1$, $Q_m = A \cap (E_n - S_m)$. Esto es, Q_m está constituido por todos los puntos de A que quedan al exterior de S_m. Si podemos demostrar que para algún valor de m el conjunto Q_m es vacío, entonces habremos demostrado que para dicho m ningún punto de A queda al exterior de S_m; en otros términos, habremos demostrado que algún S_m recubre A.

Observemos la siguiente propiedad de los conjuntos Q_m: Cada conjunto Q_m es cerrado, ya que es la intersección del conjunto cerrado A y del conjunto $E_n - S_m$ también cerrado. Los conjuntos Q_m siendo subconjuntos de A, están todos acotados. Por consiguiente, si ningún conjunto Q_m es vacío, podemos aplicar el Teorema 3-37 para llegar a la conclusión de que su intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ es también no vacío. Esto significa que existe algún punto en A

que pertenece a todos los conjuntos Q_m o, lo que es lo mismo, que es exterior a todos los conjuntos S_m. Pero esto es imposible, ya que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Por consiguiente algún Q_m debe ser vacío, lo que completa la demostración.

El Teorema de Heine-Borel será un instrumento de gran utilidad en muchos de los próximos capítulos. La idea básica contenida en el Teorema apareció en un artículo de E. HEINE (*Crelle's Journal*, **74**, 1872) en el cual demostró que toda función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua en el mismo. (Ver Teorema 4-24). En 1895 E. BOREL (*Ann. de l'Ecole Normal*, (3), **12**) estableció explícitamente y demostró el Teorema 3-38 para el caso de un intervalo cerrado en E_1 recubierto por un conjunto numerable de intervalos abiertos. LEBESGUE más tarde extendió el resultado y algunos autores citan el Teorema 3-38 como el teorema de Borel-Lebesgue. E. LINDELÖF demostró el Teorema 3-36 algo más tarde (*Comptes Rendus*, **137**, 1903). W. H. YOUNG (*Proc. London Math. Soc.*, **35**, 1902) había descubierto un resultado esencialmente equivalente al Teorema 3-36 (para E_1) antes de que apareciera el artículo de LINDELÖF, pero parece que fue explícitamente establecido primero por LINDELÖF y es corriente ahora citarlo como el teorema de recubrimiento de LINDELÖF.

3-8 Compacidad. Acabamos de ver que si un conjunto S en E_n es cerrado y acotado, cualquier recubrimiento de S puede ser reducido a un recubrimiento finito. Es natural preguntarse si podrían existir otros conjuntos distintos de los cerrados y acotados que también tuvieran esta propiedad. Tales conjuntos se llamarán *compactos*.

3—39 DEFINICIÓN. *Un conjunto S en E_n se llama compacto si, y solamente cuando, todo recubrimiento abierto de S contiene una subcolección finita que también recubre S.*

El teorema de Heine-Borel establece que todo conjunto cerrado y acotado en E_n es compacto. Demostramos ahora el recíproco.

3—40 TEOREMA. *Sea S un subconjunto de E_n. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

I) *S es compacto.*
II) *S es cerrado y acotado.*
III) *Todo subconjunto infinito de S tiene un punto de acumulación en S.*

Demostración. Como antes se indicó, II) implica I). Si demostramos que I) implica II), que II) implica III) y que III) implica II), quedará establecida la equivalencia de las tres afirmaciones.

Supongamos cierta I). Demostraremos primero que S es acotado. El conjunto de esferas $N(\mathbf{0}; k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, es un recubrimiento abierto de S. Por la compacidad también un subconjunto finito recubre S y por tanto S es acotado.

A continuación demostramos que S es cerrado. Supongamos que no lo sea. Existe entonces un punto de acumulación $\mathbf{y}$ de S tal que $\mathbf{y} \notin S$. Si $\mathbf{x} \in S$, sea $r_{\mathbf{x}} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/2$. Cada $r_{\mathbf{x}}$ es positivo ya que $\mathbf{y} \notin S$ y el conjunto $\{N(\mathbf{x}; r_{\mathbf{x}}) | \mathbf{x} \in S\}$ es un recubrimiento abierto de S. Por la compacidad, un número finito de esos entornos recubre S, sea $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} N(\mathbf{x}_k; r_k)$. Designemos por r el menor de los radios $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Es fácil entonces demostrar que el entorno $N(\mathbf{y}; r)$ no tiene puntos comunes con ninguno de los entornos $N(\mathbf{x}_k; r_k)$. En efecto, si $\mathbf{x} \in N(\mathbf{y}; r)$ será $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r \le r_k$ y la distancia desde $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_k$ es

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}_k + \mathbf{x} - \mathbf{y}| \ge |\mathbf{y} - \mathbf{x}_k| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 2r_k - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > r_k$$

de modo que $\mathbf{x} \notin N(\mathbf{x}_k; r_k)$. Por consiguiente $N(\mathbf{y}; r) \cap S$ es vacío, en contradicción con el hecho de ser $\mathbf{y}$ un punto de acumulación de S. Ello demuestra que S es cerrado y por lo tanto que I) implica II).

Supongamos cierta II). En este caso la demostración de III) es inmediata, ya que si T es un subconjunto infinito de S, será acotado (por serlo S) y en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, T poseerá un punto de acumulación, al que llamaremos $\mathbf{x}$. Pero $\mathbf{x}$ es también un punto de acumulación de S y por consiguiente $\mathbf{x} \in S$, ya que S es cerrado. Resulta pues que II) implica III).

Supongamos cierta III). Demostraremos II). Si S no es acotado, para todo $n > 0$ existe un punto $\mathbf{x}_n$ en S para el que $|\mathbf{x}_n| > n$. El conjunto $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ es un subconjunto infinito de S y por tanto, en virtud de III, T tiene un punto de acumulación $\mathbf{y}$ en S. Pero para $n > 1 + |\mathbf{y}|$ tenemos

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| \ge |\mathbf{x}_n| - |\mathbf{y}| > n - |\mathbf{y}| > 1,$$

lo que es absurdo ya que $\mathbf{y}$ es un punto de acumulación de T. Esto demuestra que S es acotado.

Para completar la demostración tenemos que probar que S es cerrado. Sea $\mathbf{x}$ un punto de acumulación de S. Puesto que todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene una infinidad de puntos de S, podemos considerar los entornos $N(\mathbf{x}; 1/k)$, $k = 1, 2, \ldots$, y obtener un conjunto numerable de puntos distintos, tal como $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$, contenido en S, de manera que $\mathbf{x}_k \in N(\mathbf{x}; 1/k)$. El punto $\mathbf{x}$ es, por consiguiente, un punto de acumulación de T. Puesto que T es un subconjunto infinito de S, la parte III) del teorema nos dice que T debe tener un punto de acumulación en S. El teorema quedará pues demostrado si probamos que $\mathbf{x}$ es el único punto de acumulación de T.

En efecto, sea $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Tenemos entonces

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \le |\mathbf{y} - \mathbf{x}_k| + |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| < |\mathbf{y} - \mathbf{x}_k| + 1/k, \quad \text{si} \quad \mathbf{x}_k \in T.$$

Si k_0 se toma suficientemente grande de manera que $1/k < \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ siempre que $k \ge k_0$, la última desigualdad conduce a la siguiente $\frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < |\mathbf{y} - \mathbf{x}_k|$. Esto demuestra que $\mathbf{x}_k \notin N(\mathbf{y}; r)$ cuando $k \ge k_0$, si $r = \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Por consiguiente, $\mathbf{y}$ no puede ser un punto de acumulación de T. Con lo que queda demostrado que III) implica II).

3-9 El infinito en el campo de los números reales. Agregamos ahora al campo real dos « puntos ideales », representados por los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ (« más infinito » y « menos infinito »).

3—41 DEFINICIÓN. *Entenderemos por sistema ampliado de los números reales E_1^* la reunión del conjunto de los números reales E_1 con los dos símbolos $+\infty$ y $-\infty$ que satisfacen las propiedades siguientes:*

I) *Si $x \in E_1$, se verifica*

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty,$$
$$x - (+\infty) = -\infty, \quad x - (-\infty) = +\infty,$$
$$x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0.$$

II) *Si $x > 0$,*

$$x(+\infty) = +\infty, \quad x(-\infty) = -\infty,$$

III) *Si $x < 0$,*

$$x(+\infty) = -\infty, \quad x(-\infty) = +\infty.$$

IV) $$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

V) *Si $x \in E_1$, siempre $-\infty < x < +\infty$.*

3—42 DEFINICIÓN. *Todo intervalo abierto $(a, +\infty)$ se llama un entorno de $+\infty$ y todo intervalo abierto $(-\infty, a)$ es un entorno de $-\infty$.*

NOTACIÓN. Representamos E_1 por $(-\infty, +\infty)$ y E_1^* por $[-\infty, +\infty]$.

La razón principal que nos lleva a introducir los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ es de conveniencia. Por ejemplo, si definimos $+\infty$ como el sup de cualquier conjunto en E_1^* que no está acotado superiormente, entonces *todo* conjunto en E_1^* tiene sup. El sup es finito si el conjunto está acotado superiormente y $+\infty$ si no lo está.

Advertencia: E_1^* no satisface todos los axiomas citados en el Capítulo I para el sistema de los números reales.

3-10 El infinito en el plano complejo. Agregaremos ahora al sistema de los números complejos un « punto ideal » representado por el símbolo ∞.

3—43 DEFINICIÓN. *Entenderemos por sistema ampliado de los números complejos E_2^* la reunión del plano complejo E_2 con el símbolo ∞ que satisface las siguientes propiedades:*

I) Si $z \in E_2$, *tenemos* $z + \infty = z - \infty = \infty$, $z/\infty = 0$.
II) *Si* $z \in E_2$, *pero* $z \neq 0$, *entonces* $z(\infty) = \infty$ y $z/0 = \infty$.
III) $\infty + \infty = (\infty)(\infty) = \infty$.

3–44 DEFINICIÓN. *Todo conjunto abierto en* E_2 *de la forma* $\{z \mid |z| > r \geq 0\}$ *se llama un entorno de* ∞.

El lector puede preguntarse por qué a E_1 se han adjuntado *dos* símbolos, $+\infty$ y $-\infty$, y en cambio *un* solo símbolo, ∞, se ha agregado a E_2. La contestación radica en el hecho de que existe una relación de ordenación $<$ entre los números reales, pero tal relación no se presenta en los números complejos. Precisamente, para que ciertas propiedades de los números reales que implican la relación $<$ sean válidas *sin excepción*, necesitamos dos símbolos, $+\infty$ y $-\infty$, como antes se han definido. Ya hemos mencionado, por ejemplo, que en E_1^* todo conjunto posee sup.

En E_2 resulta más conveniente que tengamos un solo punto ideal. A modo de ilustración, recordemos la proyección estereográfica que establece una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano complejo y todos los puntos sobre la superficie de la esfera distintos del Polo Norte. La aparente excepción en el Polo Norte puede ser eliminada considerándolo como la imagen geométrica del punto ideal ∞. Entonces conseguimos una correspondencia uno a uno entre el plano complejo ampliado E_2^* y la superficie total de la esfera. Es geométricamente evidente que si el Polo Sur se coloca en el origen del plano complejo, el exterior de un «amplio» círculo en el plano corresponderá, por proyección estereográfica, a un «pequeño» casquete esférico alrededor del Polo Norte. Esto ilustra con claridad por qué hemos definido un entorno de ∞ por una desigualdad de la forma $|z| > r$.

EJERCICIOS

Conjuntos abiertos y cerrados en E_1 *y* E_2.

3-1. Probar que un intervalo abierto en E_1 es un conjunto abierto y que un intervalo cerrado es un conjunto cerrado.

3-2. Determinar todos los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos en E_1 y decir si los conjuntos son abiertos o cerrados (o ni lo uno ni lo otro).

a) Todos los enteros.
b) El intervalo $(a, b]$.
c) Todos los números de la forma $1/n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
d) Todos los números racionales.
e) Todos los números de la forma $2^{-n} + 5^{-m}$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
f) Todos los números de la forma $(-1)^n + (1/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
g) Todos los números de la forma $(1/n) + (1/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
h) Todos los números de la forma $(-1)^n/[1 + (1/n)]$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

3-3. Lo mismo que en el Ejercicio 3-2 para los siguientes conjuntos en E_2.

a) Todos los complejos z tales que $|z| > 1$.
b) Todos los complejos z tales que $|z| \geq 1$.
c) Todos los números complejos de la forma $(1/n) + (i/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
d) Todos los puntos (x, y) tales que $x^2 - y^2 < 1$.
e) Todos los puntos (x, y) tales que $x > 0$.
f) Todos los puntos (x, y) tales que $x \geq 0$.

3-4. Demostrar que todo conjunto abierto no vacío S de E_1 contiene números racionales e irracionales.

3-5. Probar que los únicos conjuntos en E_1 que son ambos abiertos y cerrados son el conjunto vacío y el mismo E_1. ¿Se puede decir lo mismo en E_2?

3-6. Demostrar que todo conjunto cerrado en E_1 es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos.

3-7. Demostrar que un conjunto cerrado, no vacío, acotado S en E_1 es o bien un intervalo cerrado, o que puede obtenerse a partir de un intervalo cerrado suprimiendo una colección disjunta numerable de intervalos abiertos cuyos extremos pertenecen a S.

Conjuntos abiertos y cerrados en E_n.

3-8. Demostrar que las esferas abiertas n-dimensionales y los intervalos abiertos n-dimensionales son conjuntos abiertos en E_n.

3-9. Demostrar que el interior de un conjunto S en E_n es un conjunto abierto.

3-10. Si $\mathbf{x} \in S$ pero $\mathbf{x}$ no es punto de acumulación de S, se dice que $\mathbf{x}$ es un *punto aislado* de S. Demostrar que la colección de puntos aislados de S es numerable.

3-11. Un conjunto S en E_n se llama *convexo* si para todo $\mathbf{x}$ y todo $\mathbf{y}$ en S, y para cada θ real que satisface $0 < \theta < 1$, se verifica $\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y} \in S$. Interpretar este resultado geométricamente (en E_2 y E_3) y demostrar que las esferas cerradas y las abiertas en E_n son convexas.

3-12. Si S es un conjunto en E_n, designemos por S' el conjunto de puntos de acumulación de S, y consideremos $\bar{S} = S \cup S'$. (El conjunto S' se denomina *conjunto derivado* de S, y $\bar{S}$ se llama la *adherencia* de S.) Demostrar que:

a) S' es un conjunto cerrado, esto es, $(S')' \subset S'$.
b) Si $S \subset T$, entonces $S' \subset T'$.
c) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.
d) $(\bar{S})' = S'$.
e) $\bar{S}$ es un conjunto cerrado.
f) S es cerrado si $S = \bar{S}$ y recíprocamente.

3-13. Demostrar que el conjunto S de los números racionales del intervalo $(0, 1)$ no puede expresarse como intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos. [*Indicación:* Escribir $S = \{x_1, x_2, \cdots\}$, suponer que $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ siendo cada S_k abierto, construir una sucesión $\{Q_n\}$ de intervalos cerrados tales que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset S_n$ y que $x_n \notin Q_n$. Utilizando el Teorema 3-37 se llega a una contradicción.]

Teoremas de recubrimiento.

3-14. Demostrar que el conjunto de los círculos en el plano xy con centro en el punto (x, x) y radio $x > 0$, x racional, es un recubrimiento numerable del conjunto

$$\{(x, y) | x > 0, y > 0\}.$$

3-15. La colección F de intervalos de la forma

$$\frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

es un recubrimiento abierto del intervalo $0 < x < 1$. Demostrar (sin hacer uso del Teorema 3-40) que ninguna subcolección finita de F recubre el intervalo $0 < x < 1$.

3-16. Dar un ejemplo de un conjunto S que sea cerrado pero no acotado y presente un recubrimiento abierto numerable F tal que ningún subconjunto de F recubra S.

3-17. Dado un conjunto S en E_n con la propiedad de que para todo $\mathbf{x}$ en S exista un entorno $N(\mathbf{x})$ tal que $N(\mathbf{x}) \cap S$ sea numerable. Demostrar que S es numerable.

3-18. Demostrar que una colección de conjuntos abiertos disjuntos en E_n es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de una colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

3-19. Supongamos que $S \subset E_n$. Un punto $\mathbf{x}$ de E_n se llama *punto de condensación* de S si todo entorno $N(\mathbf{x})$ tiene la propiedad que $N(\mathbf{x}) \cap S$ no es numerable. Demostrar que si S no es numerable, existe un punto $\mathbf{x}$ en S que es un punto de condensación de S.

3-20. Supongamos que $S \subset E_n$ y que S no sea numerable. Designemos por T el conjunto de los puntos de condensación de S. Demostrar que

a) $S - T$ es numerable,
b) $S \cap T$ es no numerable
c) T es un conjunto cerrado,
d) T no contiene puntos aislados.

Observemos que el Ejercicio 3-19 es un caso especial de b).

3-21. Un conjunto S en E_n se llama *perfecto* si $S = S'$, esto es, si S es un conjunto cerrado que no contiene puntos aislados. Demostrar que si F es un conjunto cerrado no numerable en E_n, entonces puede ser expresado en la forma $F = A \cup B$, donde A es un conjunto perfecto y B es un conjunto numerable. (Teorema de Cantor-Bendixon). [*Indicación*: Utilizar el Ejercicio 3-20.]

Referencias citadas

3—1. Burkill, J. C., *The Lebesgue Integral*. Cambridge: University Press, 1951.
3—2. Newman, M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. 2.ª ed. Cambridge: University Press, 1951.
3—3. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1953.

CAPITULO 4

LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD

4-1 Definición de límite. Suponemos al lector ya familiarizado con la noción de límite tal como es introducida en el cálculo elemental, donde, es corriente presentar varios tipos de límites. Por ejemplo, tenemos la idea del *límite de una sucesión*, que explica lo que simbólicamente escribimos en la forma

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A.$$

También conocemos el *límite de una función*, indicado mediante la notación

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Los *límites bidimensionales*, introducidos para funciones de dos variables, ordinariamente se expresan en la forma

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A,$$

o por expresiones similares. Cada uno de estos conceptos de límite viene dado por su definición particular y lleva asociado un grupo de teoremas propios. No obstante, la misma idea fundamental existe en todos estos límites y si analizamos cuidadosamente las diversas definiciones, podemos formular un concepto general de límite que incluirá a todos los precedentes como casos particulares.

Empecemos con la ecuación $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, que implica la idea de que cuando x es suficientemente próximo a x_0, $f(x)$ se aproximará a A tanto como se quiera. Las expresiones «x es suficientemente próximo a x_0» y «$f(x)$ se aproximará a A tanto como se quiera» son precisadas matemáticamente por la definición siguiente.

4—1 Definición. *El simbolismo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

significa que para todo número $\varepsilon > 0$, *existe otro número* $\delta > 0$ *tal que siempre que* $0 < |x - x_0| < \delta$, *es* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

En el caso de las sucesiones, $\lim_{n \to \infty} x_n = A$ significa, intuitivamente, que los términos x_n, de nuestra sucesión llegan a ser tan próximos a A como se quiera, con sólo tomar n suficientemente grande. Una definición más rigurosa toma la forma :

4—2 DEFINICIÓN. *Escribimos*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A$$

para significar que para todo $\varepsilon > 0$, *existe un entero N tal que siempre que* $n > N$, *es* $|x_n - A| < \varepsilon$.

Examinemos estas definiciones más cuidadosamente para ver lo que tienen en común. Ambas empiezan: « Para todo $\varepsilon > 0$ » y terminan con un cierto valor absoluto $< \varepsilon$. La Definición 4-1 se refiere a una función f, y la Definición 4-2 a una sucesión $\{x_n\}$. Sin embargo, una sucesión es también una función, cuyo dominio de definición es el conjunto de los enteros $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Esto es lo que tienen en común las dos definiciones. La diferencia esencial parece ser que la primera implica un número δ que mide la « proximidad » de x a x_0, y la segunda hace mención de N que mide el « tamaño » de n. No obstante, si utilizamos la terminología de entornos, vemos que ambas definiciones en realidad implican el mismo principio. Decir que $0 < |x - x_0| < \delta$ significa que x pertenece a un entorno de x_0, pero $x \neq x_0$. Esto es, x está en un entorno reducido $N'(x_0)$. También, decir que $n > N$ equivale a decir que n pertenece a un entorno reducido de $+\infty$. Finalmente, las partes de esas dos definiciones relativas al número ε pueden también expresarse en la terminología de entornos. Por ejemplo, la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$ establece que $f(x) \in N(A\,;\,\varepsilon)$ y, análogamente, $|x_n - A| < \varepsilon$ significa que $x_n \in N(A\,;\,\epsilon)$. Por consiguiente, el principio básico contenido en ambas definiciones de límite es que para todo entorno $N(A)$ debe existir un entorno $N(x_0)$ tal que $x \in N'(x_0)$ implica $f(x) \in N(A)$. Este principio será formalmente expresado en la Definición 4-3, pero antes deseamos hacer algunas consideraciones relativas a la notación y a la terminología que utilizaremos en este y en posteriores capítulos.

Si f es una función real definida en un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ de E_m, utilizamos $f(x_1, \ldots, x_m)$ o bien $f(\mathbf{x})$ para designar el valor de f en dicho punto. Una tal función se denomina algunas veces una función de m « variables » reales $x_1, \ldots, x_m$ y otras una función de *una* « variable » m-dimensional $\mathbf{x}$. Si tenemos varias funciones reales, $f_1, \ldots, f_k$, definidas en un mismo subconjunto S de E_m, es muy conveniente introducir una *función vectorial* $\mathbf{f}$, definida por la igualdad.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})), \quad \text{si } \mathbf{x} \in S.$$

Cada valor $f(\mathbf{x})$ es pues un vector en E_k. Las funciones reales $f_1, \ldots, f_k$ son consideradas como los componentes de $\mathbf{f}$, y escribimos $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ para indicar esta relación. Las funciones vectoriales serán representadas corrientemente mediante tipos en negrita.

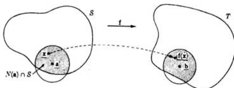


Fig. 4-1. Definición de límite

Nuestra definición de límite (Fig. 4-1) toma ahora la siguiente forma :

4—3 DEFINICIÓN. *Sean* $\mathbf{f}$ *una función definida en un conjunto* S *de* E_m *y su recorrido un subconjunto* T *de* E_k. *Si* $\mathbf{a}$ *es un punto de acumulación de* S *y* $\mathbf{b} \in E_k$, *el simbolismo*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

significa lo siguiente: Para todo entorno $N(\mathbf{b}) \subset E_k$, *existe un entorno* $N(\mathbf{a}) \subset E_m$ *tal que*

$$\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a}) \cap S \quad \text{implica} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in N(\mathbf{b})$$

NOTA. Escribimos $\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a}) \cap S$ en lugar de $\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a})$ para asegurar que $\mathbf{x}$ pertenezca al dominio de $\mathbf{f}$. Asimismo, exigimos que $\mathbf{a}$ sea un punto de acumulación de S para tener la seguridad de que la intersección $N'(\mathbf{a}) \cap S$ no sea nunca el conjunto vacío.

El simbolismo $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ se lee : «el límite de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, cuando $\mathbf{x}$ tiende hacia $\mathbf{a}$, es $\mathbf{b}$» o bien, «$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se aproxima a $\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ se aproxima a $\mathbf{a}$». Algunas veces indicamos esto escribiendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$. Observemos que la definición tiene sentido aun cuando $\mathbf{a} = +\infty$ o $\mathbf{a} = -\infty$ (cuando $S \subset E_1$), e incluso si $\mathbf{a} = \infty$ (cuando $S \subset E_2$). También tiene sentido si $\mathbf{b} = \pm\infty$ (cuando $\mathbf{f}$ es una función real), o si $\mathbf{b} = \infty$ (cuando $\mathbf{f}$ es compleja). En el caso en que $\mathbf{f}$ es una sucesión cuyo término n-ésimo es $\mathbf{x}_n$, es costumbre escribir $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ en lugar de $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(x)$.

También se usa la expresión «$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existe». Esto significa que hay un punto $\mathbf{b}$ (en el espacio que se considere) tal que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Cuando usamos esta terminología para funciones reales o complejas, se entenderá que $\mathbf{b}$ es un punto «finito». Si el límite es «infinito» escribiremos explícitamente $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$ (o $-\infty$, o bien ∞, según los casos).

NOTA. Si el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existe (finito o infinito), su valor esta determinado unívocamente. [¿Por qué?]

Precisando más, debemos hacer notar de alguna manera el hecho de que el límite que acabamos de definir depende del conjunto S en el cual $\mathbf{x}$ puede variar. Esto, por lo general, resulta claro por el contexto, pero si es preciso, escribiremos

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in S}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

para poner de manifiesto este hecho más explícitamente. Un caso particular importante se presenta cuando S es un intervalo en E_1 que tiene $\mathbf{a}$ como extremo derecho. Entonces escribimos

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in S}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

y $\mathbf{b}$ se llama el límite en $\mathbf{a}$ por la izquierda. El límite por la derecha, se expresa por $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}-} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y se define análogamente cuando S es un intervalo en E_1 que tiene $\mathbf{a}$ como extremo izquierdo.

4-2 Algunos teoremas fundamentales sobre límites.

4—4 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{a}$ *un punto de acumulación de un conjunto* S *en* E_m *Existe entonces una sucesión* $\{\mathbf{x}_n\}$ *cuyos términos son puntos de* S *distintos entre sí, tal que* $\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n = \mathbf{a}$.

Demostración. Existe un punto $\mathbf{x}_1$ de S, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{a}$, en el entorno $N(\mathbf{a}\,;\, r_1)$ de radio $r_1 = 1$ y con centro en $\mathbf{a}$. Consideremos ahora el entorno $N(\mathbf{a}\,;\, r_2)$ de radio $r_2 = |\mathbf{a} - \mathbf{x}_1|/2$. Existe en este entorno un punto $\mathbf{x}_2$ de S distinto de $\mathbf{x}_1$ y de $\mathbf{a}$. De la misma manera, en el entorno $N(\mathbf{a}\,;\, r_3)$, de radio $r_3 = |\mathbf{a} - \mathbf{x}_2|/2$, existe un punto $\mathbf{x}_3$ de S distinto de $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{a}$. Reiterando este proceso obtenemos los puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$, y llegamos a la existencia de un punto $\mathbf{x}_n$ de S en el entorno $N(\mathbf{a}\,;\, r_n)$ de radio $r_n = |\mathbf{a} - \mathbf{x}_{n-1}|/2 < 2^{-n+1}$ tal que $\mathbf{x}_n$ es distinto de los $\mathbf{x}_k$ anteriores. La sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ así construida satisface las condiciones de teorema.

NOTA. Supongamos una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ que tenga un límite: $\mathbf{a} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n$, y designemos con $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ el recorrido de la sucesión. Si S es infinito, se sigue inmediatamente de la definición de límite, que $\mathbf{a}$ es un punto de acumulación de S. El Teorema 4-4 nos dice que S no puede tener otros puntos de acumulación. Por consiguiente, una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ cuyo recorrido S es infinito tiene un límite únicamente en el caso en que S tenga un único punto de acumulación, entonces dicho punto de acumulación es el límite de la sucesión.

4—5 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f}$ *una función definida en un conjunto* S *de* E_m *con sus valores en* E_k, *y sea* $\mathbf{a}$ *un punto de acumulación de* S. *Consideremos una sucesión* $\{\mathbf{x}_n\}$ *cuyos términos son puntos de* S, *tal que cada término* $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{a}$ *pero que*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}.$$

Se verifica entonces:

I) *Si* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$

II) *Recíprocamente, si para cualquier sucesión* $\{\mathbf{x}_n\}$ *sabemos que el* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ *existe, todas esas sucesiones tienen el mismo límite (llamémosle* $\mathbf{y}$*) y existe también* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *que coincide con* $\mathbf{y}$.

Demostración. I) Para todo entorno $N(\mathbf{b})$ en E_k, existe un entorno $N(\mathbf{a})$ en E_m tal que $\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a}) \cap S$ implica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in N(\mathbf{b})$. Pero para el entorno $N(\mathbf{a})$, existe un entero M tal que $n > M$ implica $\mathbf{x}_n \in N'(\mathbf{a})$. De estas dos conclusiones resulta que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$.

II) Sean $\{\mathbf{p}_n\}$ y $\{\mathbf{q}_n\}$ dos sucesiones tales que $\mathbf{p}_n \neq \mathbf{a}$, $\mathbf{q}_n \neq \mathbf{a}$ para cada n, y que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{q}_n = \mathbf{a}$. Sean $\mathbf{p} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{p}_n)$ y $\mathbf{q} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{q}_n)$. Es fácil demostrar que $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. En efecto, si $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ consideremos la nueva sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ definida por:

$$\mathbf{x}_n = \begin{cases} \mathbf{p}_n, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbf{q}_n, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$ y por tanto el $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ existe. Pero esto es imposible, ya que los términos de $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\}$ llegan a ser tan próximos a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ como se quiera. Luego $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Llamemos $\mathbf{y}$ a su valor común. Demostraremos en lo que sigue que el $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existe y coincide con $\mathbf{y}$. Si no fuera así, existiría por lo menos un entorno $N(\mathbf{y})$ tal que todo entorno $N'(\mathbf{a}; r)$ contendría algún $\mathbf{x}$ de S para el cual $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \notin N(\mathbf{y})$. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, sea $\mathbf{x}_n$ un punto en $N'(\mathbf{a}; 1/n) \cap S$ para el cual $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \notin N(\mathbf{y})$. Esto define una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ para la que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{a}$. Pero para esta sucesión no es cierto que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}$, contradiciendo lo probado antes. Por consiguiente $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, con lo que el teorema queda demostrado.

4-3 La condición de Cauchy. En la definición de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, se supuso que el valor $\mathbf{b}$ era conocido. El siguiente teorema nos proporciona una condición (llamada *condición de Cauchy*) que nos permite determinar si tal punto $\mathbf{b}$ existe, sin conocer de antemano su valor.

Primeramente demostramos tal teorema para sucesiones y utilizamos luego el resultado para obtener un criterio análogo para funciones más generales. En efecto, la condición de Cauchy establece que si los términos de una sucesión se van aproximando a *algo*, se aproximan entonces unos a otros. Lo recíproco también es cierto.

4–6 Teorema (*Condición de Cauchy para sucesiones*). *Sea* $\{\mathbf{x}_n\}$ *una sucesión cuyos términos son puntos de* E_k. *La condición necesaria y suficiente para que la sucesión tenga un límite* $\mathbf{y}$; $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{y}$, *donde* $\mathbf{y}$ *es un punto*

de E_k, es que para todo $\varepsilon > 0$ exista un entero N tal que cualesquiera que sean $n > N$ y $m > N$, se verifique $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m| < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos primero que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{y}$. En tal caso, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $n > N$ implica $|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| < \varepsilon/2$. Pero tenemos

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m| = |(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}_m)| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}_m|,$$

así pues, si n y m son ambos $> N$, se deduce que $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m| < \varepsilon$.

Para demostrar el recíproco, supongamos que se verifica la condición de Cauchy. Consideremos $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$. Si S es finito, todos los términos $\mathbf{x}_n$ salvo un número finito de ellos deben ser iguales y entonces existirá y coincidirá con este valor común el $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$. Si S es infinito, la condición de Cauchy implica la acotación de S.

En efecto, si tomamos $\varepsilon = 1$, existe un entero N_1 tal que para todo $n > N_1$ es $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{N_1}| < 1$. Esto significa que todos los puntos $\mathbf{x}_n$ con índice $n > N_1$ permanecen en el interior de una esfera de radio 1 y $\mathbf{x}_{N_1}$ como centro. Si M representa el mayor de los números $|\mathbf{x}_1|, \dots, |\mathbf{x}_{N_1}|$, entonces S queda interior a una esfera de radio $M + 1$, y centro en el origen. Según el teorema de Bolzano-Weierstrass, el conjunto S debe tener un punto de acumulación, sea éste $\mathbf{y}$. Debido a la condición de Cauchy, S no puede poseer más que un punto de acumulación. Luego $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{y}$ como queríamos demostrar.

4—7 TEOREMA. (*Condición de Cauchy para funciones*). *Sea $\mathbf{f}$ una función definida en un conjunto S de E_m, y tal que sus valores pertenezcan a E_k; y sea $\mathbf{a}$ un punto de acumulación de S. La condición necesaria y suficiente para que exista $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ es un punto de E_k, es que para todo $\varepsilon > 0$, exista un entorno $N(\mathbf{a})$ tal que si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertenecen a $N'(\mathbf{a}) \cap S$, sea $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Elegido un $\varepsilon > 0$, existe un entorno $N(\mathbf{a})$ tal que para todo $\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a}) \cap S$ se verifica $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon/2$. Si $\mathbf{y}$ pertenece también a $N'(\mathbf{a}) \cap S$, entonces $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| + |\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición expresada por el teorema, y sea $N(\mathbf{a})$ el entorno que corresponde a ε. Sea $\{\mathbf{x}_n\}$ una sucesión cuyos términos son puntos distintos de S de manera que $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{a}$ y además que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$. Existe entonces un entero n_0 a partir del cual $\mathbf{x}_n \in N'(\mathbf{a})$ para todo $n > n_0$ y por tanto $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x})_m| < \varepsilon$ para todo par de enteros m, n posteriores a n_0. Según el teorema relativo a la condición de Cauchy para sucesiones, esto significa que el $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ existe. En virtud de la parte (II) del Teorema 4-5 resulta finalmente que también existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Lo que demuestra el teorema.

4-4 Algebra de límites. Las reglas para el cálculo con límites vienen dadas en el teorema siguiente.

4—8 TEOREMA. *Sean f y g dos funciones definidas en un conjunto S de E_n, con valores en E_1 o en E_2. Sea* **a** *un punto de acumulación de S y supongamos que*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = B.$$

Entonces se verifica

I) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} [f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})] = A \pm B,$

II) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) = AB,$

III) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}) = A/B$ *si* $B \neq 0.$

Demostración. Demostraremos tan sólo II), dejando las otras partes como ejercicios. Tomemos un ε tal que $0 < \varepsilon < 1$. Sea ε' un segundo número, $0 < \varepsilon' < 1$, que dependerá de ε en la forma que luego se precisa. Elijamos un entorno $N(\mathbf{a})$ tal que si $\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a}) \cap S$, se verifique

$$|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon' \text{ y } |g(\mathbf{x}) - B| < \varepsilon'.$$

Entonces

$$|f(\mathbf{x})| = |A + (f(\mathbf{x}) - A)| < |A| + \varepsilon' < |A| + 1.$$

Escribiendo $f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) - AB = f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) - Bf(\mathbf{x}) + Bf(\mathbf{x}) - AB$, se tiene

$$|f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) - AB| \leq |f(\mathbf{x})|\,|g(\mathbf{x}) - B| + |B|\,|f(\mathbf{x}) - A|$$
$$\leq (|A| + 1)\,\varepsilon' + |B|\varepsilon' = \varepsilon'(|A| + |B| + 1).$$

Si elegimos $\varepsilon' = \varepsilon/(|A| + |B| + 1)$, vemos que $|f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) - AB| < \varepsilon$ siempre que $\mathbf{x} \in N'(\mathbf{a}) \cap S$, lo que demuestra II).

4-5 Continuidad. En la definición del símbolo $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, no es necesario que la función esté definida *en* $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Además, en el caso en que $\mathbf{f}$ *está* definida en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, el valor $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ no es necesariamente igual a $\mathbf{b}$, si se verifica $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, la función se llama *continua* en $\mathbf{a}$.

4—9 DEFINICIÓN. *Sean* $\mathbf{f}$ *una función definida en un conjunto S de E_n con valores en E_m, y* **a** *un punto de acumulación de S. Decimos que* $\mathbf{f}$ *es continua en el punto* **a** *si se cumplen las dos condiciones:*

I) $\mathbf{f}$ *está definida en* **a**,

II) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Si **a** *no es un punto de acumulación de S, decimos que* $\mathbf{f}$ *es continua en* **a**, *cuando únicamente se verifique* I). *Si* $\mathbf{f}$ *es continua en todos los puntos de S, decimos que* $\mathbf{f}$ *es continua en el conjunto S.*

Conviene notar que siempre que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$, podemos escribir la II) de la Definición 4-9 en la forma:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{x}).$$

Así pues, cuando tratamos con funciones continuas, el símbolo de límite puede intercambiarse con el símbolo de función. Observemos asimismo que la continuidad en $\mathbf{a}$ significa que para todo entorno $N(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$, existe un entorno $N(\mathbf{a})$ tal que $\mathbf{f}[N(\mathbf{a}) \cap S] \subset N[\mathbf{f}(\mathbf{a})]$.

A partir del álgebra de límites obtenemos inmediatamente el siguiente teorema:

4—10 TEOREMA. *Sean f y g dos funciones continuas en el punto $\mathbf{a}$ de E_n y supongamos que los valores de f y g están en E_1 o en E_2. También son entonces continuas en $\mathbf{a}$, $f+g$, $f-g$, y $f\cdot g$. El cociente f/g es también continuo en $\mathbf{a}$ con tal que $g(\mathbf{a}) \neq 0$.*

NOTA. Designamos por $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y f/g las funciones cuyos valores en $\mathbf{x}$, son, respectivamente, $f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$. El producto $f\cdot g$ no debe confundirse con la composición fg, definida mediante $fg(\mathbf{x}) = f[g(\mathbf{x})]$.

Seguidamente damos un teorema relativo a la composición de f y g.

4—11 TEOREMA. *Sea $\mathbf{f}$ una función definida en un conjunto S de E_n y supongamos $\mathbf{f}(S) \subset E_m$. Sean además $\mathbf{g}$ una función definida en $\mathbf{f}(S)$ con valores en E_k, y $\mathbf{gf}$ la función compuesta definida en S por la igualdad $\mathbf{gf}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$. Supongamos que se verifica:*

I) *El punto $\mathbf{a}$ es de acumulación de S y $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$.*
II) *El punto $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ es de acumulación de $\mathbf{f}(S)$ y $\mathbf{g}$ es continua en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.*

En estas condiciones la función compuesta $\mathbf{gf}$ es también continua en $\mathbf{a}$; esto es,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{a})].$$

Demostración. Tomemos $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Entonces según II), a todo entorno $N[\mathbf{g}(\mathbf{b})]$ en E_k corresponde un entorno $N(\mathbf{b})$ en E_m tal que si $\mathbf{y} \in N(\mathbf{b}) \cap \mathbf{f}(S)$, es $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \in N[\mathbf{g}(\mathbf{b})]$. Para el entorno $N(\mathbf{b})$ podemos encontrar un entorno $N(\mathbf{a})$ en E_n tal que si $\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}) \cap S$ también $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in N(\mathbf{b})$. Combinando estos dos resultados, vemos que para todo entorno de $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{a})] = \mathbf{gf}(\mathbf{a})$ en E_k, existe un entorno $N(\mathbf{a})$ en E_n tal que si $\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}) \cap S$ se verifica que $\mathbf{gf}(\mathbf{x}) \in N[\mathbf{gf}(\mathbf{a})]$. Lo que demuestra el teorema. (Ver Fig. 4-2 para el caso $E_n = E_m = E_k = E_2$.)

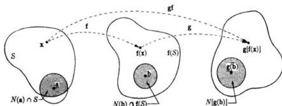


Fig. 4-2. El teorema 4-11 cuando $E_n = E_m = E_k = E_1$

4-6 Ejemplos de funciones continuas. Consideremos $S = E_2$. Es un sencillo ejercicio demostrar que las siguientes funciones complejas son continuas en E_2: *a*) las funciones constantes, definidas por $f(x) = c$ para todo x en E_2, y *b*) la función idéntica definida por $f(x) = x$ para todo x en E_2. Aplicaciones reiteradas del álgebra de funciones continuas nos llevan a establecer la continuidad de cualquier polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

siendo los a_i números complejos.

Si S es un conjunto en E_2 donde el polinomio f no es nulo, también $1/f$ es continua en S. Por consiguiente una función racional g/f, donde g y f son polinomios, es continua en E_2 siempre que el denominador no se anule.

Las funciones reales corrientes del cálculo elemental, tales como las funciones exponencial, trigonométrica y logarítmica, son todas continuas siempre que estén definidas. La continuidad de tales funciones elementales justifica el método usual en el cálculo de ciertos límites, que consiste en la sustitución del valor límite de la «variable independiente»; por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$$

La continuidad de la exponencial compleja y de las funciones trigonométricas es una consecuencia de la continuidad de las correspondientes funciones reales. (Ver Ejercicio 4-6.)

4-7 Funciones continuas en conjuntos abiertos o cerrados. Las funciones que son continuas en conjuntos abiertos o cerrados tienen propiedades especiales de significación particular. Antes de comentarlas con detalle, será conveniente introducir cierta terminología adecuada.

4—12 DEFINICIÓN. *Sea* **f** *una función cuyo dominio sea* S *y cuyo recorrido sea* T, *y designemos por* Y *un subconjunto de* T. *Entenderemos por ima-*

gen inversa de Y originada por $\mathbf{f}$, *y la representaremos por* $\mathbf{f}^{-1}(Y)$, *el más amplio subconjunto de S que* $\mathbf{f}$ *representa sobre Y, esto es,*

$$\mathbf{f}^{-1}(Y) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in Y\}.$$

NOTA. Si $\mathbf{f}$ tiene una función inversa $\mathbf{f}^{-1}$, la imagen inversa de Y originada por $\mathbf{f}$ es la misma que la imagen de Y originada por $\mathbf{f}^{-1}$, y en este caso no existe ambigüedad en la notación $\mathbf{f}^{-1}(Y)$.

4—13 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f}$ *una función con dominió S y recorrido T. Supongamos* $X \subset S$ *e* $Y \subset T$. *Se verifica:*

I) *Si* $X = \mathbf{f}^{-1}(Y)$, *es* $Y = \mathbf{f}(X)$.

II) *Si* $Y = \mathbf{f}(X)$, *es* $X \subset \mathbf{f}^{-1}(Y)$.

La demostración del Teorema 4-13 es una consecuencia inmediata de la definición de los símbolos $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ y $\mathbf{f}(X)$, y queda para el lector. Debe observarse que, en general, no se puede asegurar que $Y = \mathbf{f}(X)$ implica $X = \mathbf{f}^{-1}(Y)$. (Ver Figura 4-3.)

Notemos que la proposición del Teorema 4-13 también puede expresarse así:

$$Y = \mathbf{f}[\mathbf{f}^{-1}(Y)], \qquad X \subset \mathbf{f}^{-1}[\mathbf{f}(X)].$$

4—14 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f}$ *una función continua en un conjunto cerrado S de* E_m, *cuyo recorrido sea un conjunto T de* E_k. *Si Y es un subconjunto cerrado de T, la imagen inversa* $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ *será un subconjunto cerrado de S.*

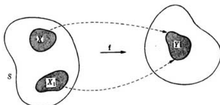


Fig. 4-3. $Y = \mathbf{f}(X) = \mathbf{f}(X_1)$; $\mathbf{f}^{-1}(Y) = X \cup X_1$.

Demostración. Sea $\mathbf{x}$ un punto de acumulación de $\mathbf{f}^{-1}(Y)$. Entonces $\mathbf{x}$ también es un punto de acumulación de S y por tanto $\mathbf{x} \in S$, ya que S es cerrado. Tenemos que demostrar que $\mathbf{x} \in \mathbf{f}^{-1}(Y)$ o, lo que es equivalente, que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in Y$. Existe una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$, cuyos términos son puntos de $\mathbf{f}^{-1}(Y)$, tal que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$. Por la continuidad en $\mathbf{x}$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Pero cada punto $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \in Y$ y, ya que Y es cerrado, el límite $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in Y$. [¿Por qué?] Esto prueba que $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ es cerrado.

Observemos que la hipótesis de que S es cerrado es necesaria en el Teorema 4-14. Por ejemplo, si S es un conjunto abierto y si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{x}$ en S, entonces el recorrido de $\mathbf{f}$ es el conjunto cerrado $\{\mathbf{a}\}$. En este caso la imagen inversa de un conjunto cerrado es un conjunto abierto.

4–15 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f}$ *una función continua en un conjunto abierto* S *de* E_m, *y su recorrido sea un conjunto* T *de* E_k. *Si* Y *es un subconjunto abierto de* T, *la imagen inversa* $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ *será un subconjunto abierto de* S.

Demostración. Demostraremos que $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ es una reunión de conjuntos abiertos. Supongamos que

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbf{f}^{-1}(Y).$$

Existe entonces en Y un punto $\mathbf{y}_0$ tal que $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Puesto que Y es abierto, hay un entorno $N(\mathbf{y}_0) \subset Y$. Si el radio de tal entorno es ε, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}$ en $N(\mathbf{x}_0; \delta) \cap S$ tenemos $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$, lo que indica que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in N(\mathbf{y}_0)$. El conjunto abierto $N(\mathbf{x}_0; \delta) \cap S$ es, por tanto, un subconjunto de $\mathbf{f}^{-1}(Y)$. Pero la reunión de todos los conjuntos abiertos $N(\mathbf{x}_0; \delta) \cap S$ obtenidos al recorrer $\mathbf{x}_0$ todo el conjunto $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ es exactamente el mismo $\mathbf{f}^{-1}(Y)$. Luego $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ es abierto, y el teorema queda demostrado.

Hemos visto ya que la imagen de un conjunto abierto en una transformación continua no siempre es un conjunto abierto. El ejemplo en E_1, definido por la ecuación $f(x) = \tan^{-1}(x)$, muestra que la imagen de un conjunto cerrado en una transformación continua no es necesariamente cerrada, ya que f transforma E_1 en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. No obstante, la imagen de un conjunto *compacto* en una transformación continua es siempre un conjunto compacto. Esto se demostrará en el próximo teorema.

4-8 Funciones continuas en conjuntos compactos.

4–16 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f}$ *una función continua en un conjunto compacto* S *de* E_m, *y supongamos que* $\mathbf{f}(S) \subset E_k$. *Entonces* $\mathbf{f}(S)$ *es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea F un recubrimiento abierto de $\mathbf{f}(S)$, es decir $\mathbf{f}(S) \subset \bigcup_{A \in F} A$. Tomemos en S un punto $\mathbf{x}$. Entonces $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pertenece por lo menos a uno de los conjuntos abiertos de F. Designemos uno de estos conjuntos por $A_{\mathbf{x}}$. Ya que $A_{\mathbf{x}}$ es abierto, existe un entorno $N[\mathbf{f}(\mathbf{x})] \subset A_{\mathbf{x}}$. Por la continuidad, hay un entorno $N(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{f}[N(\mathbf{x}) \cap S] \subset N[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$. La colección de todos los entornos $N(\mathbf{x})$ obtenidos al variar $\mathbf{x}$ en todo el conjunto S es un recubrimiento abierto de S. Ya que S es compacto, un número finito de entornos recubre a S, es decir $S \subset N_1(\mathbf{x}_1) \cup \ldots \cup N_p(\mathbf{x}_p)$. Ahora bien, se tiene:

$$\mathbf{f}[N_q(\mathbf{x}_q) \cap S] \subset N[\mathbf{f}(\mathbf{x}_q)] \subset A_{\mathbf{x}_q} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

donde $A_{x_q} \in F$. De ahí se deduce que $\mathbf{f}(S) \subset A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_p}$, lo que demuestra que $\mathbf{f}(S)$ es compacto.

4—17 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f}$ *una función continua en un conjunto compacto* S *de* E_m, *y supongamos que* $\mathbf{f}(S) \subset E_k$. *Supongamos además que* $\mathbf{f}$ *es uno a uno en* S *es decir que exista la función inversa* $\mathbf{f}^{-1}$. *En estas condiciones* $\mathbf{f}^{-1}$ *es continua en* $\mathbf{f}(S)$.

Demostración. Sea $\mathbf{y}$ un punto de acumulación de $\mathbf{f}(S)$ y escribamos $\mathbf{y} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n$, donde cada $\mathbf{y}_n \in \mathbf{f}(S)$. Pongamos $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_n)$. El conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ es un subconjunto infinito del conjunto compacto S y tiene, por tanto, un punto de acumulación en S, llamémosle $\mathbf{x}$. Podemos elegir en la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ otra sucesión $\{\mathbf{x}'_n\}$ de manera que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}'_n = \mathbf{x}$. Por la continuidad de $\mathbf{f}$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}'_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Por otra parte, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}'_n) = \mathbf{y}$, ya que la sucesión $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}'_n)\}$ está contenida en $\{\mathbf{y}_n\}$. Por consiguiente $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, lo que significa que $\mathbf{x}$ es el único punto de acumulación del conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$. Luego podemos escribir $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ o lo que es lo mismo, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, que implica la continuidad de $\mathbf{f}^{-1}$ en $\mathbf{y}$.

4-9 Aplicaciones topológicas.

4—18 DEFINICIÓN. *Sea* $\mathbf{f}$ *continua en* S *y supongamos que es uno a uno en* S, *es decir que exista la función inversa* $\mathbf{f}^{-1}$. *Entonces* $\mathbf{f}$ *se denomina una aplicación topológica o un homeomorfismo si, además,* $\mathbf{f}^{-1}$ *es continua en* $\mathbf{f}(S)$.

Una propiedad de un conjunto que es invariante en toda aplicación topológica se llama *propiedad topológica*. Así, por ejemplo, el Teorema 4-16 nos dice que la compacidad es una propiedad topológica.

Las aplicaciones topológicas son de particular importancia en la teoría de las curvas del espacio. Por ejemplo, un *arco simple* es una imagen topológica de un intervalo y una *curva cerrada simple* es la imagen topológica de un círculo. Estas ideas serán consideradas con mayor detalle en el Capítulo 8.

4-10 Propiedades de las funciones reales continuas.

4—19 DEFINICIÓN. *Sea* f *una función real definida en un conjunto* S *de* E_n. *Se dice que* f *tiene un máximo absoluto en* S *si existe un punto* $\mathbf{a}$ *de* S *tal que*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \textit{para todo } \mathbf{x} \textit{ de } S.$$

Si $\mathbf{a} \in S$ *y hay un entorno* $N(\mathbf{a})$ *tal que*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \textit{para todo } \mathbf{x} \textit{ de } N(\mathbf{a}) \cap S,$$

se dice que f tiene un máximo relativo en el punto $\mathbf{a}$. (*Los mínimos absoluto y relativo se definen análogamente, poniendo* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$.)

Las palabras « local » y « global » también se usan en lugar de « relativo » y « absoluto ». En general, una propiedad de un conjunto S que es descrita por medio de un entorno de un punto de S, es considerada como una *propiedad local* de S; la continuidad en un punto y la noción de máximo relativo son propiedades locales. Por otra parte, una propiedad relativa a un conjunto considerado como un todo se llama una *propiedad global*. Así pues, la continuidad en un conjunto y la posesión de un máximo absoluto son propiedades globales.

4—20 TEOREMA. *Sea f una función real contínua en un conjunto compacto S de E_n. Existen un máximo y un mínimo absolutos de f en S.*

Demostración. En el Teorema 4—16 demostramos que $f(S)$ es compacto. También, tenemos $\inf f(S) \leq f(\mathbf{x}) \leq \sup f(S)$ para todo $\mathbf{x}$ de S. Para demostrar el presente teorema basta probar que todo conjunto compacto de números reales contiene su inf y su sup. Para conjuntos finitos esto es obvio.

Sea A un conjunto infinito cerrado y acotado en E_1 y consideremos $a = \sup A$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe un punto x en A tal que $a - \varepsilon \leq x < a$. Esto significa que todo entorno de a contiene puntos de A distintos de a. Luego a es un punto de acumulación de A. Puesto que A es cerrado, $a \in A$. Esto es, A contiene su sup. (Un razonamiento análogo es válido para el inf.)

Los dos teoremas que siguen se refieren a propiedades de funciones reales continuas definidas en intervalos cerrados y acotados en E_1. El primero de ellos es una proposición muy importante e intuitivamente evidente que dice que si la gráfica de una función continua está por encima del eje ox en un extremo de un intervalo y por debajo en el otro extremo, debe cortar al eje en algún punto interior.

4—21 TEOREMA (*Bolzano*). *Sea f una función real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ de E_1, y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos distintos, es decir $f(a)f(b) < 0$. Existe por lo menos un punto x en el intervalo abierto (a, b) en el cual es $f(x) = 0$.*

Demostración. Para precisar, supongamos $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Consideremos

$$A = \{x | x \in [a, b],\ f(x) \geq 0\}.$$

El conjunto A es un subconjunto no vacío de $[a, b]$ (ya que $a \in A$). Sea $c = \sup A$. Entonces $a < c < b$. [¿Por qué?] Demostraremos que $f(c) = 0$.

Si $f(c) \neq 0$, existe un entorno $N(c)$ tal que en cada punto x de $N(c)$ los números $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo. [¿Por qué?] Esto contradice la definición de c. [¿Por qué?] Se deduce pues que $f(c) = 0$.

Una consecuencia inmediata del teorema de Bolzano es el *teorema del valor intermedio* para funciones continuas.

4–22 Teorema. *Si f es real y continua en un intervalo cerrado S de E_1, toma todo valor comprendido entre su máximo,* $\sup f(S)$, *y su mínimo,* $\inf f(S)$.

Demostración. Consideremos $f(x_1) = \inf f(S)$ y $f(x_2) = \sup f(S)$, y supongamos $\inf f(S) < c < \sup f(S)$. Aplicar el Teorema 4-21 a la función g, definida (en el intervalo que une x_1 y x_2) por la ecuación $g(x) = f(x) - c$.

De este teorema se deduce que el conjunto de valores tomados por una función continua f en un intervalo cerrado S es otro intervalo cerrado, $[\inf f(S), \sup f(S)]$. (Si f es constante en S aquél será un intervalo degenerado.)

4-11 Continuidad uniforme. Consideremos una función $\mathbf{f}$ continua en un conjunto S, es decir, que para cada punto de acumulación $\mathbf{a}$ de S, se verifique $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Utilizando la terminología relativa a ε y δ esto significa que dados ε y el punto de acumulación $\mathbf{a}$, existe un número $\delta > 0$ (que depende de $\mathbf{a}$ y de ε) tal que la acotación $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ implica que $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| < \varepsilon$. En general, no podemos esperar que para un ε fijo sirva un mismo δ para *todo* punto $\mathbf{a}$. Esto, sin embargo, puede acontecer; cuando es así, la función se llama *uniformemente continua* en el conjunto S.

4–23 Definición. *Sea $\mathbf{f}$ una función definida en un conjunto S de E_n y con valores pertenecientes a E_m. Se dice que $\mathbf{f}$ es uniformemente continua en S cuando se verifica que:*

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que depende sólo de ε) tal que para cualquier par de puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ pertenecientes a S y para los que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$, es $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < \varepsilon$.

Observemos que la continuidad uniforme es una propiedad relativa a todo el conjunto S, esto es, una propiedad global. Para hacer resaltar la diferencia entre *continuidad en un conjunto* S y *continuidad uniforme en un conjunto* S, consideramos los ejemplos siguientes.

1. Sean S un intervalo semiabierto $0 < x \leq 1$, y f una función definida para cada x de S mediante la fórmula $f(x) = 1/x$. Esta función es continua en el conjunto S. No obstante, demostraremos que *f no es uniformemente*

continua en S. Tomemos $\varepsilon = 10$, y supongamos que encontráramos un δ, $0 < \delta < 1$, para satisfacer la condición de la definición. Tomando $x = \delta$, $y = \delta/11$, obtenemos

$$|x - y| = \frac{10}{11}\delta < \delta$$

y

$$|f(x) - f(y)| = \frac{11}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{10}{\delta} > 10.$$

Luego para esos dos puntos tendríamos siempre $|f(x) - f(y)| > 10$, en contradicción con la definición de continuidad uniforme.

2. Consideremos ahora $f(x) = x^2$ si $x \in S$, siendo S el mismo conjunto del ejemplo anterior. Esta función *es* uniformemente continua en S. Para probarlo, observemos que

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x - y)\ (x + y)| < 2|x - y|.$$

Si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < 2\delta$. Luego, dado ε, basta tomar $\delta = \varepsilon/2$ para asegurar que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para *todo par* x, y con tal que $|x - y| < \delta$. Así pues, f es uniformemente continua en S.

Un ejercicio instructivo es el de demostrar que en el segundo ejemplo f no es uniformemente continua en todo el eje real E_1.

Se deduce de la Definición 4-23 que la continuidad uniforme en un conjunto implica la continuidad en él. (El lector verificará esto. Ver Ejercicio 4-21.) La recíproca de esta proposición es también válida cuando el conjunto es compacto.

4—24 Teorema (*Heine*). *Sea S un conjunto compacto en E_n. Si $\mathbf{f}$ es continua en S, también es uniformemente continua en S.*

Demostración. Dado un $\varepsilon > 0$, cada punto $\mathbf{a}$ de S tiene asociado un entorno $N(\mathbf{a}\,;\, r)$, con r dependiente de $\mathbf{a}$, de manera que

$$\mathbf{x} \in N(\mathbf{a};\ r) \cap S \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos la colección de todos los entornos de tamaño mitad $N(\mathbf{a};\ r/2)$. Estos recubren S. Puesto que S es compacto, un número finito de ellos también recubren S, escribamos pues

$$S \subset N\left(\mathbf{a}_1\,;\frac{r_1}{2}\right) \cup \ldots \cup N\left(\mathbf{a}_m;\frac{r_m}{2}\right).$$

En cualquier entorno de radio doble, $N(\mathbf{a}_k;\ r_k)$, es cierto que

$$\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}_k;\ r_k) \cap S \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea 2δ el menor de los números $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Demostraremos que este δ sirve en la definición de continuidad uniforme.

Con tal objeto, consideremos dos puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de S, tales que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$. Según la discusión anterior, existe algún entorno $N(\mathbf{a}_k; r_k/2)$ que contiene $\mathbf{x}$. Entonces $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pero también tenemos

$$|\mathbf{y} - \mathbf{a}_k| = |(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}_k)| < \delta + \frac{r_k}{2} \leq \frac{r_k}{2} + \frac{r_k}{2} = r_k.$$

Esto es, $\mathbf{y} \in N(\mathbf{a}_k; r_k) \cap S$. Por tanto, también $|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$, y por consiguiente, $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < \varepsilon$. Lo que demuestra el teorema.

4-12 Discontinuidades de funciones reales.

4—25 DEFINICIÓN. *Si f es una función real definida en un intervalo abierto (a, b) de E_1 y c es un punto de $[a, b)$, escribimos $f(c+)$ para indicar el límite a la derecha, $\lim_{x\to c+} f(x)$, siempre que el límite exista. Si $c \in (a, b]$, definimos $f(c-) = \lim_{x\to c-} f(x)$.*

Es evidente que si la función es continua en x, $f(x+) = f(x-) = f(x)$ y recíprocamente. Un punto en el que f no es continua se llama una *discontinuidad* de f. Naturalmente, un punto x será una discontinuidad de f si ésta no está definida en x. Si f está definida en x, para que sea x una discontinuidad de f se ha de cumplir una de las condiciones siguientes:

a) Si uno de los dos valores $f(x+)$ o $f(x-)$ no existe.
b) Si ambos $f(x+)$ y $f(x-)$ existen pero tienen valores distintos.
c) Si $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

4—26 DEFINICIÓN. *Sea f una función real definida en un intervalo $[a, b]$. Si $f(x+)$ y $f(x-)$ existen en un punto interior x, la diferencia $f(x) - f(x-)$ se llama salto a la izquierda de f en x, la diferencia $f(x+) - f(x)$ es el salto a la derecha de f en x y su suma, $f(x+) - f(x-)$ se denomina salto de f en x. Si alguno de estos tres números es distinto de 0, se dice que x es una discontinuidad de salto de f. (Para los extremos a y b, se consideran únicamente saltos a un lado). Decimos que f es continua a la derecha de x si el salto a la derecha es igual a 0, mientras que f es discontinua a la derecha bien si $f(x+)$ no existe, o si el salto a la derecha es $\neq 0$. (Una terminología análoga se aplica a la izquierda.)*

En el caso en que $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$, el punto x también se llama una *discontinuidad evitable*, ya que la discontinuidad puede evitarse asignando a f en el punto x el valor $f(x+) = f(x-)$.

Si es infinito ($+\infty$ o $-\infty$) uno de los límites, $\lim_{x\to c+} f(x)$ o $\lim_{x\to c-} f(x)$, se dice algunas veces que f tiene una *discontinuidad infinita* en c.

EJEMPLOS.

1. La función f definida por $f(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$, $f(0) = A$, tiene una *discontinuidad de salto en $x = 0$, prescindiendo del valor de A. (Ver Fig. 4-4.)*

2. La función f definida por $f(x) = 1$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

3. La función f definida por $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = A$, tiene una discontinuidad infinita si $x = 0$. (Ver Fig. 4-5.)

4. La función f definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = A$, tiene una discontinuidad en $x = 0$, prescindiendo del valor de A. En este caso, ni $f(0+)$ ni $f(0-)$ existen. (Ver Fig. 4-6.)

5. La función f definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$, tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$, ya que $f(0+) = f(0-) = 0$. (Ver Figura 4-7.)

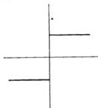


Fig. 4-4. Discontinuidad de salto.

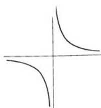


Fig. 4-5. Discontinuidad infinita.

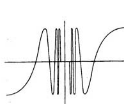


Fig. 4-6. Un caso en que $f(0+)$ y $f(0-)$ no existen.

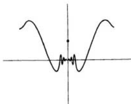


Fig. 4-7. Discontinuidad evitable.

4-13 Funciones monótonas.

4–27 DEFINICIÓN. *Sea f una función real definida en un conjunto S de E_1. Si para todo par de puntos x e y de S, $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$, se dice que f es creciente (o no decreciente) en S. Si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$, se dice que f es estrictamente creciente en S. (Las funciones decrecientes se definen de manera análoga). Una función se llama monótona en S si es creciente en S o decreciente en S.*

Si f es una función creciente, entonces $-f$ es decreciente. Por este motivo en muchas cuestiones relativas a funciones monótonas es suficiente considerar tan sólo el caso de funciones crecientes.

Vamos a demostrar que las funciones monótonas poseen siempre límites finitos a la derecha y a la izquierda, y, por tanto, sus discontinuidades (si existen) deben ser discontinuidades de salto.

4–28 TEOREMA. *Si f es una función creciente en $[a, b]$, existen $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ para cada x_0 de (a, b) y se verifica*

$$f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+).$$

En los extremos ocurre $f(a) \leq f(a+)$ y $f(b-) \leq f(b)$.

Demostración. Consideremos $A = \{f(x) | a < x < x_0\}$. Puesto que f es creciente, ese conjunto está acotado superiormente por $f(x_0)$. Si ponemos $c = \sup A$ entonces $c \leq f(x_0)$. Demostraremos que $f(x_0-)$ existe y que coincide con c. Para ello, tenemos que probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$ se verifica $|f(x) - c| < \varepsilon$. Pero ya que $c = \sup A$, existen elementos $f(x)$ de A para los que $c - \varepsilon < f(x) \leq c$. Tomemos $x_1 < x_0$ de manera que $c - \varepsilon < f(x_1) \leq c$. Entonces para todo x de (x_1, x_0) se verifica también $c - \varepsilon < f(x) \leq c$, y por tanto $|f(x) - c| < \varepsilon$. Por consiguiente el número $\delta = x_0 - x_1$ tiene la propiedad requerida. (La demostración de la existencia de $f(x_0+)$ y de que es $\geq f(x_0)$ es parecida, y sólo se precisan ligeras modificaciones para los extremos.)

4–29 TEOREMA. *Sea f una función estrictamente creciente en $[a, b]$. Tenemos entonces:*

I) *La función inversa f^{-1} existe y es estrictamente creciente en su dominio.*

II) *Si f es continua en $[a, b]$, f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.*

Demostración. Tan sólo necesitamos demostrar I), ya que II) se deduce inmediatamente del resultado más general del Teorema 4-17. Para probar I),

observemos ante todo que f es uno a uno, ya que es estrictamente creciente, y, por tanto, existe f^{-1}. Para ver que f^{-1} es asimismo estrictamente creciente, sean $y_1 < y_2$ dos puntos en el dominio de f^{-1}. Hay entonces puntos x_1, x_2 en $[a, b]$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. No puede ocurrir que $x_1 \geq x_2$, pues entonces también sería $y_1 \geq y_2$. Debe ser entonces $x_1 < x_2$, y esto significa que f^{-1} es estrictamente creciente.

El Teorema 4-29 nos dice que una función continua estrictamente creciente es una aplicación topológica. Recíprocamente, toda aplicación topológica de un intervalo $[a, b]$ sobre un intervalo $[c, d]$ debe ser una función estrictamente monótona. La verificación de esto será un ejercicio instructivo para el lector. (Ver Ejercicio 4-31.)

4-14 Condiciones necesarias y suficientes para la continuidad. Las funciones continuas pueden ser caracterizadas de manera muy elegante si introducimos una ligera modificación de las nociones de conjuntos abiertos y cerrados.

4—30 DEFINICIÓN. *Sean A y B dos conjuntos en E_n, siendo $A \subset B$. Decimos que A es cerrado con relación a B si todo punto de acumulación de A que está en B es también de A. Decimos que A es abierto con relación a B si el complemento $B - A$ es cerrado con relación a B.*

Es evidente que todo conjunto cerrado en E_n es cerrado con relación a E_n, y todo conjunto abierto en E_n es abierto con relación a E_n. Asimismo podemos afirmar que todo conjunto es a la vez abierto y cerrado con relación a sí mismo. Un conjunto que es abierto con relación a B, como es natural, no es necesariamente un conjunto abierto (con relación a E_n). Sin embargo, un tal conjunto debe ser la intersección de B con un conjunto abierto. Esta afirmación, que será probada en el Teorema 4-31, está representada en la Figura 4-8. La región sombreada (que incluye el arco abc, a excepción de los extremos a y c) es abierta con relación a B.

4—31 TEOREMA. *Supongamos que $A \subset B \subset E_n$. La condición necesaria y suficiente para que A sea abierto con relación a B es que A sea la intersección de B con un conjunto que es abierto con relación a E_n.*



Fig. 4-8. Teorema 4-31.

Demostración. Consideremos $A = B \cap S$, donde S es abierto. Vamos a demostrar que $B - A$ es cerrado con relación a B. Sea $\mathbf{x}$ un punto de acumulación de $B - A$ que pertenece a B. Tenemos que probar que $\mathbf{x} \in B - A$, esto es, que $\mathbf{x} \notin A$. Ya que $\mathbf{x} \in B$ y $A = B \cap S$, basta demostrar que $\mathbf{x} \notin S$.

Pero $\mathbf{x}$ es también un punto de acumulación de $E_n - S$, puesto que $B - A = B - S \subset E_n - S$. Ahora bien, $E_n - S$ es cerrado, o sea $\mathbf{x} \in E_n - S$, $\mathbf{x} \notin S$. Esto demuestra que A es abierto con relación a B.

Recíprocamente, sea A abierto con relación a B. Entonces $A \subset B$ y tenemos que encontrar un conjunto abierto S tal que $A = B \cap S$. Ahora bien, $B - A$ es cerrado con relación a B, lo cual significa que los puntos de acumulación de $B - A$ que están en B deben estar también en $B - A$. Esto es, los puntos de acumulación de $B - A$ no pueden estar en A. Por tanto, si $\mathbf{x} \in A$, entonces $\mathbf{x}$ no es un punto de acumulación de $B - A$, y, por consiguiente, existe algún entorno $N(\mathbf{x})$ tal que $N(\mathbf{x}) \cap (B - A)$ es vacío. Sea S la reunión de todos esos entornos $N(\mathbf{x})$ obtenidos al variar $\mathbf{x}$ a través de A. S es un conjunto abierto que contiene a A (por construcción). Luego $A \subset B \cap S$. Pero si $\mathbf{x} \in B \cap S$ existe un entorno $N(\mathbf{y})$ tal que $N(\mathbf{y}) \cap (B - A)$ es vacío, donde $\mathbf{y} \in A$ y $\mathbf{x} \in N(\mathbf{y})$.
Por lo tanto, $\mathbf{x} \notin (B - A)$. Pero como $\mathbf{x} \in B$, debe verificarse $\mathbf{x} \in B - (B - A) = A$. Esto demuestra que $A = B \cap S$, y el teorema queda así demostrado.

Naturalmente, el Teorema 4-31 es también legítimo reemplazando «abierto» por «cerrado» cada vez que estas palabras se citan. Utilizando estos conceptos podemos dar la siguiente caracterización de las funciones continuas.

4—32 TEOREMA. *Sean* $\mathbf{f}$ *una función definida en un conjunto* S *de* E_n *y* $T = \mathbf{f}(S)$ *un subconjunto de* E_m. *Entonces las tres proposiciones siguientes son equivalentes:*

a) *La función* $\mathbf{f}$ *es continua en* S.

b) *Si* Y *es cerrado con relación a* T, $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ *es cerrado con relación a* S.

c) *Si* Y *es abierto con relación a* T, $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ *es abierto con relación a* S.

Demostración. Supongamos que a) sea cierta y sea Y cerrado con relación a T. Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ que está también en S, vamos a demostrar que $\mathbf{x} \in f^{-1}(Y)$ o, lo que es lo mismo, que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in Y$. Existe una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$, cuyos términos son puntos de $\mathbf{f}^{-1}(Y)$, tal que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Puesto que $\mathbf{x} \in S$, por la continuidad tenemos $\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Pero cada $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \in Y$ y el límite $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in T$: luego $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in Y$, ya que Y es cerrado con relación a T. Por consiguiente, a) implica b).

Supongamos ahora que se verifica b) y sea Y abierto con relación a T. Entonces $T - Y$ es cerrado con relación a T, y por tanto $\mathbf{f}^{-1}(T - Y)$ es cerrado con relación a S. Pero $\mathbf{f}^{-1}(T - Y) = S - \mathbf{f}^{-1}(Y)$. (El lector verificará esta igualdad.) Por consiguiente, $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ debe ser abierto con relación a S, y así b) implica c).

Finalmente, supongamos que se verifica c). Para demostrar que $\mathbf{f}$ es continua en S, tomamos un punto $\mathbf{a}$ de S y sea $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ el punto correspondiente en T. Para todo entorno $N(\mathbf{b})$ debemos encontrar un entorno $N(\mathbf{a})$ tal que

$$\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}) \cap S \text{ implique } f(\mathbf{x}) \in N(\mathbf{b}).$$

Dado $N(\mathbf{b})$, el conjunto $T_1 = N(\mathbf{b}) \cap T$ es abierto con relación a T, y por tanto, en virtud de c), $\mathbf{f}^{-1}(T_1)$ es abierto con relación a S. Por consiguiente, $\mathbf{f}^{-1}(T_1) = S \cap U$, donde U es abierto. Pero $\mathbf{a} \in \mathbf{f}^{-1}(T_1)$ luego $\mathbf{a} \in U$. Existe pues un entorno $N(\mathbf{a}) \subset U$ tal que $N(\mathbf{a}) \cap S \subset \mathbf{f}^{-1}(T_1)$. (Ver Fig. 4-9.) Pero esto significa que si $\mathbf{x} \in N(\mathbf{a}) \cap S$, entonces $\mathbf{x} \in \mathbf{f}^{-1}(T_1)$, o $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in T_1 \subset N(\mathbf{b})$. Luego $\mathbf{f}$ es continua en el punto $\mathbf{a}$ con lo que el teorema queda demostrado.

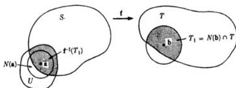


Fig. 4-9. Demostración del Teorema 4-32.

EJERCICIOS

NOTA. Mientras no se advierta lo contrario, todas las funciones de los ejercicios siguientes son reales.

Límites.

4-1. Demostrar las proposiciones (I) y (III) del Teorema 4-8.

4-2. Calcular los siguientes límites (cuando existan):

a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

cuando S es cada uno de los siguientes conjuntos en E_2:

I) $S = \{(x, y) | y = ax\}$ $(a \neq 0)$.
II) $S = \{(x, y) | y = ax^2\}$ $(a \neq 0)$.
III) $S = \{(x, y) | y^2 = ax\}$ $(a \neq 0)$.
IV) $S = E_2$.

4-3. Sea f una función definida en el intervalo (a, b) y supongamos $x \in (a, b)$. Consideremos las dos igualdades

I) $\lim\limits_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)| = 0$.

II) $\lim\limits_{h\to 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0$.

a) Demostrar que I) siempre implica II).
b) Dar un ejemplo en el que II) sea cierta pero no en cambio I).

4-4. Consideremos las siguientes funciones definidas en E_2:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x - y)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x} \text{sen } (xy)$ si $x \neq 0$, $f(0, y) = y$.

d) $f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \text{ sen } (1/x) \text{ sen } (1/y) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0. \end{cases}$

e) $f(x, y) = \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } y}{\text{tg } x - \text{tg } y}$ si $\text{tg } x \neq \text{tg } y$,

$f(x, y) = \cos^3 x$ si $\text{tg } x = \text{tg } y$.

En cada uno de los anteriores ejemplos, determinar si existen los siguientes límites y calcular los que existan:

$$\lim_{x \to 0} [\lim_{y \to 0} f(x, y)]; \quad \lim_{y \to 0} [\lim_{x \to 0} f(x, y)]; \quad \lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$$

4-5. Si x es cualquier número real en $[0, 1]$, demostrar que existe el siguiente límite:

$$\lim_{m \to \infty} [\lim_{n \to \infty} \cos^{2n} (m! \pi x)],$$

y que su valor es 0 ó 1 según sea x irracional o racional.

4-6. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n funciones reales definidas en un conjunto S de E_m, y consideremos la función vectorial $\mathbf{f}$ definida para cada $\mathbf{x}$ de S mediante la ecuación $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$. Sea $\mathbf{a}$ un punto de acumulación de S y supongamos $\mathbf{b} \in E_n$. Demostrar que la igualdad

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

es equivalente a las n igualdades

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_k(\mathbf{x}) = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

[*Indicación*: $|f_k(\mathbf{x}) - b_k| \leq |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(\mathbf{x}) - b_k|$.]

Continuidad de funciones reales.

4-7. Sea f continua en $[a, b]$ y $f(x) = 0$ cuando x es racional. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$.

4-8. Sea f continua en el punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de E_n. Conservemos $a_2\ a_3, \ldots, a_n$ fijos y definamos una nueva función g de una variable real mediante la ecuación

$$g(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n).$$

Demostrar que g es continua en el punto $x = a_1$. (Algunas veces esto se expresa diciendo « Una función continua de n variables es continua respecto a cada variable separadamente ».)

4-9. Probar mediante un ejemplo que la recíproca de la proposición establecida en el Ejercicio 4-8 en general no es cierta.

4-10. Sean f, g y h tres funciones definidas en $[0, 1]$ como sigue:

$f(x) = g(x) = h(x) = 0$ siempre que x es irracional;
$f(x) = 1$ y $g(x) = x$, siempre que x es racional;
$h(x) = 1/n$, si x es el número racional m/n (irreducible);
$h(0) = 1$.

Demostrar que f no es continua en punto alguno de $[0, 1]$, que g es continua únicamente en $x = 0$, y que h es continua tan sólo en los puntos irracionales de $[0, 1]$.

4-11. Para cada x de $[0, 1]$, tomemos $f(x) = x$ si x es racional, y $f(x) = 1 - x$ si x es irracional. Demostrar que

a) f es continua únicamente en el punto $x = 1/2$.
b) f toma todos los valores comprendidos entre 0 y 1.

4-12. Sea f definida en E_1 y supongamos que existe por lo menos un punto x_0 en E_1 en el que f es continua. Supongamos también que, para todo par de valores x e y de E_1, f satisface la ecuación

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Demostrar que existe una constante a tal que $f(x) = ax$ para todo x.

4-13. Sean $f_1, f_2, \dots, f_m$ m funciones reales definidas en un conjunto S de E_n. Supongamos que cada f_k es continua en el punto $\mathbf{a}$ de S. Definamos una nueva función f así: Para cada $\mathbf{x}$ de S, $f(\mathbf{x})$ es el mayor de los números $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$. Discutir la continuidad de f en $\mathbf{a}$.

4-14. Sea f una función definida y acotada en el intervalo cerrado $S = [a, b]$. (Esto es, supongamos que $f(S)$ es un conjunto acotado). Si T es un subconjunto de S, el número

$$\Omega_f(T) = \sup \{f(x) - f(y) | x \in T, \ y \in T\}$$

se llama *oscilación* de f en T. Si $x \in S$, la oscilación de f en x se define como el número

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0+} \Omega_f(N(x; h) \cap S).$$

Demostrar que este límite existe siempre y que $\omega_f(x) = 0$ si, y únicamente si, f es continua en x.

4-15. Sea f continua en $[a, b]$ y definamos g así: $g(a) = f(a)$, y para $a < x \leq b$ sea $g(x)$ el valor máximo de f en el subintervalo $[a, x]$. Demostrar que g es continua en $[a, b]$.

4-16. Sea f continua en $[a, b]$ y S sea el cuadrado en el plano xy dado por $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$. Definamos g en S así: $g(x, x) = f(x)$; para todo punto (x, y) de S tal que $a \leq x < y \leq b$, $g(x, y)$ sea el valor máximo de f en el subintervalo $[x, y]$ de $[a, b]$. Si $x > y$, $g(x, y) = g(y, x)$. Demostrar que g es continua en S.

4-17. Sea f definida y continua en un conjunto cerrado S de E_n. Consideremos

$$A = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in S,\ f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Demostrar que A es un conjunto cerrado.

4-18. Sea f continua en un conjunto abierto S de E_n, supongamos que $\mathbf{x}_0 \in S$, y que $f(\mathbf{x}_0) > 0$. Demostrar que existe un entorno $N(\mathbf{x}_0)$ tal que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x}$ en este entorno.

4-19. Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que f tiene un máximo relativo en x_1 y otro en x_2. Demostrar que debe existir un tercer punto entre x_1 y x_2 donde f tiene un mínimo relativo.

4-20. Sea f una función definida en $[0, 1]$ con la siguiente propiedad: Para todo número real y, o no existe valor alguno de x en $[0, 1]$ para el cual $f(x) = y$, o hay exactamente *dos* valores de x en $[0, 1]$ para los que $f(x) = y$.

a) Demostrar que f no puede ser continua en $[0, 1]$.

b) Construir una función f que tenga la anterior propiedad.

Continuidad uniforme.

4-21. Demostrar que una función que es uniformemente continua en un conjunto S es también continua en S.

4-22. Demostrar que la función f definida por $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en E_1.

4-23. Supongamos que f es uniformemente continua en un conjunto acotado S de E_n. Demostrar que f debe ser acotada en S, esto es, demostrar que existe una constante $M > 0$ tal que $|f(\mathbf{x})| \leq M$ para todo $\mathbf{x}$ de S.

4-24. Sea $\mathbf{f}$ definida en un conjunto S de E_n con valores en E_m. En lugar de utilizar la Definición 4-23, definamos la continuidad uniforme así:

DEFINICIÓN. *Sea* $\mathbf{f}$ *continua en* S. *Se dice que* $\mathbf{f}$ *es uniformemente continua en* S *si, dado* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *(que depende solo de* ε*) tal que siempre que* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *son dos puntos de acumulación de* S *de modo que* $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ *se verifica*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Demostrar que el teorema de Heine (Teorema 4-24) es también válido con esta definición de continuidad uniforme.

4-25. Sea $\mathbf{f}$ una función definida en un conjunto S de E_n y supongamos que $\mathbf{f}(S) \subset E_m$. Sea $\mathbf{g}$ definida en $\mathbf{f}(S)$ con valores en E_k, y designemos con $\mathbf{g}\mathbf{f}$ la función compuesta definida por $\mathbf{g}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$, si $\mathbf{x} \in S$. Si $\mathbf{f}$ es uniformemente continua en S y $\mathbf{g}$ es uniformemente continua en $\mathbf{f}(S)$, demostrar que $\mathbf{g}\mathbf{f}$ es uniformemente continua en S.

4-26. Probar mediante aplicación directa de la definición (sin utilizar el teorema de recubrimiento de Heine-Borel) que un polinomio es uniformemente continuo en todo intervalo finito cerrado de E_1.

Discontinuidades.

4-27. Determinar y clasificar las discontinuidades de las funciones f definidas en E_1 por las ecuaciones siguientes:

a) $f(x) = (\text{sen } x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

b) $f(x) = e^{1/x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

c) $f(x) = e^{1/x} + \text{sen } (1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

d) $f(x) = 1/(1 - e^{1/x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

4-28. Determinar los puntos de E_2 en los que cada una del las funciones de Ejercicio 4-4 no es continua.

Funciones monótonas.

4-29. Sea f definida en el intervalo abierto (a, b) y supongamos que para cada punto interior x de (a, b) existe un entorno $N(x)$ en el cual f es creciente. Demostrar que f es una función creciente en todo punto de (a, b).

4-30. Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que f no tiene ni máximos ni mínimos relativos en ningún punto interior. Demostrar que f debe ser monótona en $[a, b]$.

4-31. Si f es uno a uno y continua en $[a, b]$, demostrar que f debe ser estrictamente monótona en $[a, b]$. Esto es, probar que toda aplicación topológica de $[a, b]$ sobre un intervalo $[c, d]$ debe ser estrictamente monótona.

4-32. Sea f una función creciente definida en $[a, b]$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n puntos en el interior tales que $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$.

a) Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b-) - f(a+)$.

b) Deducir de a) que el conjunto de las discontinuidades de f es numerable.

CAPITULO 5

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

5-1 Introducción. La rama de las matemáticas conocida con el nombre de Cálculo Diferencial gira en torno de un proceso especial de límite, *la diferenciación*, que será considerado con detalle en este capítulo. Dos tipos distintos de problemas — el problema físico de calcular la velocidad instantánea de una partícula móvil, y el problema geométrico de encontrar la tangente a una línea en uno de sus puntos — conducen de manera natural a la misma idea básica que contiene la noción de derivada. Aquí, no nos interesaremos demasiado por las aplicaciones de la diferenciación a la mecánica o a la geometría, y nos ceñiremos al estudio de las propiedades matemáticas generales de la derivada. Este capítulo trata de la diferenciación de *funciones reales* definidas en E_1 y el Capítulo 6 tratará de las generalizaciones a E_n.

5-2 Definición de derivada. Si f es una función definida en un intervalo abierto (a, b), para dos puntos distintos x y x_0 de (a, b) podemos formar el *cociente de diferencias*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Conservemos fijo x_0 y estudiemos el comportamiento de tal cociente al tomar x valores tan próximos a x_0 como queramos.

5—1 DEFINICIÓN. *Sea f definida en un intervalo abierto (a, b), y supongamos que $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f tiene derivada en x_0 siempre que existe el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Este límite, que se escribe $f'(x_0)$, se llama la derivada de f en x_0.

Podemos pensar que el límite citado define, a partir de una función dada f, una nueva función f', cuyo dominio está constituido por los puntos de (a, b) en los que f tiene derivada. La función f' se llama la *derivada primera* de f. Análogamente la derivada n-ésima de f, que se representa por $f^{(n)}$, se define como la derivada primera de $f^{(n-1)}$, $n = 2, 3, \ldots$ (Según nuestra definición, no tiene sentido considerar $f^{(n)}$ a no ser que $f^{(n-1)}$ esté definida en un intervalo abierto.) Otras notaciones con las que el lector puede estar familiarizado son

$$f'(x) = Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \qquad [\text{donde } y = f(x)],$$

u otras similares. La propia función f algunas veces se escribe $f^{(0)}$.

5—2 TEOREMA. *Si f tiene derivada en un punto x_0 de (a, b), es continua en x_0.*

Demostración. Si $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, podemos escribir

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Aplicando el Teorema 4-8 II), encontramos $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Esto prueba el aserto.

El próximo teorema nos proporciona una información más precisa sobre el comportamiento de f en las proximidades de un punto en el que la derivada existe.

5—3 TEOREMA. *Si f tiene derivada en un punto interior x_0 de (a, b), existe un entorno $N(x_0)$ y un número positivo M tal que $x \in N'(x_0)$ implica $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, hay un entorno $N(x_0) \subset (a, b)$ tal que

$$x \in N'(x_0) \quad \text{implica} \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Si tomamos el entorno correspondiente a $\varepsilon = 1$, podemos escribir

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < |f'(x_0)| + 1$$

siempre que $x \in N'(x_0)$. La conclusión del teorema se deduce tomando $M = 1 + |f'(x_0)|$.

De las funciones para las que la conclusión del Teorema 5-3 es cierta, se dice que satisfacen la *condición de Lipschitz* en x_0. Geométricamente, esto significa que la gráfica debe quedar entre las dos rectas $y - f(x_0) = M(x - x_0)$ e $y - f(x_0) = -M(x - x_0)$ siempre que $x \in N'(x_0)$. (Ver Fig. 5-1.) El número M, naturalmente, depende de x_0. Las funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en x_0 son automáticamente continuas en x_0, pero la recíproca no es cierta. (Ver Ejercicio 5-1.)

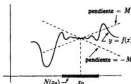


Fig. 5-1. Condición de Lipschitz en x_0

5-3 Algebra de derivadas. El lector no tendrá dificultad en deducir el teorema siguiente utilizando las demostraciones corrientes del cálculo elemental.

5—4 TEOREMA. *Si f y g están definidas en (a, b), en todos los puntos en los que f y g admiten derivadas, las funciones $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ también poseen derivadas. Esto también es cierto para la función f/g en los puntos x donde $g(x) \neq 0$. Estas derivadas vienen dadas por las fórmulas:*

$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$
$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g,$$
$$(f/g)' = [g \cdot f' - f \cdot g']/g^2 \qquad \text{(en los puntos en los que } g(x) \neq 0).$$

A partir de la definición vemos inmediatamente que si $f(x)$ es constante para todo valor de x, $f'(x)$ es siempre 0. Asimismo, si $f(x) = x$ es $f'(x) = 1$ para todo x. La aplicación reiterada del Teorema 5-4 nos dice que si $f(x) = x^n$ (n entero positivo), la derivada $f'(x) = n\, x^{n-1}$ para todo x, Del mismo teorema deducimos que todo polinomio tiene derivada en todo E_1, y toda función racional admite derivada donde esté definida.

5-4 La regla de la cadena. Un resultado bastante más profundo concerniente a las derivadas es la llamada *regla de la cadena* para la diferenciación de una función compuesta.

5—5 TEOREMA (*Regla de la cadena*). *Sean f continua en un intervalo cerrado S y $f(S)$ la imagen de S originada por f. Sea g otra función definida en $f(S)$ y consideremos la función compuesta gf definida para cada valor x de S mediante $gf(x) = g[f(x)]$. Supongamos que x_0 es un punto interior de S tal que $y_0 = f(x_0)$ es un punto interior de $f(S)$. Admitamos, además que existan las dos derivadas $f'(x_0)$ y $g'(y_0)$. Entonces gf posee derivada en x_0 y su valor es $f'(x_0)g'(y_0)$. Esto es,*

$$(gf)'(x_0) = g'[f(x_0)]\, f'(x_0).$$

Demostración. Tenemos que considerar el límite del cociente

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0}$$

cuando x tiende a x_0. Como primer intento hacia la demostración, parece natural escribir

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0} = \frac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si $x \to x_0$, el segundo factor del segundo miembro tiene como límite $f'(x_0)$ y el límite del primer factor debería ser $g'[f(x_0)]$. Sin embargo, esto no es legítimo pues el denominador $f(x) - f(x_0)$ del primer factor podría ser cero en todo entorno de x_0, y, por consiguiente, el primer factor sería indeterminado en tales puntos x. Por tanto, es necesario un razonamiento más preciso.

Escribamos $y_0 = f(x_0)$ y definamos una nueva función h como sigue :

$$h(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) \qquad \text{si } y \neq y_0,\ y \in f(S), \qquad h(y_0) = 0.$$

Entonces tenemos $\lim_{y \to y_0} h(y) = 0$ a causa de la supuesta existencia de $g'(y_0)$. Luego h es continua en y_0. Ahora bien, h está definida en todo punto de $f(S)$ y, por tanto, tiene sentido considerar la función compuesta hf. Puesto que f es continua en x_0 y h lo es también en $y_0 = f(x_0)$, el teorema de la continuidad de las funciones compuestas (Teorema 4-11) nos dice que

$$\lim_{x \to x_0} hf(x) = h[f(x_0)] = h(y_0) = 0$$

Tomando $y = f(x)$ en la definición de h, podemos escribir

$$hf(x) = \frac{g[f(x)] - g(y_0)}{f(x) - y_0} - g'(y_0), \qquad \text{si } f(x) \neq y_0,$$

o

$$gf(x) - g(y_0) = [hf(x) + g'(y_0)][f(x) - y_0],$$

y esta igualdad subsiste incluso si $f(x) = y_0$. Ahora bien, conservemos $x \neq x_0$, y dividamos ambos miembros por $x - x_0$ para obtener

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0} = [hf(x) + g'(y_0)] \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Estamos ahora en condiciones de considerar el límite cuando $x \to x_0$. El segundo factor del segundo miembro tiene como límite $f'(x_0)$ y antes hemos visto que $\lim_{x \to x_0} hf(x) = 0$. Luego el primer miembro tiene por límite $g'(y_0)\, f'(x_0)$, como deseábamos demostrar.

5-5 Derivadas laterales y derivadas infinitas. Hasta ahora, el decir que f tenía derivada en x_0 ha significado que x_0 era *interior* a un intervalo en el que f estaba definida y que el límite $f'(x_0)$ era *finito*. Es conveniente extender el alcance de nuestras ideas con vistas a la discusión de las derivadas en los extremos de los intervalos. También es deseable introducir derivadas *infinitas*, de manera que la interpretación geométrica de derivada como la pendiente de la recta tangente sea válida aun en el caso en el que la tangente sea vertical. Debido a que en tal caso no podemos probar que f es continua en x_0, exigimos explícitamente que lo sea.

5—6 DEFINICIÓN. *Sea f definida en un intervalo cerrado S y supongamos que f es continua en el punto x_0 de S. Se dice que f tiene derivada a la derecha de x_0 si el límite a la derecha*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe y es finito, o si es $+\infty$ o $-\infty$. Este límite se expresa con la notación $f'_+(x_0)$. De forma análoga se define la derivada a la izquierda y se representa por $f'_-(x_0)$. Además, si x_0 es un punto interior de S, decimos que f tiene la derivada $f'(x_0) = +\infty$ si las dos derivadas a la izquierda y a la derecha de x_0 son $+\infty$. (La derivada $f'(x_0) = -\infty$ se define análogamente.)

Es evidente que f tiene derivada en x_0 si, y unicamente si, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ en cuyo caso $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$.

La Figura 5-2 ilustra alguno de estos conceptos. En el punto x_1 tenemos $f'_+(x_1) = -\infty$. En x_2 la derivada a la izquierda es 0 y a la derecha es -1. También, $f'(x_3) = -\infty$, $f'_-(x_4) = -1$, $f'_+(x_4) = +1$, $f'(x_6) = +\infty$, y $f'_-(x_7) = 2$. No existe derivada (ni a un lado ni al otro) en x_5, ya que f no es continua allí.

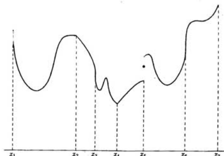


Fig. 5-2. Derivadas laterales y derivadas infinitas.

5-6 Funciones con derivada no nula.

5—7 TEOREMA. *Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que en algún punto x_0 de (a, b) tenemos $f'(x_0) > 0$ o $f'(x_0) = +\infty$. Existe entonces un entorno $N(x_0) \subset (a, b)$ tal que para cada x de $N'(x_0)$ se verifica $f(x) > f(x_0)$ si $x > x_0$, y $f(x) < f(x_0)$ si $x < x_0$.*

Demostración: Supongamos que $f'(x_0)$ sea finita y positiva. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno $N(x_0) \subset (a, b)$ tal que

$$x \in N'(x_0) \quad \text{implica} \quad \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Tomemos el entorno correspondiente a $\varepsilon = \frac{1}{2}f'(x_0)$. Entonces si $x \in N'(x_0)$, tenemos

$$-\frac{1}{2}f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'x_0) < \frac{1}{2}f'(x_0),$$

o

$$0 < \frac{1}{2}f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3}{2}f'(x_0).$$

Luego en este entorno el cociente $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ es positivo. Pero esto implica que $f(x) - f(x_0)$ tiene el mismo signo que $x - x_0$.

Si $f'(x_0) = +\infty$, habrá un entorno $N(x_0)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 1, \qquad \text{siempre que } x \in N'(x_0).$$

En este entorno el cociente es también positivo y la conclusión se deduce como antes.

Un resultado análogo al del Teorema 5-7 es legítimo, naturalmente, si $f'(x_0) < 0$ ó $f'(x_0) = -\infty$ en algún punto interior de (a, b).

5-7 Funciones con derivada nula. Podemos utilizar el Teorema 5-7 para obtener el siguiente resultado importante que pone de manifiesto una conexión entre las derivadas y los máximos y mínimos relativos.

5—8 TEOREMA. *Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que, f posea un máximo o un mínimo relativo en un punto interior x_0 de (a, b). Si f tiene derivada en x_0, entonces $f'(x_0)$ debe ser 0.*

Demostración. Si $f'(x_0)$ es positiva o $+\infty$, f no puede tener ni máximo ni mínimo relativo en x_0 a causa del Teorema 5-7. Por lo mismo, $f'(x_0)$ no puede ser negativa o $-\infty$. Pero, debido a que *existe* derivada en x_0, la única posibilidad es $f'(x_0) = 0$.

El recíproco del Teorema 5-8 no es cierto. En general, el conocimiento de que $f'(x_0) = 0$ no es suficiente para determinar si f tiene un máximo o un mínimo en x_0. Efectivamente, puede ser que no exista ni uno ni otro, como puede verificarse con el ejemplo en que $f(x) = x^3$ y $x_0 = 0$. En este caso $f'(0) = 0$ pero f es creciente en todo entorno de 0.

Además, hay que hacer notar que f puede tener un máximo o un mínimo relativos en x_0 sin que $f'(x_0)$ se anule. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ pero, naturalmente, no posee derivada en $x = 0$. El teorema antes demostrado (5-8) supone que f debe tener derivada (finita o infinita) en x_0. Asimismo x_0 debe ser un punto *interior* de (a, b). En el ejemplo $f(x) = x$, $a \leq x \leq b$, f alcanza su máximo y su mínimo en los extremos pero $f'(x)$ no se anula nunca en $[a, b]$.

5-8 Teorema de Rolle. Pensando en la representación geométrica es evidente que una curva suficientemente «regular» que corta al eje ox en los dos extremos de un intervalo $[a, b]$ debe poseer un «punto de viraje» en algún punto comprendido entre a y b. Un teorema de gran importancia en cálculo, conocido como el *teorema de Rolle*, precisa este hecho. Está contenido en la parte I) del siguiente teorema.

5—9 TEOREMA. *Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) y admitamos que tiene derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos también que los dos límites $f(a+) = \lim_{x\to a+} f(x)$ y $f(b-) = \lim_{x\to b-} f(x)$ existen (y son finitos). Entonces tenemos:*

I) *Si $f(a+) = f(b-)$, existe por lo menos un punto interior x_0 de (a, b) en el que $f'(x_0) = 0$.*

II) *Si $f'(x) \neq 0$ en todo punto x de (a, b), f es monótona en (a, b). Con más precisión, f es estrictamente creciente si $f(a+) < f(b-)$ y estrictamente decreciente si $f(a+) > f(b-)$.*

Demostración. La hipótesis implica que f es continua en el intervalo (a, b). Definamos una nueva función g así:

$$g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in (a, b), \qquad g(a) = f(a+), \qquad g(b) = f(b-).$$

De este modo g es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y por tanto alcanza su máximo M y su mínimo m en algún punto de $[a, b]$. Si $f'(x)$ no se anula en (a, b), el Teorema 5-8 nos dice que los valores extremos de g no pueden ser alcanzados en puntos interiores.

Para demostrar I), supongamos que $f(a+) = f(b-)$. Si $f'(x) \neq 0$ para todo punto x en (a, b), se debe verificar $m = g(a) = g(b) = M$ (según las observaciones precedentes). Esto implica que f es constante en (a, b). Por consiguiente, la no anulación de f' en (a, b) es incompatible con la igualdad $f(a+) = f(b-)$. Esto demuestra I).

Para probar II) supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b) y que $f(a+) < f(b-)$. Entonces $m = g(a) < g(b) = M$, y, por tanto, $g(a) < g(x) < g(b)$ para todo x de (a, b). Tomando un valor fijo de x, $x = x_1$, $a < x_1 < b$, y aplicando el mismo razonamiento al intervalo cerrado $[x_1, b]$, encontramos que

$$g(x_1) < g(x) < g(b) \quad \text{si} \quad x_1 < x < b$$

Pero esto indica que $f(x_1) < f(x)$ siempre que $a < x_1 < x < b$. Luego f es estrictamente creciente en (a, b). (Si $f(a+) > f(b-)$, el razonamiento es el mismo.) Esto demuestra II).

5-9 El Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Uno de los instrumentos más útiles del cálculo diferencial es el Teorema del Valor Medio.

5–10 TEOREMA (*Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial*). *Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que f posee derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos además que los límites $f(a+)$ y $f(b-)$ existen y que satisfacen la condición*

$$f(a) - f(a+) = f(b) - f(b-).$$

Existe entonces por lo menos un punto interior x_0 de (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

NOTA. La condición $f(a) - f(a+) = f(b) - f(b-)$ significa que el salto a la derecha de a y el salto a la izquierda de b deben tener la misma magnitud pero signos opuestos. En particular dicha condición se satisface si f es continua en ambos extremos.

Geométricamente, el Teorema 5-10 establece que en una curva suficientemente « regular » que une dos puntos A y B existe una tangente que tiene la misma pendiente que la cuerda AB.

El Teorema del Valor Medio se obtendrá como corolario del siguiente teorema más general.

5–11 TEOREMA (*Teorema generalizado del Valor Medio*). *Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que cada una de ellas tenga derivada, finita o infinita, en todo punto interior. En los extremos, supongamos que existen los límites $f(a+)$, $f(b-)$, $g(a+)$ y $g(b-)$ y que satisfacen la relación*

I) $[f(a+) - f(b-)][g(a) - g(b)] = [f(a) - f(b)][g(a+) - g(b-)]$.

Existe por lo menos un punto interior x_0 de (a, b) tal que

II) $f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)]$.

NOTA. La hipótesis I) queda automáticamente si f y g son ambas continuas en los extremos de $[a, b]$. Si $g(x) = x$ resulta el Teorema 5-10.

Demostración. Si $x \in [a, b]$, sean $F(x) = f(x)[g(b) - g(a)]$ y $G(x) = g(x)[f(b) - f(a)]$. Si existe en (a, b) un punto c en el que $F'(c)$ y $G'(c)$ son ambas $+\infty$ o ambas $-\infty$, la igualdad II) es cierta para $x_0 = c$, tomando ambos miembros el valor $+\infty$ o el $-\infty$. Supongamos que para ningún x de (a, b), $F'(x)$ y $G'(x)$ tomen ambas el valor $+\infty$ o el ∞, y consideremos $h(x) = F(x) - G(x)$. Entonces h tiene derivada (finita o infinita) en cada x de (a, b) y

$h(a+) = h(b-)$. En virtud del Teorema de Rolle, debe ser $h'(x_0) = 0$ para un cierto x_0 interior a (a, b), y esto demuestra II).

NOTA. El lector debería interpretar geométricamente el Teorema 5-11 refiriéndolo a la curva plana representada por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$.

Hemos visto ya en el Teorema 5-9 que f debe ser monótona en (a, b) si f' no es nunca nula. El mismo resultado puede obtenerse como consecuencia inmediata del Teorema del Valor Medio.

5—12 TEOREMA. *Si f es continua en $[a, b]$ y posee derivada que toma únicamente valores positivos (finitos o infinitos) en el interior, f es entonces estrictamente creciente en $[a, b]$. Si f' toma únicamente valores negativos (finitos o infinitos) en (a, b), f es estrictamente decreciente en $[a, b]$. Si $f'(x) = 0$ en todo punto x de (a, b), f es constante en todo $[a, b]$.*

Demostración. Si aplicamos el Teorema del Valor Medio a un intervalo arbitrario $[x_1, x_2]$ de $[a, b]$, encontramos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1), \quad \text{donde } x_0 \in (x_1, x_2).$$

Todas las proposiciones del teorema se deducen inmediatamente de esta igualdad.

Aplicando el Teorema 5-12 a la diferencia $f-g$, vemos que cuando dos funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y sus derivadas son finitas e iguales en cada punto interior, las dos funciones f y g difieren en una constante en todo el intervalo $[a, b]$.

5-10 Teorema del valor intermedio para las derivadas. En el Teorema 4-22 del capítulo anterior hemos probado que una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo en dicho intervalo. En particular, f alcanza todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Un resultado parecido demostraremos ahora para las funciones derivadas.

5—13 TEOREMA. (*Teorema del valor intermedio para las derivadas*). *Supongamos que f está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que tiene derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos también que f tiene derivadas laterales finitas en los extremos $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ y que $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. En tal caso, si c es un número real comprendido entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, existe por lo menos un punto interior x tal que $f'(x) = c$.*

Demostración. Definamos una nueva función g como sigue:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{si} \quad x \neq a, \qquad g(a) = f'_+(a).$$

Esta función g es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Según el teorema del valor intermedio para las funciones continuas, g toma todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior de (a, b). En virtud del Teorema del Valor Medio, tenemos $g(x) = f'(x_0)$ para algún x_0 en (a, x) siempre que $x \in (a, b)$. Por consiguiente f' toma todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior de (a, b). Un razonamiento semejante aplicado a la función h, definida por

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \qquad \text{si} \quad x \neq b, \qquad h(b) = f'_-(b),$$

demuestra que f' toma todo valor comprendido entre $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y $f'_-(b)$ en el interior de (a, b). Combinando estos resultados, vemos que f' toma todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ en el interior de (a, b), y esto demuestra el teorema.

NOTA. El Teorema 5-13 es aun válido si una de las derivadas laterales $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ o ambas, son infinitas. La demostración en este caso se consigue considerando la función auxiliar g definida mediante la ecuación $g(x) = f(x) - cx$, si $x \in [a, b]$. Los detalles se dejan al cuidado del lector. (Ver Ejercicio 5-22.)

5-11 Fórmula de Taylor con resto. El Teorema del Valor Medio ha sido ya interpretado geométricamente, pero existe otro aspecto del teorema que también nos ayuda a comprender su significado.

Si f es continua en $[a, b]$ y tiene derivada en cada punto interior, dado x en $(a, b]$, podemos escribir

$$f(x) = f(a) + f'(x_0)(x - a), \qquad \text{donde } a < x_0 < x.$$

Esta igualdad dice que la cantidad $f'(x_0)\,(x - a)$ mide el error cometido cuando $f(x)$ es aproximado por $f(a)$. Desgraciadamente, el Teorema del Valor Medio no nos indica cómo puede calcularse x_0; dice simplemente que $a < x_0 < x$. Si x no está muy alejado de a, $[f(x) - f(a)]/(x - a)$ será aproximadamente $f'(a)$. Esto es, $f'(x_0)$ será aproximadamente igual a $f'(a)$, y por consiguiente la igualdad

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

debe ser aproximadamente correcta cuando $x - a$ es pequeño. Esto significa que f es aproximadamente una función lineal en las proximidades de a. El teorema de Taylor nos dice, con más generalidad, que f puede aproximarse mediante un polinomio de grado $n - 1$ si $f^{(n)}$ existe en (a, b). La importancia de este teorema radica en el hecho de que nos proporciona una expresión útil del error cometido por esa aproximación.

5—14 TEOREMA (*Taylor*). *Sea f una función que tiene derivada n-ésima finita $f^{(n)}$ en todo el intervalo abierto (a, b) y supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Consideremos un punto $x_0 \in [a, b]$. Entonces, para todo x de $[a, b]$, $x \neq x_0$, existe un punto x_1 interior al intervalo que une x con x_0 tal que*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n.$$

El teorema de Taylor se obtendrá como consecuencia de un resultado más general que es una extensión directa del Teorema del Valor Medio generalizado.

5—15 TEOREMA. *Sean f y g dos funciones que poseen derivadas n-ésimas $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ en el intervalo abierto (a, b) y las derivadas de orden $n - 1$ continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Tomemos un punto $x_0 \in [a, b]$. Entonces, para todo x de $[a, b]$, $x \neq x_0$, existe un punto x_1 interior al intervalo que une x con x_0 tal que*

$$\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k\right] g^{(n)}(x_1)$$
$$= f^{(n)}(x_1) \left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k\right].$$

NOTA. En el caso especial en que $g(x) = (x - x_0)^n$, tenemos $g^{(k)}(x_0) = 0$ para $0 \leq k \leq n - 1$ y $g^{(n)}(x) = n!$. Este teorema se reduce entonces al teorema de Taylor.

Demostración. Para simplificar, supongamos que $x_0 < b$ y que $x > x_0$. Mantengamos fijo x y definamos dos nuevas funciones F y G de la siguiente manera:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k,$$

$$G(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k,$$

para cada t en $[x_0, x]$. Estas funciones F y G son continuas en el intervalo cerrado $[x_0, x]$ y tienen derivadas finitas en el intervalo abierto (a, x). Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 5-11 y escribir

$$F'(x_1)\,[G(x) - G(x_0)] = G'(x_1)\,[F(x) - F(x_0)], \quad \text{donde } x_1 \in (x_0, x).$$

Esta igualdad se transforma en la:

a) $$F'(x_1)\,[g(x) - G(x_0)] = G'(x_1)\,[f(x) - F(x_0)],$$

ya que $G(x) = g(x)$ y $F(x) = f(x)$. Si, ahora, calculamos la derivada de la suma que define $F(t)$, teniendo en cuenta que cada término de la suma es un producto, encontramos que todos los términos se destruyan salvo uno, y nos resulta

$$F'(t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t).$$

Análogamente, obtenemos

$$G'(t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

Si ponemos $t = x_1$ y sustituimos en a), deducimos la fórmula del teorema.

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios suponemos, donde sea preciso, un conocimiento de las fórmulas para la diferenciación de las funciones elementales trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

5-1. Se dice que una función f satisface una condición de Lipschitz de orden α en x_0 si existe un número positivo M (que puede depender de x_0) y un entorno $N(x_0)$ tal que

$$x \in N'(x_0) \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(x_0)| < M(x - x_0)^\alpha.$$

a) Demostrar que una función que satisface una condición de Lipschitz de orden α es continua en x_0 si $\alpha > 0$, y tiene derivada en x_0 si $\alpha > 1$.

b) Dar un ejemplo de una función que satisfaga una condición de Lipschitz de orden 1 en x_0 para la cual $f'(x_0)$ no exista.

5-2. En cada uno de los casos siguientes, determinar los intervalos en los que la función f es creciente o decreciente y encontrar los máximos y mínimos (si existen) en el conjunto en el que cada f está definida

a) $f(x) = x^3 + ax + b$,	$x \in E_1$.
b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$,	$\|x\| > 3$.
c) $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^4$,	$0 \leq x \leq 1$.
d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$,	$0 \leq x \leq \pi/2$.

5-3. Encontrar un polinomio f de menor grado posible tal que

$$f(x_1) = a_1, \qquad f(x_2) = a_2, \qquad f'(x_1) = b_1, \qquad f'(x_2) = b_2,$$

siendo $x_1 \neq x_2$ y a_1, a_2, b_1, b_2 números reales dados.

5-4. Definimos f de la siguiente manera:

$f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Demostrar que

a) f es continua para todo x.

b) $f^{(n)}$ es continua para todo x, y que $f^{(n)}(0) = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

5-5. Definimos f, g y h así: $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ y, si $x \neq 0$, $f(x) = \text{sen}\,(1/x)$, $g(x) = x\,\text{sen}\,(1/x)$, $h(x) = x^2\,\text{sen}\,(1/x)$.

Demostrar que

a) $f'(x) = -1/x^2 \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $f'(0)$ no existe.
b) $g'(x) = \text{sen}\,(1/x) - 1/x \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $g'(0)$ no existe.
c) $h'(x) = 2x\,\text{sen}\,(1/x) - \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $h'(0) = 0$;
$\lim_{x\to 0} h'(x)$ no existe

5-6. Obtener la fórmula de Leibnitz para la derivada n-ésima de un producto h de dos funciones f y g:

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \qquad \text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5-7. Dadas dos funciones f y g definidas y que poseen derivadas terceras finitas $f'''(x)$ y $g'''(x)$ para todo x en E_1. Si $f(x)g(x) = 1$ para cualquier x, demostrar que las relaciones a), b), c) y d) son válidas en todos los puntos en los que los denominadores no se anulan:

a) $f'(x)/f(x) + g'(x)/g(x) = 0$.

b) $f''(x)/f'(x) - 2f'(x)/f(x) - g''(x)/g'(x) = 0$.

c) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - 3\dfrac{f'(x)g''(x)}{f(x)g'(x)} - 3\dfrac{f''(x)}{f(x)} - \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} = 0$.

d) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$.

NOTA. La expresión que aparece en el primer miembro de d) se llama la *derivada Schwarziana* de f en x.

e) Demostrar que f y g tienen la misma derivada Schwarziana si

$$g(x) = [af(x) + b]/[cf(x) + d], \text{ donde } ad - bc \neq 0.$$

[*Indicación*: Si $c \neq 0$, escribir

$$(af + b)/(cf + d) = (a/c) + (bc - ad)/[c(cf + d)], \text{ y aplicar d).}]$$

5-8. Dadas cuatro funciones f_1, f_2, g_1, g_2 que poseen derivadas en (a, b). Definida F por medio del determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \qquad \text{si } x \in (a, b).$$

a) Demostrar que $F'(x)$ existe para todo x en (a, b) y que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) \end{vmatrix}.$$

b) Establecer y demostrar un resultado más general para determinantes de orden n.

5-9. Dadas n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, admitiendo cada una derivada de orden n en (a, b). Una función W, llamada *Wronskiano* de $f_1, \ldots, f_n$, se define como sigue: Para cada x de (a, b), $W(x)$ es el valor del determinante de orden n cuyo elemento perteneciente a la fila k y a la columna m es $f_m^{(k-1)}(x)$, donde $k = 1, 2, \ldots, n$ y $m = 1, 2, \ldots, n$. [En lugar de los términos $f_m^{(0)}(x)$ se escribe $f_m(x)$.]

a) Demostrar que $W'(x)$ puede obtenerse reemplazando la última fila del determinante que define $W(x)$ por las derivadas n-ésimas $f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x), \ldots, f_n^{(n)}(x)$.

b) Suponiendo la existencia de n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no simultáneamente nulas, tales que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$ para todo x de (a, b), demostrar que $W(x) = 0$ para cada x en (a, b).

NOTA. Un conjunto de funciones que satisfacen una tal relación se llama un *conjunto linealmente dependiente* en (a, b).

c) La anulación del Wronskiano en todo el intervalo (a, b) es necesaria, pero no suficiente, para la dependencia lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Demostrar que en el caso de dos funciones, si el Wronskiano se anula en todo el intervalo (a, b) y una de ellas no se anula en (a, b), entonces forman un conjunto linealmente dependiente en (a, b).

5-10. Dada una función f definida en el intervalo (a, b), con derivada finita en él y tal que $\lim_{x \to b-} f(x) = +\infty$. Demostrar que $\lim_{x \to b-} f'(x)$ o no existe o es infinito.

5-11. Demostrar que la fórmula del Teorema del Valor Medio puede escribirse en la forma siguiente:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad \text{donde } 0 < \theta < 1.$$

Determinar θ como una función de x y h cuando

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$,
c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = \log x$, $x > 0$.

Mantener fijo $x \neq 0$, y calcular $\lim_{h \to 0} \theta$ en cada caso.

5-12. En el Teorema 5-15 considerar $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ y $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. Demostrar que $f'(x)/g'(x)$ nunca es igual al cociente $[f(1) - f(0)]/[g(1) - g(0)]$ si $0 < x \leq 1$. ¿Cómo conciliar esto con la igualdad

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \quad a < x_1 < b,$$

que se obtiene del Teorema 5-15 cuando $n = 1$?

5-13. En cada uno de los siguientes casos especiales del Teorema 5-15, considerar $n = 1$, $x_0 = a$, $x = b$, y demostrar que $x_1 = (a + b)/2$.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$; b) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

¿Puede encontrarse una clase general de tales pares de funciones f y g para las que x_1 valga siempre $(a + b)/2$ de manera que los dos ejemplos a) y b) pertenezcan a dicha clase?

5-14. Dada una función f definida y con derivada f' finita en el intervalo semiabierto $0 < x \leq 1$ y tal que $|f'(x)| < 1$. Definir $a_n = f(1/n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$. [*Indicación*: Utilizar la condición de Cauchy].

5-15. Suponiendo que f tiene derivada finita en cada punto del intervalo abierto (a, b) y que existe $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ y es finito en un punto interior x_0, demostrar que el valor de ese límite debe ser $f'(x_0)$.

5-16. Sea f una función continua en (a, b) con derivada finita f' en todo el intervalo (a, b), excepto acaso en x_0. Si el $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existe y vale A, demostrar que debe también existir $f'(x_0)$ y que toma el valor A.

5-17. Sea f continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f'(x)$ finita para cada x de $(0, 1)$. Probar que si f' es función creciente en $(0, 1)$, también lo es la función g definida mediante la ecuación $g(x) = f(x)/x$.

5-18. Sea h un número positivo fijo. Demostrar que no existe función alguna f que satisfaga las tres condiciones siguientes: $f'(x)$ existe para $x \geq 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) \geq h$ para $x > 0$.

5-19. Suponiendo que f y g tienen derivadas continuas, utilizar el Teorema del Valor Medio para deducir la regla de la cadena de diferenciación de la función compuesta gf.

5-20. Si $h > 0$ y $f'(x)$ existe (y es finita) para todo x en $(a - h, a + h)$, y si f es continua en $[a - h, a + h]$, demostrar que se verifica:

a) $$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h), \qquad 0 < \theta < 1;$$

b) $$\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} = f'(a + \lambda h) - f'(a - \lambda h), \qquad 0 < \lambda < 1.$$

c) Si $f''(a)$ existe, demostrar que

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2}.$$

d) Dar un ejemplo en el que el límite del cociente que aparece en c) exista pero en cambio $f''(a)$ no exista.

5-21. Sea f una función con derivada finita en (a, b) y supongamos que $x_0 \in (a, b)$. Consideremos la condición siguiente: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno $N(x_0; \delta)$, cuyo radio δ depende únicamente de ε y no de x_0, tal que si $x \in N'(x_0; \delta)$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Demostrar que f' es continua en (a, b) si esta condición es válida en todo el intervalo (a, b).

5-22. Demostrar el Teorema 5-13 si una de las derivadas $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ es infinita o lo son ambas.

5-23. Dar un ejemplo de un par de funciones f y g que tengan derivadas finitas en $(0, 1)$, tales que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

pero en cambio que $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ no exista, eligiendo g de tal manera que $g'(x)$ no sea nunca cero.

5-24. Demostrar el siguiente teorema:

Dadas dos funciones f y g que poseen derivadas n-ésimas finitas en (a, b). Supongamos que para algún punto interior x_1 de (a, b), ocurra que $f(x_1) = f'(x_1) = \ldots = f^{(n-1)}(x_1) = 0$ y que $g(x_1) = g'(x_1) = \ldots = g^{(n-1)}(x_1) = 0$, pero que $g^{(n)}(x_1)$ no se anule nunca en (a, b). Demostrar que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_1)}{g^{(n)}(x_1)}.$$

NOTA. Se supone que $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ no son continuas en x_1. [*Indicación*: Poner $F(x) = f(x) - (x - x_1)^{n-1} f^{(n-1)}(x_1)/(n-1)!$, definir G de manera parecida y aplicar el Teorema 5-15 a las funciones F y G.]

5-25. Demostrar que la fórmula del teorema de Taylor puede también escribirse del siguiente modo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)(x - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1),$$

donde x_1 es interior al intervalo que une x con x_0. Sea $1 - \theta = (x - x_1)/(x - x_0)$. Demostrar que $0 < \theta < 1$ y obtener la siguiente forma del resto (debida a Cauchy);

$$\frac{(1 - \theta)^{n-1}(x - x_0)^n}{(n-1)!} f^{(n)}[\theta x + (1 - \theta)x_0].$$

[*Indicación*: Tomar $G(t) = g(t) = t$ en la demostración del Teorema 5-15.]

CAPITULO 6

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6-1 Introducción. En el Capítulo 5 considerábamos derivadas de funciones definidas en subconjuntos de E_1. Nuestro propósito es, ahora, tratar de la diferenciación de funciones reales de varias variables. Quizá el modo más sencillo de proceder es reducir la discusión al caso uni-dimensional considerando una función de varias variables como una función de una sola variable (cada variable separadamente), manteniendo fijas las demás. Esto nos conduce al concepto de *derivada parcial*, con el que el lector está ya familiarizado por su conocimiento del cálculo elemental.

Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto en E_n, e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ es otro punto cuyas coordenadas excepto la k-ésima son iguales a las de $\mathbf{x}$, esto es, $y_i = x_i$ si $i \neq k$ y $x_k \neq y_k$, podemos considerar el límite

$$\lim_{y_k \to x_k} \frac{f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{y_k - x_k}.$$

Cuando este límite existe, se le denomina la derivada parcial de f respecto a la k-ésima coordenada y se escribe $D_k f(\mathbf{x})$, o $f_k(\mathbf{x})$, o $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_k$ o expresiones parecidas. Nosotros adoptaremos la notación $D_k f(\mathbf{x})$.

Este proceso origina pues, a partir de una función dada f, n funciones $D_1 f$, $D_2 f$, $\ldots$, $D_n f$ definidas en todos los puntos de E_n en los cuales existe el correspondiente límite. Pueden definirse las derivadas parciales laterales o infinitas como en el caso uni-dimensional, pero únicamente nos interesaremos por las derivadas finitas existentes en puntos interiores de ciertos conjuntos abiertos de E_n.

Al generalizar un concepto de E_1 a E_n, tratamos de conservar las propiedades importantes que consideramos en el caso uni-dimensional. Por ejemplo, en E_1 la existencia de la derivada en un punto x implica la continuidad en el mismo. Por tanto, parece natural el deseo de tener una noción de derivada para funciones de varias variables que implique la continuidad. La existencia de las derivadas parciales *no* implica la continuidad de la función. Una función de n variables puede tener derivadas parciales en un punto con respecto a cada una de las variables y en cambio no ser continua en dicho punto. Consideremos el ejemplo siguiente de una función de dos variables:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \\ 1, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Las dos derivadas parciales $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen. En efecto,

$$D_1f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

y análogamente, $D_2f(0, 0) = 1$. Por otra parte, es evidente que esta función no es continua en $(0, 0)$.

La existencia de las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables implica la continuidad con relación a cada variable separadamente; pero, como acabamos de ver, no supone la continuidad respecto a todas las variables simultáneamente. La dificultad en las derivadas parciales radica en que según su misma definición estamos obligados a considerar cada vez una sola variable. Las derivadas parciales nos dan una medida de la variación de una función en la dirección de cada eje coordenado. Es natural buscar un concepto más general de derivada a fin de que nuestras consideraciones no queden restringidas a la dirección particular de los ejes coordenados y nos permita estudiar la razón de incrementos en una dirección cualquiera. La *derivada direccional* responde a tal propósito.

Antes de introducir la derivada direccional, deseamos hacer notar que en este capítulo nos limitaremos a funciones definidas en *conjuntos abiertos* S de E_n, de manera que para cada punto $\mathbf{x}$ de S existirá un entorno $N(\mathbf{x}) \subset S$. Todo punto $\mathbf{y}$ en $N(\mathbf{x})$ podrá entonces expresarse en la forma $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario; es decir, $\mathbf{u} \in E_n$ y $|\mathbf{u}| = 1$. El número λ tiene un valor absoluto no mayor que el radio de la esfera $N(\mathbf{x})$.

6-2 La derivada direccional.

6—1 Definición. *Sea f una función real definida en un conjunto abierto S de E_n y supongamos $\mathbf{x} \in S$. Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario en E_n. Definimos la derivada direccional de f en $\mathbf{x}$ según la dirección $\mathbf{u}$ como el número*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{\lambda}$$

cuando el límite existe.

Observemos que en el caso uni-dimensional, se reduce a la definición de $f'(\mathbf{x})$ si tomamos $\mathbf{u} = 1$. Asimismo, esta definición incluye la derivada parcial k-ésima como un caso particular cuando como vector unitario $\mathbf{u}$ se toma la k-ésima coordenada $\mathbf{u}_k$ (esto es, el vector que tiene nulos todos los componentes excepto el k-ésimo que vale 1). Podemos entonces escribir D_k en lugar de $D_{\mathbf{u}_k}$. Observemos también que si introducimos $F(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u})$, tenemos $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = F'(0)$.

Si una función f definida en E_n tiene derivada direccional en *cualquier* dirección $\mathbf{u}$ en el punto $\mathbf{x}$, en particular existen en el punto $\mathbf{x}$ todas las deri-

vadas parciales $D_1f, \ldots, D_nf$. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la función f antes considerada, que tiene el valor $x + y$ en (x, y) si $x = 0$ ó $y = 0$ y en los demás casos vale 1, tiene derivadas parciales finitas $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$. No obstante, si consideramos cualquier *otra* dirección $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, tenemos

$$\frac{f(\lambda a_1, \lambda a_2) - f(0, 0)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

y esta expresión no tiende hacia un límite finito cuando $\lambda \to 0$.

Un hecho algo sorprendente es el de que una función puede tener una derivada direccional finita en cualquier dirección en algún punto y no ser continua en el mismo. Por ejemplo, consideremos la función de dos variables definida por las fórmulas

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2/(x^2 + y^4), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sea $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ un vector unitario cualquiera en E_2. Tenemos

$$\frac{f(\lambda a_1, \lambda a_2) - f(0, 0)}{\lambda} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + \lambda^2 a_2^4},$$

y por lo tanto $D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = a_2^2/a_1$ si $a_1 \neq 0$. Si $a_1 = 0$, encontramos $D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = 0$. Luego, $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$ es finita para todas las direcciones $\mathbf{u}$. Por otra parte, la función f toma el valor $\frac{1}{2}$ en cada punto de la parábola $x = y^2$ (excepto en el origen, así que f evidentemente no es continua en $(0, 0)$ ya que $f(0, 0) = 0$.

Vemos así que incluso la existencia de *todas* las derivadas direccionales en un punto no implica la continuidad en dicho punto. Por esta razón las derivadas direccionales, al igual que las parciales, son una extensión en cierto modo poco satisfactoria del concepto de derivada uni-dimensional. Introducimos ahora una generalización más conveniente que implica la continuidad y, al propio tiempo, nos permite extender los principales teoremas de la teoría de la derivada uni-dimensional a las funciones de varias variables. El concepto que mejor parece servir a tal propósito es la noción de *diferencial*. Trataremos detalladamente el caso uni-dimensional antes de definir las diferenciales en n dimensiones.

6-3 Diferenciales de funciones de una variable real.

6—2 Definición. *Sea f una función de variable real definida en un intervalo abierto S de E_1. Construyamos una nueva función g de dos variables reales como sigue: Para todo punto x de S en el que $f'(x)$ exista (finita), y para todo número real t, sea*

$$g(x; t) = f'(x)t.$$

La función g así definida se llama la diferencial de f.

NOTA. Escribimos $g(x; t)$ en lugar de $g(x, t)$ para hacer notar los distintos papeles que desempeñan x y t. El primer punto x, debe ser un punto en el que $f'(x)$ exista, mientras que el segundo punto, t, es un punto arbitrario de E_1. Algunas veces decimos que $g(x; t)$ es la diferencial de f en x relativa al *incremento* t.

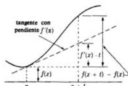


Fig. 6-1. Interpretación geométrica de la diferencial en E_1.

La diferencial puede ser interpretada geométricamente como se indica en la figura 6-1. Observemos en la figura que cuando t es « pequeño », la diferencia $f(x + t) - f(x)$ y la diferencial $f'(x)t$ son casi iguales. Este hecho, que tiene fundamental importancia se describe con precisión en el próximo teorema.

6—3 TEOREMA. *Supongamos que f tenga derivada finita en x, y consideremos $g(x; t) = f'(x)t$. Existe entonces, para todo $\varepsilon > 0$, un entorno $N(x)$ tal que para cualquier y en $N'(x)$ se verifica la desigualdad*

$$|f(y) - f(x) - g(x; y - x)| < \varepsilon|y - x|.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $N(x)$ tal que si $y \in N'(x)$ se verifica

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

Multiplicando por $|y - x|$ se obtiene el resultado deseado.

La siguiente propiedad de las diferenciales es una consecuencia inmediata de la definición.

6—4 TEOREMA. *Si existe $f'(x)$ y si $g(x; t) = f'(x)t$, para todos los números reales t, t', α y α' tenemos*

$$g(x; \alpha t + \alpha' t') = \alpha g(x; t) + \alpha' g(x; t').$$

Demostración. $g(x; \alpha t + \alpha' t') = f'(x)(\alpha t + \alpha' t') = \alpha[f'(x)t] + \alpha'[f'(x)t']$.

NOTA. Expresamos la propiedad ahora demostrada diciendo que g es *lineal* respecto de la segunda variable.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

Esto demuestra el teorema, si tomamos $a_k(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}; \mathbf{u}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

El Teorema 6-6 será utilizado ahora para probar que si la diferencial existe en todo punto, es única. En realidad, demostraremos que los n números $a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_n(\mathbf{x})$ del Teorema 6-6 son sencillamente las n derivadas parciales $D_1f(\mathbf{x}), \ldots, D_nf(\mathbf{x})$.

6—7 Teorema. (*Teorema de Unicidad*). *Supongamos que f posee una diferencial $g(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ en $\mathbf{x}$ y escribamos*

$$g(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathbf{x})t_k,$$

de acuerdo con el Teorema 6-6. Entonces cada una de las derivadas parciales $D_kf(\mathbf{x})$ existe y se verifica

$$a_k(\mathbf{x}) = D_kf(\mathbf{x}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostración. Según la hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno $N(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{y} \in N'(\mathbf{x})$ implica $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}; \mathbf{y} - \mathbf{x})| < \varepsilon\,|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Según el Teorema 6-6, tenemos también

$$g(\mathbf{x}; \mathbf{y} - \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{n} a_r(\mathbf{x})(y_r - x_r).$$

Escribiendo $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k$, donde $|\lambda|$ es menor que el radio de $N(\mathbf{x})$ y $\mathbf{u}_k$ es el vector unidad coordenada k-ésima de $\mathbf{u}$, tenemos

$$0 < |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = |\lambda|, \qquad y_k - x_k = \lambda, \qquad y_r - x_r = 0, \qquad \text{si } r \neq k.$$

Por lo cual, la desigualdad fundamental se convierte en

$$|f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x}) - \lambda a_k(\mathbf{x})| < \varepsilon|\lambda|.$$

Dividiendo por $|\lambda|$, encontramos

$$\left| \frac{f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x})}{\lambda} - a_k(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon,$$

y esto implica que $D_kf(\mathbf{x})$ existe y que tiene por valor $a_k(\mathbf{x})$.

Hemos demostrado por consiguiente que *si* una función f posee una diferencial $g(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ en $\mathbf{x}$, esta diferencial es única y debe tener necesariamente la forma

$$g(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{n} D_kf(\mathbf{x})t_k, \qquad \text{si } \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n).$$

Es costumbre utilizar el símbolo df en lugar de g para la diferencial. Asimismo suelen utilizarse los símbolos $dx_1, \ldots, dx_n$ en lugar de $t_1, \ldots, t_n$ para los componentes de $\mathbf{t}$, en cuyo caso el símbolo $d\mathbf{x}$ se usa para reemplazar el vector $\mathbf{t}$. El Teorema 6-7 establece que

$$df(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{x}) dx_k, \quad \text{si} \quad d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_n).$$

Algunas veces esto se expresa más brevemente con la siguiente notación:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

En realidad está última fórmula se utiliza a menudo como definición de df y las propiedades dadas en nuestra definición son entonces demostradas como teoremas.

Es muy fácil ver que la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ existirá en cualquier dirección $\mathbf{u}$ si f tiene diferencial en $\mathbf{x}$. En realidad, la derivada direccional es sencillamente un caso particular de la diferencial.

6—8 Teorema. *Sean f una función diferenciable en un punto $\mathbf{x}$ de un conjunto abierto S de E_n y $\mathbf{u}$ un vector unitario de E_n. Existe entonces la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ y es*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}; \mathbf{u}).$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $N(\mathbf{x}; \delta)$ tal que

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - df(\mathbf{x}; \mathbf{y} - \mathbf{x})| < \varepsilon|\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \qquad \text{si } \mathbf{y} \in N'(\mathbf{x}; \delta).$$

Dado el vector unidad $\mathbf{u}$, para todo $\lambda \neq 0$ real tal que $|\lambda| < \delta$, el punto $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}$ pertenecerá a $N'(\mathbf{x}; \delta)$. Poniendo $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}$ en la desigualdad anterior, obtenemos la relación

$$\left| \frac{f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{\lambda} - df(\mathbf{x}; \mathbf{u}) \right| < \varepsilon, \qquad \text{si } 0 < |\lambda| < \delta.$$

Pero esto significa que $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ existe y que tiene por valor $df(\mathbf{x}; \mathbf{u})$.

En lo que sigue, demostramos que la existencia de la diferencial df en $\mathbf{x}$ implica la continuidad de f en $\mathbf{x}$. En realidad, podemos demostrar algo más, a saber, que f satisface la condición de Lipschitz en el punto $\mathbf{x}$. Esto, como consecuencia, proporcionará la continuidad.

6—9 Teorema. *Sea f una función definida en un conjunto abierto S de E_n y supongamos que f es diferenciable en el punto $\mathbf{x}$ de S. La función f satisface en $\mathbf{x}$ la condición de Lipschitz. Es decir, existe un número positivo M y un entorno $N(\mathbf{x})$ tal que*

$$\mathbf{y} \in N'(\mathbf{x}) \quad \textit{implica} \quad |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < M|\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

Demostración. Tomando $\varepsilon = 1$ en la parte c) de la Definición 6-5, existe un entorno $N(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{y} \in N'(\mathbf{x})$ implica

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - df(\mathbf{x}; \mathbf{y} - \mathbf{x})| < |\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

Esto conduce a la desigualdad

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < |df(\mathbf{x}; \mathbf{y} - \mathbf{x})| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

Pero, según el Teorema 6-7, tenemos

$$|df(\mathbf{x}; \mathbf{y} - \mathbf{x})| = \left| \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{x})(y_k - x_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |D_k f(\mathbf{x})| \, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

El teorema se deduce si tomamos $M = 1 + \sum_{k=1}^{n} |D_k f(\mathbf{x})|$.

6—10 TEOREMA. *Si f es diferenciable en $\mathbf{x}$, es continua en $\mathbf{x}$.*

Demostración. Según el Teorema 6-9 existen un número positivo M y un entorno $N(\mathbf{x})$ tales que $\mathbf{y} \in N'(\mathbf{x})$ implica $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < M\,|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Dado $\varepsilon > 0$. elegimos $\delta > 0$ de modo que $\delta < \varepsilon/M$, y también que δ sea menor que el radio de $N(\mathbf{x})$. Entonces si $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \delta$ se verifica $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$, y esto establece la continuidad.

NOTA. De hecho, hemos demostrado, que una función que satisface la condición de Lipschitz en $\mathbf{x}$ debe ser también continua en $\mathbf{x}$.

6-5 El vector gradiente. Antes de seguir el desarrollo de la teoría de diferenciales, vamos a formular nuevamente algunos de nuestros resultados en terminología vectorial.

6—11 DEFINICIÓN. *Dada una función f que posee las n derivadas parciales $D_1 f, \ldots, D_n f$ en el punto $\mathbf{x}$ de E_n. La función vectorial representada por ∇f y definida por la igualdad*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (D_1 f(\mathbf{x}), \ldots, D_n f(\mathbf{x}))$$

se llama gradiente de f.

Algunas veces escribimos la igualdad simbólica

$$\nabla f = (D_1 f, \ldots, D_n f)$$

e imaginamos ∇f como un « vector » cuyo « componente » k-ésimo es la función $D_k f$. En lugar de escribir $(\nabla f)_k$ para el componente k-ésimo, ponemos $D_k f$. (El símbolo ∇ se denomina « nabla »).

6—12 DEFINICIÓN. *Dados dos vectores en E_n, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, el número real representado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y definido por la igualdad*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

se llama producto interior de **a** *y* **b**.

Se deduce inmediatamente de esta definición que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \qquad (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \text{y} \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

para todos los vectores **a**, **b**, **c** en E_n y para todo número real λ. Utilizando productos interiores, la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 1-5) toma la forma

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|.$$

Empleando estos conceptos vectoriales, podemos establecer de nuevo algunos de los resultados anteriores de una forma muy simple y elegante.

6—13 TEOREMA. *Si f es una función diferenciable en el punto* **x** *de E_n, existe el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ y tenemos*

$$df(\mathbf{x};\ \mathbf{t}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}, \qquad \text{si } \mathbf{t} \in E_n.$$

La derivada direccional $D_\mathbf{u}f(\mathbf{x})$ también existe y viene dada por

$$D_\mathbf{u}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \qquad \text{si } \mathbf{u} \in E_n, \quad |\mathbf{u}| = 1.$$

Además, si existe un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *tal que*

$$df(\mathbf{x};\ \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}$$

para todo **t** *de E_n, entonces* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *debe ser el vector gradiente* $\nabla f(\mathbf{x})$.

Demostración. La primera proposición es el Teorema 6-7 y la segunda es el Teorema 6-8. La última es consecuencia inmediata del Teorema 6-7.

Observemos que la fórmula $df(\mathbf{x};\ \mathbf{t}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}$ posee una gran semejanza a la igualdad $df(x;\ t) = f'(x)t$, que es válida en el caso uni-dimensional. Esto sugiere que el vector gradiente ∇f juegue el mismo papel en E_n que el de la derivada f' en E_1. Más adelante, en otras cuestiones, veremos esto con mayor evidencia. Por ejemplo, si f tiene un máximo o un mínimo relativos en un punto interior **x** de un conjunto abierto S de E_n, y existe $\nabla f(\mathbf{x})$, entonces debe ser $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. (Ver el Ejercicio 6-1 y compararlo con el Teorema 5-8.)

6-6 Diferenciales de las funciones compuestas y regla de la cadena. Llegamos ahora a un importante teorema que nos proporciona una extensión de la « regla de la cadena » (Teorema 5-5) del capítulo anterior. En una dimensión, dicha regla nos da una fórmula para la diferenciación de una función compuesta $h = gf$ expresada mediante las derivadas de g y f. La fórmula establece que

1) $$h'(t) = g'[f(t)]f'(t).$$

Cuando consideramos funciones de varias variables, el tipo más sencillo de función compuesta se presenta de la manera siguiente: Dada una función g de n variables reales, sea $g(\mathbf{x}) = g(x_1, \ldots, x_n)$. Cada una de las variables $x_1, \ldots, x_n$ es reemplazada por una función de otra variable real z, $x_k = f_k(z)$, y esto transforma g en una nueva función h, $h(z) = g[f_1(z), \ldots, f_n(z)]$. La extensión de la regla de la cadena a este caso nos dice cómo debe calcularse la derivada $h'(z)$ mediante las derivadas parciales de g y las derivadas de $f_1, \ldots, f_n$. La fórmula se presenta como una suma de términos parecidos a 1), es decir,

2) $$h'(z) = \sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(z)] f'_k(z),$$

donde hemos escrito $\mathbf{f}(z)$ para representar el vector $(f_1(z), \ldots, f_n(z))$. La suma que aparece en esta igualdad puede también expresarse como un *producto interior* de dos vectores, y la fórmula 2) toma la forma

3) $$h'(z) = \nabla g[\mathbf{f}(z)] \cdot \mathbf{f}'(z),$$

donde $\mathbf{f}'(z)$ representa el vector $(f'_1(z), \ldots, f'_n(z))$. De esta manera, la extensión de la regla de la cadena tiene un parecido más íntimo con el resultado en el caso uni-dimensional, salvo que ahora el gradiente ∇g desempeña el papel de la derivada g'.

Completamente análogo es el caso en que la nueva variable $\mathbf{z}$ es m-dimensional, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. La función compuesta h así formada es una función de m variables $z_1, \ldots, z_m$, y la regla de la cadena en este caso consiste en un conjunto de m fórmulas, una para cada derivada parcial $D_1 h, \ldots, D_m h$. La fórmula para $D_r h(\mathbf{z})$ es otra vez una suma, es decir,

4) $$D_r h(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] D_r f_k(\mathbf{z}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Si se escribe $D_r \mathbf{f}(\mathbf{z})$ para representar al vector $(D_r f_1(\mathbf{z}), \ldots, D_r f_n(\mathbf{z}))$, esta suma puede expresarse también como un producto interior y la fórmula 4) toma una forma otra vez parecida al caso uni-dimensional:

5) $$D_r h(\mathbf{z}) = \nabla g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] \cdot D_r \mathbf{f}(\mathbf{z}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Se trata ahora de demostrar estas fórmulas en la hipótesis de que las funciones $f_1, \ldots, f_n$ y g sean diferenciables. Naturalmente, tan sólo necesitamos demostrar 4), ya que las demás son meros casos particulares.

6–14 TEOREMA. *Sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ una función vectorial definida en un conjunto abierto Z de E_m y cuyos valores pertenecen a E_n, y sea g una función real definida en un conjunto abierto X de E_n que contiene $\mathbf{f}(Z)$. Consideremos un punto $\mathbf{z}$ de Z en el que cada función f_k es diferenciable*

y supongamos que g es diferenciable en $\mathbf{f}(\mathbf{z})$. La función compuesta $h = g\mathbf{f}$ (definida en Z por la igualdad $h(\mathbf{z}) = g[\mathbf{f}(\mathbf{z})]$) es entonces diferenciable en $\mathbf{z}$. Además, el vector gradiente $\nabla h(\mathbf{z})$ viene dado mediante la fórmula

6)
$$\nabla h(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] \nabla f_k(\mathbf{z}).$$

NOTA. Igualando los r-ésimos componentes en esta igualdad vectorial, encontramos que cada derivada parcial $D_r h(\mathbf{z})$ viene dada por las fórmulas 4) y 5). La fórmula correspondiente a $D_r h$ se escribe algunas veces así:

7)
$$\frac{\partial h}{\partial z_r} = \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial z_r} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial z_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Demostración. Si demostramos que $dh(\mathbf{z}; \mathbf{t})$ existe y que tiene por valor

$$dh(\mathbf{z}; \mathbf{t}) = \left(\sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] \nabla f_k(\mathbf{z}) \right) \cdot \mathbf{t},$$

entonces 6) se deducirá del teorema de unicidad (Teorema 6-7). A tal fin debemos encontrar, para todo $\varepsilon > 0$, un entorno $N(\mathbf{z})$ tal que $\mathbf{z} + \mathbf{t} \in N'(\mathbf{z})$ implique

8)
$$\left| h(\mathbf{z} + \mathbf{t}) - h(\mathbf{z}) - \left(\sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] \nabla f_k(\mathbf{z}) \right) \cdot \mathbf{t} \right| < \varepsilon |\mathbf{t}|.$$

Escribamos $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$ e $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{z} + \mathbf{t})$. Entonces $h(\mathbf{z} + \mathbf{t}) - h(\mathbf{z}) = g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})$. Puesto que g es diferenciable en $\mathbf{x}$, dado $\varepsilon' > 0$ existe un entorno $N(\mathbf{x}; \delta)$ tal que

9)
$$|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) - \nabla g(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \le \varepsilon' |\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \qquad \text{si } \mathbf{y} \in N(\mathbf{x}; \delta).$$

Ahora bien, $\mathbf{f}$ satisface a la condición de Lipschitz en el punto $\mathbf{z}$, y por tanto existen un entorno $N(\mathbf{z}; r_0)$ y una constante $M > 0$ tales que $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < M|\mathbf{t}|$ si $\mathbf{z} + \mathbf{t} \in N'(\mathbf{z}; r_0)$. Si tomamos $r_0 < \delta/M$ y $\mathbf{z} + \mathbf{t}$ en $N'(\mathbf{z}; r_0)$, entonces $\mathbf{y} \in N(\mathbf{x}; \delta)$ y la 9) se transforma en

10)
$$|h(\mathbf{z} + \mathbf{t}) - h(\mathbf{z}) - \nabla g(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| < \varepsilon' M |\mathbf{t}|.$$

En lo que sigue, demostraremos que existen una constante $A \ge 0$ y un entorno $N(\mathbf{z}; r)$ tales que

11)
$$\left| \nabla g(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \left(\sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] \nabla f_k(\mathbf{z}) \right) \cdot \mathbf{t} \right| \le \varepsilon' n A |\mathbf{t}|$$

siempre que $\mathbf{z} + \mathbf{t} \in N'(\mathbf{z}; r)$. La 11), unida a la 10), implica la 8) si tomamos $\varepsilon' = \varepsilon/(M + nA)$ y $N(\mathbf{z}) = N(\mathbf{z}; r) \cap N(\mathbf{z}; r_0)$.

El primer miembro de 11) puede escribirse así:

12)
$$\left| \sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] \{f_k(\mathbf{z} + \mathbf{t}) - f_k(\mathbf{z}) - \nabla f_k(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{t}\} \right|.$$

Puesto que cada función f_k es diferenciable en $\mathbf{z}$, existe un entorno $N(\mathbf{z}; r_k)$ tal que

$$|f_k(\mathbf{z} + \mathbf{t}) - f_k(\mathbf{z}) - \nabla f_k(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{t}| < \varepsilon'|\mathbf{t}|, \qquad \text{si } \mathbf{z} + \mathbf{t} \in N'(\mathbf{z}; r_k).$$

Si A representa el mayor de los n números $|D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})]|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, y si r es el menor de los radios $r_1, \ldots, r_n$ encontramos que la expresión de 12) está acotada por $nA\varepsilon'|\mathbf{t}|$ siempre que $\mathbf{z} + \mathbf{t} \in N'(\mathbf{z}; r)$. Esto demuestra 11) y por tanto 8).

6-7 Regla invariante de Cauchy. Consecuencia inmediata de la regla de la cadena que acabamos de comentar es un importante teorema relativo a la diferenciación de funciones compuestas (conocido por el nombre de *regla invariante de Cauchy*).

Bajo las hipótesis del Teorema 6-14, escribamos la diferencial de g en la notación siguiente

$$dg(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) = \nabla g(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}, \qquad \text{donde } d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_n) \in E_n,$$

y escribamos también

$$dh(\mathbf{z}; d\mathbf{z}) = \nabla h(\mathbf{z}) \cdot d\mathbf{z}, \qquad \text{donde } d\mathbf{z} = (dz_1, \ldots, dz_m) \in E_m.$$

Puesto que $h = g\mathbf{f}$, los valores $h(\mathbf{z})$ pueden obtenerse a partir de $g(\mathbf{x})$ haciendo la sustitución formal $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$. La regla invariante de Cauchy nos dice que el valor de la diferencial $dh(\mathbf{z}; d\mathbf{z})$ también puede obtenerse a partir del valor de la diferencial $dg(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$ mediante una sustitución formal: $\mathbf{x}$ debe reemplazarse por $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ y el componente k-ésimo de $d\mathbf{x}$ (es decir, dx_k) debe ser reemplazado por la diferencial $df_k(\mathbf{z}; d\mathbf{z})$. Este tipo de manejo formal es particularmente útil en la ejecución de cálculos con diferenciales.

6—15 TEOREMA. *Con las hipótesis del Teorema 6-14, tenemos*

$$dh(\mathbf{z}; \mathbf{t}) = dg[\mathbf{f}(\mathbf{z}); df_1(\mathbf{z}; \mathbf{t}), \ldots, df_n(\mathbf{z}; \mathbf{t})]$$

para todo $\mathbf{t}$ *de* E_m.

Demostración. $dg[\mathbf{f}(\mathbf{z}); df_1(\mathbf{z}; \mathbf{t}), \ldots, df_n(\mathbf{z}; \mathbf{t})]$

$$= \sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] df_k(\mathbf{z}; \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] \sum_{r=1}^{m} D_r f_k(\mathbf{z}) t_r$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] D_r f_k(\mathbf{z}) \right) t_r$$

$$= \sum_{r=1}^{m} D_r h(\mathbf{z}) t_r = dh(\mathbf{z}; \mathbf{t}).$$

En la práctica, se adoptan ciertos convenios de notación que tienden a la simplificación del cálculo con diferenciales. Por ejemplo, sea f una función de dos variables y consideremos la ecuación

$$z = f(x, y).$$

Es costumbre entonces utilizar el símbolo dz para representar la diferencial $df(x, y; dx, dy)$. Así, por ejemplo, de la ecuación

13) $$z = e^{2xy}$$

obtenemos

14) $$dz = 2ye^{2xy}dx + 2xe^{2xy}dy.$$

Cuando se escribe esto, se sobreentiende que la expresión que se iguala a dz en la 14) es la diferencial de la función f definida por

15) $$f(x, y) = e^{2xy}.$$

Supongamos ahora que se introduce un «cambio de variable» en 13), por ejemplo, mediante las ecuaciones

16) $$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta.$$

La sustitución formal de x e y en 13) por las expresiones 16) transforma 13) en

17) $$z = e^{2r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta} = e^{r^2 \operatorname{sen} 2\theta}.$$

Adoptando el convenio de notación antes mencionado, obtenemos, a partir de 17),

18) $$dz = 2r \operatorname{sen} 2\theta\, e^{r^2 \operatorname{sen} 2\theta}\, dr + 2r^2 \cos 2\theta\, e^{r^2 \operatorname{sen} 2\theta}\, d\theta,$$

donde dz representa ahora la diferencial de la función h definida por

19) $$h(r, \theta) = e^{r^2 \operatorname{sen} 2\theta}.$$

Se nos presenta ahora una dificultad: el mismo símbolo dz está siendo utilizado para la diferencial de la función f definida en 15) y también para la diferencial de la función h definida en 19). La regla invariante de Cauchy nos permite resolver tal dificultad y justificar el doble uso del símbolo dz. De hecho, la función h definida en 19) es, en realidad, la compuesta de f con la función definida en 16); es decir

$$h(r, \theta) = f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta).$$

Si aplicamos ahora nuestro convenio a las 16), podemos escribir

20) $$dx = \cos\theta\, dr - r \operatorname{sen}\theta\, d\theta, \qquad dy = \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta.$$

La regla invariante de Cauchy nos dice entonces que cuando las expresiones de x, y, dx dy, de las 16) y 20) se sustituyen en el segundo miembro de 14), se obtiene el segundo miembro de 18). Es fácil comprobarlo en este ejemplo.

6-8 El Teorema del Valor Medio para funciones de varias variables. La extensión del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial a las funciones de varias variables, es lo que ahora vamos a obtener. Antes de establecer el teorema, sin embargo, definimos primero lo que entendemos por segmento rectilíneo en E_n.

6-16 DEFINICIÓN. *Si* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *son dos puntos distintos en* E_n, *por segmento rectilíneo* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *que une* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$, *entendemos el conjunto*

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y},\ 0 < \theta < 1\}.$$

NOTA. $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ también se llama el segmento rectilíneo *abierto*. El segmento rectilíneo *cerrado*, $L[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, se define análogamente, utilizando $0 \leq \theta \leq 1$. Un segmento rectilíneo abierto no es un conjunto abierto si $n > 1$, pero un segmento rectilíneo cerrado es siempre un conjunto cerrado.

6-17 TEOREMA. (*Teorema del Valor Medio en* E_n). *Supongamos que* f *es diferenciable en cada punto de un conjunto abierto* S *de* E_n. *Sean* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *dos puntos de* S *tales que el segmento rectilíneo* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset S$. *Existe entonces un punto* $\mathbf{z}$ *de* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *tal que*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Demostración. Mantengamos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ fijos, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, e introduzcamos una nueva función h por medio de la ecuación

$$h(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}), \qquad \text{si } 0 \leq \lambda \leq \rho,$$

donde $\mathbf{u}$ es el vector unitario dado por $\mathbf{u} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\rho$, $\rho = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Entonces $\mathbf{x} + \rho\mathbf{u} = \mathbf{y}$ y tenemos $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = h(\rho) - h(0)$. La existencia de la diferencial de f en S implica la existencia de la derivada h' en el intervalo cerrado $0 \leq \lambda \leq \rho$. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio unidimensional y escribir

$$h(\rho) - h(0) = \rho h'(\bar{\rho}), \qquad \text{donde } 0 < \bar{\rho} < \rho.$$

Para calcular $h'(\bar{\rho})$, conservamos λ fijo, $0 < \lambda < \rho$, e introducimos una nueva función g mediante la ecuación

$$g(\alpha) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u}) = h(\lambda + \alpha), \qquad \text{si } 0 \leq \alpha \leq \rho - \lambda.$$

Entonces $g'(0) = D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}) = h'(\lambda)$. Poniendo $\lambda = \bar{\rho}$, obtenemos

$$h'(\bar{\rho}) = D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x} + \bar{\rho}\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{x} + \bar{\rho}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u},$$

donde $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \bar{\rho}\mathbf{u}$. Esto demuestra el teorema, ya que $\mathbf{z} \in L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

6-9 Una condición suficiente para la existencia de la diferencial. Hasta ahora hemos ido deduciendo consecuencias dando por supuesta la existencia de la diferencial de una función. Asimismo hemos visto que ni la existencia de todas las derivadas parciales ni la de todas las derivadas direccionales es suficiente para establecer la existencia de la diferencial (puesto que ni una ni otra implican la continuidad). Sin embargo, demostraremos que la existencia de derivadas parciales *continuas* implica la existencia de la diferencial.

6—18 TEOREMA. *Sea f una función definida en un conjunto abierto S de E_n y supongamos que las n derivadas parciales $D_1f, \ldots, D_nf$ existan y sean continuas en el punto $\mathbf{x}$ de S. En tal caso, f es diferenciable en $\mathbf{x}$.*

Demostración. La única forma posible para $df(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ es, naturalmente, el producto interno $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{x}) t_k$. Ésta es claramente lineal en $\mathbf{t}$. Toda la dificultad en la demostración radica en comprobar que la anterior expresión satisface la desigualdad fundamental *c*) de la Definición 6-5. Para probarlo expresaremos la diferencia $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$ como una suma de n términos, donde el k-ésimo término será una « aproximación » de $D_k f(\mathbf{x})(y_k - x_k)$.

Ante todo, la continuidad de las parciales $D_1f, \ldots, D_nf$ nos dice que, dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $N(\mathbf{x};\, \delta)$ tal que para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$21) \qquad |D_k f(\mathbf{y}) - D_k f(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{n}, \qquad \text{si } \mathbf{y} \in N(\mathbf{x};\, \delta).$$

(En realidad, existe un entorno distinto para cada k, pero tomamos como δ el menor de los radios.) En el resto de la demostración suponemos que $\mathbf{y}$ pertenece al entorno $N'(\mathbf{x};\, \delta/2)$. De manera que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario y $|\lambda| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \delta/2$. Podemos también escribir $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$, donde $\mathbf{u}_k$ es el k-ésimo vector coordenado unidad. La diferencia $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$ se expresa ahora como una suma por medio de la identidad siguiente:

$$22) \qquad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_k) - f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1})],$$

donde $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son ciertos vectores en E_n tales que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}$. Si los vectores $\mathbf{v}_k$ se definen de manera que satisfagan la relación recurrente $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + a_k\mathbf{u}_k$, tenemos

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{v}_n = \mathbf{u},$$

y el término general de la suma 22) se convierte en

$$f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_k) - f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1}) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1} + \lambda a_k\mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1}).$$

Esta es la diferencia de los valores de la función en dos puntos que difieren tan sólo en su k-ésima coordenada. Además, cada uno de los dos puntos pertenece al entorno $N'(\mathbf{x};\ \delta/2)$, ya que $|\mathbf{v}_k|^2 = a_1^2 + \cdots + a_k^2 \leq |\mathbf{u}|^2 = 1$ y $|\lambda\mathbf{v}_k| \leq |\lambda| < \delta/2$.

Mantengamos ahora fijo λ e introduzcamos una nueva función g, así:

$$g(\alpha) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1} + \alpha\mathbf{u}_k), \qquad \text{si } -|\lambda a_k| \leq \alpha \leq |\lambda a_k|.$$

La igualdad anterior puede escribirse entonces en la forma

$$f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_k) - f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1}) = g(\lambda a_k) - g(0).$$

Además, la derivada $g'(\alpha)$ existe para cada α en el intervalo cerrado $-|\lambda a_k| \leq \alpha \leq |\lambda a_k|$. De hecho, tenemos

$$\frac{g(\alpha + h) - g(\alpha)}{h} = \frac{f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1} + \alpha\mathbf{u}_k + h\mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1} + \alpha\mathbf{u}_k)}{h},$$

de manera que cuando $h \to 0$ encontramos $g'(\alpha) = D_kf(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1} + \alpha\mathbf{u}_k)$. Puede ahora aplicarse el Teorema del Valor Medio uni-dimensional y obtenemos

$$g(\lambda a_k) - g(0) = \lambda a_k g'(\alpha_k), \qquad \text{donde } -|\lambda a_k| < \alpha_k < |\lambda a_k|.$$

La igualdad 22) se convierte entonces en

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) &= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k D_k f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{u}_k) \\ &= \nabla f(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k [D_k f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{u}_k) \\ &\qquad - D_k f(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Puesto que $|\lambda\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{u}_k| \leq |\lambda| + |\lambda a_k| \leq 2|\lambda| < \delta$, podemos aplicar la desigualdad 21) a cada término de la suma de la igualdad 22) modificada, y encontramos

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{x})| < |\lambda|\varepsilon = \varepsilon|\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

y como $\mathbf{y}$ era un punto arbitrario en $N'(\mathbf{x};\ \delta/2)$, esta última desigualdad demuestra el teorema.

NOTA. La condición de que las n parciales sean continuas en $\mathbf{x}$, si bien suficiente, de ningún modo es necesaria para la existencia de la diferencial en $\mathbf{x}$. En efecto, consideremos el caso particular en el que f pueda expresarse como suma de n funciones, por ejemplo

$$f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n), \qquad \text{si } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$

donde f_k es una función de una sola variable uni-dimensional x_k. En tal caso la mera existencia de las parciales $D_1f, \ldots, D_nf$ bastará para establecer la existencia de df. Esto es de fácil demostración y lo dejamos como un ejercicio. (Ver Ejercicio 6-3.) Un resultado parecido, pero algo más general, se encuentra en el Ejercicio 6-4.

6-10 Derivadas parciales de orden superior. Si una función f, definida en un conjunto abierto S de E_n, admite derivadas parciales finitas, entonces las derivadas $D_1f, \ldots, D_nf$ son nuevas funciones definidas también en S y podemos considerar sus derivadas parciales. Esto origina las derivadas parciales de *segundo orden*.

6—19 DEFINICIÓN. *Sea f una función definida en un conjunto abierto S de E_n, y supongamos que existe la derivada parcial D_kf en S. Entonces $D_{r,k}f$ representará la derivada parcial de D_kf con respecto a la variable r-ésima, esto es, $D_{r,k}f = D_r(D_kf)$ siempre que esta derivada exista. Las derivadas de orden superior se definen análogamente.*

Otras notaciones son

$$D_{r,k}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r\,\partial x_k}, \qquad D_{p,q,r}f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_p\,\partial x_q\,\partial x_r}.$$

El ejemplo

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

prueba que $D_{1,2}f(x, y)$ no es necesariamente la misma que $D_{2,1}f(x, y)$. Efectivamente, en este ejemplo tenemos

$$D_1f(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

y $D_1f(0, 0) = 0$. De ahí, $D_1f(0, y) = -y$ para todo y y por consiguiente $D_{2,1}f(0, y) = -1$, $D_{2,1}f(0, 0) = -1$. Por otra parte, tenemos

$$D_2f(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

y $D_2f(0, 0) = 0$, así que $D_2f(x, 0) = x$ para todo x. Por tanto, $D_{1,2}f(x, 0) = 1$, $D_{1,2}f(0, 0) = 1$, y vemos que $D_{2,1}f(0, 0) \neq D_{1,2}f(0, 0)$.

El próximo teorema nos proporciona un criterio para determinar cuándo las dos derivadas parciales mixtas $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ son iguales.

6—20 TEOREMA. *Si D_1f, D_2f, y $D_{2,1}f$ son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0) de E_2, entonces existe $D_{1,2}f(x_0, y_0)$ y se verifica*

$$D_{1,2}f(x_0, y_0) = D_{2,1}f(x_0, y_0).$$

Demostración. Tenemos que demostrar que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{D_2f(x_0 + h, y_0) - D_2f(x_0, y_0)}{h}$$

existe y que tiene el valor $D_{2,1}f(x_0, y_0)$. Sea (x, y) un punto en el entorno de (x_0, y_0) dado en el enunciado del teorema. Tenemos

$$D_2f(x, y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Luego el numerador del cociente que consideramos al principio puede escribirse en la forma

$$D_2f(x_0 + y, h_0) - D_2f(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k}$$

$$- \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Manteniendo fijo k, introduzcamos una nueva función g_k mediante la relación

$$g_k(t) = f(x_0 + t, y_0 + k) - f(x_0 + t, y_0).$$

Así podemos escribir

$$D_2f(x_0 + h, y_0) - D_2f(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{g_k(h) - g_k(0)}{k} = \lim_{k\to 0} h \frac{g'_k(\bar{h})}{k},$$

donde $\bar{h}$ está comprendido entre 0 y h. (Observemos que $\bar{h}$ depende también de k, ya que g_k depende de k.) La derivada de g_k puede calcularse así:

$$g'_k(t) = D_1f(x_0 + t, y_0 + k) - D_1f(x_0 + t, y_0)$$

y, por tanto, tenemos

$$\frac{D_2f(x_0 + h, y_0) - D_2f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{D_1f(x_0 + \bar{h}, y_0 + k) - D_1f(x_0 + \bar{h}, y_0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_0 + \bar{h}, \bar{y}),$$

estando $\bar{y}$ comprendido entre y_0 e $y_0 + k$.

Queda por demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_0 \mp h, \bar{y}) = D_{2,1}f(x_0, y_0).$$

Cuando $k \to 0$, entonces $\bar{y} \to y_0$, pero el comportamiento de $\bar{h}$ como función de k no es conocido. Si $\bar{h}$ fuese *independiente* de k, podríamos escribir

$$\lim_{k \to 0} D_{2,1}f(x_0 + \bar{h}, \bar{y}) = D_{2,1}f(x_0 + \bar{h}, y_0)$$

debido a la continuidad de $D_{2,1}f$ en un entorno de (x_0, y_0). Ya que $\bar{h} \to 0$ cuando $h \to 0$, obtendríamos

$$\lim_{h \to 0} D_{2,1}f(x_0 + \bar{h}, y_0) = D_{2,1}f(x_0, y_0).$$

Sin embargo, el hecho de que $\bar{h}$ depende de k en forma desconocida hace necesario un razonamiento algo más complicado.

Definamos $F(h)$ como el límite

$$F(h) = \lim_{k \to 0} D_{2,1}f(x_0 + \bar{h}, \bar{y}),$$

cuya existencia sabemos por lo que hemos ya demostrado. El teorema será demostrado si probamos que $\lim_{h \to 0} F(h) = D_{2,1}f(x_0, y_0)$.

Tomemos un $\varepsilon > 0$. Existe entonces un entorno $N(x_0, y_0)$, de radio δ, tal que

$$|D_{2,1}f(x, y) - D_{2,1}f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{si } (x, y) \in N(x_0, y_0).$$

El punto $(x_0 + \bar{h}, \bar{y})$ estará en el entorno $N(x_0, y_0)$ si h y k se eligen de manera que $|h| < \delta/2$ y $|k| < \delta/2$. Fijando h, siendo $|h| < \delta/2$, tendremos

$$0 \leq |D_{2,1}f(x_0 + \bar{h}, \bar{y}) - D_{2,1}f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{si } |k| < \frac{\delta}{2}.$$

Si en esta desigualdad hacemos que $k \to 0$, el término $D_{2,1}f(x_0 + \bar{h}, \bar{y})$ tiene por límite $F(h)$ y los demás son independientes de k, así que podemos escribir

$$0 \leq |F(h) - D_{2,1}f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

con tal de que $|h| < \delta/2$. Pero esto significa precisamente que

$$\lim_{h \to 0} F(h) = D_{2,1}f(x_0, y_0)$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

NOTA. Podría observarse que el teorema subsiste si en la demostración se cambian entre sí los papeles de $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$.

Si f es una función de dos variables, son cuatro las derivadas parciales de segundo orden a considerar; a saber: $D_{1,1}f$, $D_{1,2}f$, $D_{2,1}f$ y $D_{2,2}f$. Acabamos

de demostrar que si f está sujeta a convenientes restricciones tan sólo tres de esas derivadas son distintas.

El número de derivadas parciales de orden k que pueden formarse es 2^k. Si todas ellas son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0), algunas de las parciales mixtas serán iguales. Cada parcial mixta es de la forma $D_{r_1, \ldots, r_k}f$, donde cada r_j es ó 1 ó 2. Si tenemos dos de esas parciales mixtas, $D_{r_1, \ldots, r_k}f$, y $D_{p_1, \ldots, p_k}f$, donde los k índices $(r_1, \ldots, r_k)$ forman una permutación de los k índices $(p_1, \ldots, p_k)$, tales parciales mixtas serán iguales en (x_0, y_0) si las 2^k parciales son todas continuas en un entorno de (x_0, y_0). Esta afirmación puede demostrarse fácilmente por el método de inducción, utilizando el Teorema 6-20 (que es el caso $k = 2$). Omitimos la demostración para un k cualquiera. De lo dicho se deduce que entre las 2^k derivadas parciales de orden k, existen únicamente $k + 1$ parciales en general *distintas*, es decir, todas las de la forma $D_{r_1, \ldots, r_k}f$, donde la agrupación de los k índices $(r_1, \ldots, r_k)$ toma las $k + 1$ formas siguientes:

$$(2, 2, \ldots, 2), \quad (1, 2, 2, \ldots, 2), \quad (1, 1, 2, \ldots, 2), \ldots, \quad (1, 1, \ldots, 1, 2), \quad (1, \ldots, 1).$$

Proposiciones análogas, naturalmente, son válidas para funciones de n variables. En este caso, pueden formarse n^k derivadas parciales de orden k. La continuidad de todas esas parciales en el punto $\mathbf{x}$ implica que $D_{r_1, \ldots, r_k}f(\mathbf{x})$ no varía cuando los índices $r_1, \ldots, r_k$ son permutados. En este caso cada r_i es un entero positivo $\leq n$.

6-11 Fórmula de Taylor para funciones de varias variables. La fórmula de Taylor (Teorema 5-14) será ahora extendida a las funciones de varias variables. A fin de establecer el teorema general en forma parecida al caso unidimensional, introducimos antes las diferenciales de orden superior.

6—21 DEFINICIÓN. *Sea f una función real definida en un subconjunto de E_n. La diferencial de segundo orden d^2f es una función de dos variables n-dimensionales definida, para todos los puntos $\mathbf{x}$ de E_n en los que f admite derivadas parciales de segundo orden y para todo $\mathbf{t}$ de E_n, mediante la igualdad*

$$d^2f(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j}f(\mathbf{x})t_jt_i, \quad \text{si } \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n).$$

La diferencial de tercer orden d^3f se define como sigue:

$$d^3f(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{i,j,k}f(\mathbf{x})t_kt_jt_i,$$

y la diferencial m-ésima d^mf se define en forma parecida (cuando existan todas las derivadas parciales de orden m).

NOTA. Las diferenciales de orden superior no gozan de todas las propiedades de las diferenciales de primer orden. Por ejemplo, no son lineales en la segunda variable, ni satisfacen la regla invariante de Cauchy. (Ver Ejercicio 6-25.)

6—22 TEOREMA. *Sea f una función que admita derivadas parciales continuas de orden m en cada punto de un conjunto abierto S de E_n. Si $\mathbf{a} \in S, \mathbf{b} \in S, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, y si $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset S$, entonces existe un punto $\mathbf{z}$ en el segmento rectilíneo $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} d^k f(\mathbf{a}; \mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{m!} d^m f(\mathbf{z}; \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Demostración. Definamos una nueva función g de una variable real mediante la ecuación

$$g(t) = f[t\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a}], \qquad \text{si } 0 \le t \le 1.$$

Entonces $g(1) = f(\mathbf{b})$ y $g(0) = f(\mathbf{a})$. Demostraremos el teorema aplicando la fórmula de Taylor uni-dimensional a g, que dé

$$23) \qquad g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{m!} g^{(m)}(t), \qquad \text{donde } 0 < \bar{t} < 1.$$

Ahora g es una función compuesta definida por $g(t) = f[\mathbf{p}(t)]$, donde $\mathbf{p}(t) = t\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a}$. El componente k-ésimo de $\mathbf{p}$ tiene una derivada dada por $p'_k(t) = b_k - a_k$. Aplicando la regla de la cadena (Teorema 6-14), vemos que g' existe en $0 \le t \le 1$ y viene dada por la fórmula

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j f[\mathbf{p}(t)](b_j - a_j) = df(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Aplicando otra vez la regla de la cadena, obtenemos

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} f[\mathbf{p}(t)](b_j - a_j)(b_i - a_i) = d^2 f(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Análogamente, encontramos $g^{(m)}(t) = d^m f(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a})$. La sustitución en 23) conduce al teorema, puesto que $\bar{t}\mathbf{b} + (1 - \bar{t})\mathbf{a} \in L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

6-12 Diferenciación de funciones de una variable compleja. Vamos a comentar brevemente en este párrafo las derivadas de las funciones complejas definidas en subconjuntos del plano complejo. Tales funciones son, naturalmente, funciones vectoriales cuyos dominio y recorrido son subconjuntos de E_2. Todas las consideraciones del Capítulo 4 relativas a los límites y continuidad de funciones vectoriales se aplican, en particular, a las funciones de una variable compleja. Existe, sin embargo, una diferencia esencial entre el

conjunto de números complejos E_2 y el conjunto de vectores n-dimensionales E_n ($n > 2$) que desempeña aquí un importante papel. En el sistema de los números complejos tenemos las cuatro operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, y estas operaciones satisfacen las leyes « usuales » del álgebra que son válidas para el sistema de los números reales. En particular, satisfacen los cinco primeros axiomas para los números reales citados en el Capítulo 1. (Los axiomas 6 a 10 incluyen la relación de orden $<$, que no puede existir entre los números complejos.) Un sistema algebraico que satisface los Axiomas 1 a 5 forma un cuerpo. (Para una completa discusión de los cuerpos, ver Ref. 1-1.) La multiplicación y la división no pueden ser introducidas en E_n (para $n > 2$) de manera que E_n sea un cuerpo * que incluya E_2. Puesto que la división *es* posible en E_2, podemos formar el cociente fundamental de diferencias $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ que fue utilizado para definir la derivada en E_1, y ahora se presenta de forma clara cómo debe definirse la derivada en E_2.

6—23 DEFINICIÓN. *Sea f una función compleja definida en un conjunto abierto S de E_2, y supongamos $z_0 \in S$. Se dice que f posee derivada $f'(z_0)$ en z_0 si el límite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existe.

Mediante este proceso, se define una nueva función compleja f' en todos los puntos de S en los que existe $f'(z)$. Las derivadas de orden superior f'', f''', . . . se definen, como es natural, en forma parecida.

Las siguientes proposiciones para funciones complejas pueden ahora demostrarse utilizando exactamente las mismas demostraciones que en el caso real:

a) *La existencia de $f'(z_0)$ implica la continuidad de f en z_0.*
b) *Si dos funciones f y g son derivables en z_0, su suma, diferencia, producto, y cociente admiten también derivadas en z_0 y vienen dadas por las fórmulas usuales (como en el Teorema 5-4). En el caso de f/g, debemos suponer $g(z_0) \neq 0$.*
c) *Es válida la regla de la cadena, es decir, tenemos*

$$(gf)'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0)$$

si el dominio de g contiene un entorno de $f(z_0)$ y si existen $f'(z_0)$ y $g'[f(z_0)]$.

---

* Por ejemplo, si fuera posible definir la multiplicación en E_3 para hacer de E_3 un cuerpo que incluyera a E_2, podríamos razonar como sigue: Para todo $\mathbf{x}$ en E_3, los vectores $\mathbf{1}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$ serían linealmente dependientes (ver Ref. 1-1, p. 172). Por tanto, para cada $\mathbf{x}$ en E_3, sería válida una relación de la forma $a_0 + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 + a_3\mathbf{x}^3$ con coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 reales. Pero todo ponilomio de tercer grado con coeficientes reales es un producto de un polinomio lineal y un polinomio cuadrático con coeficientes reales. Los únicos ceros que pueden tener tales polinomios son o números reales o números complejos.

Cuando $f(z) = z$, la Definición 6-23 da inmediatamente $f'(z) = 1$ para todo z en E_2. Utilizando reiteradamente *b*), encontramos que $f'(z) = nz^{n-1}$ cuando $f(z) = z^n$ (n entero positivo). Esto también es cierto cuando n es entero negativo, con tal de que $z \neq 0$. Por consiguiente, podemos calcular las derivadas de polinomios complejos y de funciones racionales complejas mediante el mismo método utilizado en el cálculo diferencial elemental.

6-13 Las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si f es una función compleja de una variable compleja, sus valores pueden escribirse en la forma

$$f(z) = u(z) + iv(z).$$

donde u y v son funciones reales de una variable compleja. Naturalmente, podemos también considerar u y v como funciones reales de dos variables reales y escribir entonces

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{si } z = x + iy.$$

En los dos casos, escribimos $f = u + iv$ y nos referimos a u y v como las partes real e imaginaria de f. Por ejemplo, en el caso de la función exponencial compleja f, definida mediante

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

(ver Definición 1-23), las partes real e imaginaria vienen dadas por

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Análogamente, cuando $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$, encontramos

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

En el próximo teorema veremos que la existencia de la derivada f' implica una restricción rigurosa para las partes real e imaginaria u y v.

6—24 Teorema. *Sea f una función de una variable compleja definida en un conjunto abierto S de E_2, y escribamos $f = u + iv$. Si f tiene derivada $f'(z_0)$ en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ de S, u y v deben tener entonces derivadas parciales finitas D_1u, D_2u, D_1v, D_2v, en (x_0, y_0), y están relacionadas con $f'(z_0)$ mediante las ecuaciones*

$$f'(z_0) = D_1u(x_0, y_0) + iD_1v(x_0, y_0)$$

y

$$f'(z_0) = D_2v(x_0, y_0) - iD_2u(x_0, y_0).$$

Esto implica, en particular, que debe verificarse

$$D_1u(x_0, y_0) = D_2v(x_0, y_0) \quad y \quad D_1v(x_0, y_0) = -D_2u(x_0, y_0).$$

NOTA. Estas dos últimas igualdades se conocen con el nombre de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Corrientemente se escriben en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Demostración. La existencia de $f'(z_0)$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $N(z_0;\ \delta)$ tal que

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon, \qquad \text{siempre que } z \in N'(z_0;\ \delta).$$

Escribamos $z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$ y $f'(z_0) = A(z_0) + iB(z_0)$, donde $A(z_0)$ y $B(z_0)$ son reales. Si tenemos en cuenta únicamente los valores de z para los que $y = y_0$ y consideramos separadamente las partes reales e imaginarias, la desigualdad precedente implica las dos desigualdades

$$\left|\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} - A(z_0)\right| < \varepsilon$$

y

$$\left|\frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} - B(z_0)\right| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Pero esto significa que

$$D_1u(x_0, y_0) = A(z_0) \quad y \quad D_1v(x_0, y_0) = B(z_0).$$

Análogamente, si tomamos únicamente todos los z para los que $x = x_0$, encontramos

$$\left|\frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - A(z_0)\right| < \varepsilon$$

y

$$\left|\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + B(z_0)\right| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |y - y_0| < \delta$. Esto implica que

$$D_2v(x_0, y_0) = A(z_0) \quad \text{y} \quad D_2u(x_0, y_0) = -B(z_0)$$

de lo que el teorema se deduce inmediatamente.

Este teorema nos dice que una condición *necesaria* para que la función $f = u + iv$ tenga derivada en z_0 es que las cuatro parciales, D_1u, D_2u, D_1v, D_2v existan en z_0 y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esta condición, no obstante, *no es suficiente*, como vemos considerando el ejemplo en el que u y v están definidas como sigue:

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad u(0, 0) = 0,$$

$$v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad v(0, 0) = 0.$$

Se ve con facilidad que $D_1u(0, 0) = D_1v(0, 0) = 1$ y que $D_2u(0, 0) = -D_2v(0, 0) = -1$, de manera que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son válidas en $(0, 0)$. Sin embargo, la función $f = u + iv$ no puede tener derivada en $z = 0$. Efectivamente, para $x = 0$, el cociente incremental se convierte en

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i,$$

mientras que para $x = y$, es

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xi}{x + ix} = \frac{1 + i}{2},$$

y por consiguiente $f'(0)$ no puede existir.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son suficientes para establecer la existencia de la derivada de $f = u + iv$ en z_0, con tal de que u y v tengan parciales *continuas* en algún entorno de z_0. Esto es, tenemos

6–25 TEOREMA. *Sean u y v dos funciones reales definidas en un conjunto abierto S de E_2, y supongamos que las cuatro derivadas parciales D_1u, D_2u, D_1v, D_2v existan y sean continuas en S. Si en algún punto z_0 de S tenemos*

$$D_1u(z_0) = D_2v(z_0) \quad \text{y} \quad D_2u(z_0) = -D_1v(z_0),$$

entonces la función $f = u + iv$ es derivable en z_0.

Demostración. La existencia de parciales continuas implica que u y v son diferenciables en S y, por tanto, es aplicable el Teorema del Valor Medio bi-dimensional. Si $N(z_0)$ es un entorno de z_0 contenido en S, para algún z de $N'(z_0)$ podemos escribir

$$u(z) - u(z_0) = \nabla u(z_1) \cdot (z - z_0), \qquad \text{donde } z_1 \in L(z, z_0),$$

y

$$v(z) - v(z_0) = \nabla v(z_2) \cdot (z - z_0), \qquad \text{donde } z_2 \in L(z, z_0).$$

Para simplificar utilizamos la terminología vectorial y, como de costumbre $a \cdot b$ representa el producto interno de a y b. Entonces tenemos

$$f(z) - f(z_0) = [\nabla u(z_0) + i\nabla v(z_0)] \cdot (z - z_0) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

donde

$$\varepsilon_1 = [\nabla u(z_1) - \nabla u(z_0)] \cdot (z - z_0), \qquad \varepsilon_2 = [\nabla v(z_2) - \nabla v(z_0)] \cdot (z - z_0).$$

Pero ahora podemos escribir

$$\begin{aligned}[\nabla u(z_0) + i\nabla v(z_0)] \cdot (z - z_0) &= D_1u(z_0)(x - x_0) + D_2u(z_0)(y - y_0) + iD_1v(z_0)(x - x_0) \\ &\quad + iD_2v(z_0)(y - y_0) \\ &= D_1u(z_0)[(x - x_0) + i(y - y_0)] + iD_1v(z_0)[(x - x_0) + i(y - y_0)]\end{aligned}$$

en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por consiguiente, tenemos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = D_1u(z_0) + iD_1v(z_0) + \frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{z - z_0}.$$

Pero ε_1 viene dado por la expresión

$$\varepsilon_1 = [D_1u(z_1) - D_1u(z_0)](x - x_0) + [D_2u(z_1) - D_2u(z_0)](y - y_0),$$

de modo que tenemos

$$|\varepsilon_1| \leq |z - z_0|\{|D_1u(z_1) - D_1u(z_0)| + |D_2u(z_1) - D_2u(z_0)|\}.$$

De la misma manera,

$$|\varepsilon_2| \leq |z - z_0|\{|D_1v(z_2) - D_1v(z_0)| + |D_2v(z_2) - D_2v(z_0)|\}.$$

Si $\varepsilon > 0$ está dado, el entorno original $N(z_0)$ puede ser elegido de manera que las cuatro desigualdades

$$|D_ku(z) - D_ku(z_0)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |D_kv(z) - D_kv(z_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (k = 1, 2),$$

sean todas válidas siempre que $z \in N'(z_0)$. Pero si z está en $N'(z_0)$, lo mismo acontecerá para los puntos z_1 y z_2, y, por consiguiente, se verifica

$$\left|\frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{z - z_0}\right| < \varepsilon, \qquad \text{siempre que } z \in N'(z_0).$$

Esto demuestra que $f'(z_0)$ existe y es igual a $D_1u(z_0) + iD_1v(z_0)$.

Podemos utilizar los Teoremas 6-24 y 6-25 para obtener la derivada de la función exponencial. Escribiendo $f = u + iv$, donde $f(z) = e^z$, tenemos $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, y, por consiguiente,

$$D_1u(x, y) = e^x \cos y = D_2v(x, y), \qquad D_2u(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y = -D_1v(x, y).$$

Aplicando el Teorema 6-25, vemos que $f'(z)$ existe *en todo* E_2. Para calcular la derivada, hacemos uso del Teorema 6-24 y obtenemos

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z).$$

Esto es, la función exponencial coincide con su propia derivada (como en el caso real). Se dan más ejemplos en el Ejercicio 6-27.

6—26 TEOREMA. *Sean u y v dos funciones reales definidas en un conjunto abierto S de E_2, y supongamos que existen las derivadas parciales D_1u, D_2u, $D_{1,2}u$, D_1v, D_2v, $D_{1,2}v$ y son continuas en S. Si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el conjunto S, entonces también existen las derivadas parciales $D_{1,1}u$, $D_{1,1}v$, $D_{2,2}u$, y $D_{2,2}v$ en S y satisfacen las ecuaciones*

$$D_{1,1}u + D_{2,2}u = 0, \qquad D_{1,1}v + D_{2,2}v = 0$$

en todo el conjunto S.

Demostración. Puesto que $D_1u = D_2v$, tenemos $D_{1,1}u = D_{1,2}v$. Análogamente, $D_2u = -D_1v$ implica $D_{2,2}u = -D_{2,1}v$. La hipótesis de la continuidad implica $D_{1,2}v = D_{2,1}v$, y, por tanto, $D_{1,1}u = -D_{2,2}u$. De la misma manera, encontramos $D_{1,1}v = -D_{2,2}v$.

NOTA. La ecuación diferencial en derivados parciales $D_{1,1}u + D_{2,2}u = 0$ se conoce por el nombre de *Ecuación de Laplace*. Se escribe corrientemente en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Más brevemente la ecuación se escribe también así:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{o bien} \quad \Delta u = 0.$$

Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace en un conjunto S se llaman *armónicas* en S.

EJERCICIOS

Diferenciales y derivadas parciales.

6-1. Sea f una función que admite derivadas parciales $D_kf(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, en cada punto $\mathbf{x}$ de un conjunto abierto S de E_n. Si f posee un máximo relativo o un mínimo relativo en el punto $\mathbf{x}_0$ de S, demostrar que $D_kf(\mathbf{x}_0) = 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

6-2. *a)* Demostrar que todo vector unidad $\mathbf{u}$ en E_3 puede expresarse en la forma $\mathbf{u} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$. ¿Cuál es el significado geométrico de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?
b) Si f está definida en un conjunto abierto S de E_3 y es diferenciable en el punto $\mathbf{x}$ de S, demostrar que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = D_1f(\mathbf{x})\cos\alpha_1 + D_2f(\mathbf{x})\cos\alpha_2 + D_3f(\mathbf{x})\cos\alpha_3,$$

donde $\mathbf{u}$ es el vector citado en *a*).

6-3. Dadas n funciones reales $f_1, \ldots, f_n$, definidas y con derivadas finitas en el intervalo (a, b). Para cada $\mathbf{x}$ en el intervalo n-dimensional

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a < x_k < b,\ k = 1, 2, \ldots, n\},$$

se define $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$. Demostrar que f es diferenciable en cada punto de S.

6-4. Dadas n funciones $f_1, \ldots, f_n$ definidas en un conjunto abierto S de E_n. Para cada $\mathbf{x}$ de S, definimos $f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + \cdots + f_n(\mathbf{x})$. Si para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se tiene

$$\lim_{\substack{\mathbf{y}\to\mathbf{x} \\ y_k \neq x_k}} \frac{f_k(\mathbf{y}) - f_k(\mathbf{x})}{y_k - x_k} = a_k,$$

demostrar que f es diferenciable en $\mathbf{x}$. (El número a_k puede depender de $\mathbf{x}$).

6-5. Sea f una función que tiene diferencial $df(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ en el punto $\mathbf{x}$ de E_n, y supongamos que $f(\mathbf{x}) = 0$. Sea g otra función continua en $\mathbf{x}$. Demostrar que la función producto h definida mediante $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es también diferenciable en $\mathbf{x}$ y que $dh(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = g(\mathbf{x})df(\mathbf{x}; \mathbf{t})$, si $\mathbf{t} \in E_n$.

6-6. Consideremos las funciones definidas en E_2 mediante las fórmulas siguientes:

I) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

II) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

a) En cada caso demostrar que las derivadas parciales $D_1 f(x, y)$ y $D_2 f(x, y)$ existen para todo (x, y) en E_2 y calcular esas derivadas explícitamente en función de x e y.

b) Justificar por qué las funciones definidas en I) y II) no son diferenciables en $(0, 0)$.

Gradientes y regla de la cadena.

6-7. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores en E_n. Demostrar que el valor absoluto de su producto interno nunca excede al producto de sus longitudes; esto es, $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$. Demostrar también que $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ si, y únicamente si $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

6-8. Supongamos que f es diferenciable en el punto $\mathbf{x}$ de E_n y que $|\nabla f(\mathbf{x})| \neq 0$. Demostrar que hay una dirección $\mathbf{u}$ y sólo una en E_n, $|\mathbf{u}| = 1$, tal que $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = |\nabla f(\mathbf{x})|$, y que ésta es la dirección para la cual $|D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})|$ toma su valor mínimo.

6-9. Calcular el vector gradiente $\nabla f(x, y)$ en todos los puntos (x, y) de E_2 en los cuales exista:

a) $f(x, y) = x^2y^2 \log (x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

6-10. Sean f y g funciones reales definidas en E_1 con derivadas segundas f'' y g'' continuas. Definimos

$$F(x, y) = f[x + g(y)] \quad \text{para cada } (x, y) \text{ de } E_2.$$

Encontrar las fórmulas para todas las parciales de F de primero y segundo orden en función de las derivadas de f y g. Comprobar la relación

$$(D_1 F)(D_{1,2} F) = (D_2 F)(D_{1,1} F).$$

6-11. Dada una función f definida en E_2. Sea

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

a) Suponer las propiedades adecuadas de diferenciabilidad de f y demostrar que

$$D_1F(r, \theta) = \cos\theta \, D_1f(x, y) + \operatorname{sen}\theta \, D_2f(x, y),$$

$$D_{1,1}F(r, \theta) = \cos^2\theta D_{1,1}f(x, y) + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta D_{1,2}f(x, y) + \operatorname{sen}^2\theta D_{2,2}f(x, y),$$

donde $x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta$.

b) Hallar fórmulas parecidas para D_2F, $D_{1,2}F$ y $D_{2,2}F$.

c) Comprobar la fórmula

$$|\nabla f(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)|^2 = [D_1F(r, \theta)]^2 + \frac{1}{r^2}[D_2F(r, \theta)]^2.$$

6-12. Si f y g tienen vectores gradientes $\nabla f(\mathbf{x})$ y $\nabla g(\mathbf{x})$ en un punto $\mathbf{x}$ de E_n, demostrar que la función producto h definida por $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x})$ también posee vector gradiente en $\mathbf{x}$ y que

$$\nabla h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}).$$

Establecer y probar un resultado análogo para el cociente f/g.

6-13. Sean f una función derivable en cada punto de E_1 y g una función definida en E_3 mediante la ecuación

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Si h representa la función compuesta $h = f g$, demostrar que

$$|\nabla h(x, y, z)|^2 = 4g(x, y, z)\{f'[g(x, y, z)]\}^2.$$

6-14. Sea f una función diferenciable en cada punto (x, y) de E_2. Sean g_1 y g_2 otras dos funciones definidas en E_3 mediante las ecuaciones

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad g_2(x, y, z) = x + y + z,$$

y consideremos la función vectorial $\mathbf{g}$ cuyos valores (en E_2) están dados por

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (g_1(x, y, z),\ g_2(x, y, z)).$$

Si h representa la función compuesta $h = f\mathbf{g}$ demostrar que

$$|\nabla h|^2 = 4(D_1f)^2g_1 + 4(D_1f)(D_2f)g_2 + 3(D_2f)^2.$$

6-15. Sea f una función definida en un conjunto abierto S de E_n. Decimos que f es homogénea de grado p sobre S si $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ para todo λ real y para todo $\mathbf{x}$ de S para los que $\lambda\mathbf{x} \in S$. Si una tal función es diferenciable en $\mathbf{x}$, demostrar que

$$\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x}) = p f(\mathbf{x}).$$

NOTA. Esta propiedad se conoce con el nombre de *Teorema de Euler* para las funciones homogéneas. [*Indicación*: Para $\mathbf{x}$ fijo, definir $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x})$ y calcular $g'(1)$.] Demostrar también el recíproco. Esto es, demostrar que si $\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x}) = p f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ en un conjunto abierto S, entonces f debe ser homogénea de grado p sobre S.

Teoremas del Valor Medio.

6-16. Dada una función f de dos variables, diferenciable en todo un entorno $N(\mathbf{x})$ de un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de E_2. Demostrar que si

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in N'(\mathbf{x}),$$

tenemos

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (y_1 - x_1)D_1 f(z_1, y_2) + (y_2 - x_2)D_2 f(x_1, z_2),$$

donde $z_1 \in L(x_1, y_1)$ y $z_2 \in L(x_2, y_2)$.

[*Indicación*: Considerar $g(t) = f[ty_1 + (1-t)x_1, y_2] + f[x_1, ty_2 + (1-t)x_2]$.]

6-17. Dada una función f diferenciable en todo un entorno $N(\mathbf{x})$ de un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de E_3. Demostrar que si $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in N'(\mathbf{x})$, tenemos

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (y_1 - x_1)D_1 f(z_1, y_2, y_3) + (y_2 - x_2)D_2 f(x_1, z_2, y_3) + (y_3 - x_3)D_3 f(x_1, x_2, z_3),$$

donde

$$z_1 \in L(x_1, y_1), \qquad z_2 \in L(x_2, y_2), \qquad z_3 \in L(x_3, y_3).$$

6-18. Establecer y demostrar una generalización del resultado del Ejercicio 6-17 para funciones de n variables.

6-19. ¿Existen las derivadas parciales $D_{1,2}f(0, 0)$ y $D_{2,1}f(0, 0)$ en alguno de los dos ejemplos del Ejercicio 6-6?

6-20. Demostrar que las parciales mixtas $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ serán iguales en el punto (x, y) de E_2 si cada derivada parcial $D_1 f$ y $D_2 f$ existe en algún entorno de (x, y) y es diferenciable en (x, y).

6-21. Sea f una función de dos variables. Utilizar el método de inducción y el Teorema 6-20 para probar que si las 2^k derivadas parciales de f de orden k son continuas en un entorno de un punto (x_0, y_0), entonces todas las parciales mixtas de la forma $D_{r_1, \ldots, r_k}f$ y $D_{p_1, \ldots, p_k}f$ serán iguales en (x_0, y_0) si la sucesión de índices $(r_1, \ldots, r_k)$ contiene el mismo número de unos que la $(p_1, \ldots, p_k)$.

Diferenciales de orden superior y fórmula de Taylor.

6-22. Definimos las derivadas direccionales de orden superior mediante la fórmula

$$D_{\mathbf{u}}^{k+1} f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}}^k f), \qquad \text{si } |\mathbf{u}| = 1.$$

a) Demostrar que $D_{\mathbf{u}}^k f(\mathbf{x}) = d^k f(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ cuando uno de los miembros existe y siendo $k > 1$.

b) Demostrar que la fórmula de Taylor (Teorema 6-22) puede expresarse como sigue:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} D_{\mathbf{u}}^k f(\mathbf{a})|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^k + \frac{1}{m!} D_{\mathbf{u}}^m f(\mathbf{z})|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^m,$$

donde $\mathbf{u} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$.

6-23. Si f es una función de dos variables con parciales continuas de orden k en un conjunto abierto S de E_2, demostrar que

$$d^k f(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} t_1^r t_2^{k-r} D_{p_1, \ldots, p_k} f(\mathbf{x}), \qquad \text{si } \mathbf{x} \in S, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2),$$

donde en el término r-ésimo tenemos $p_1 = \cdots = p_r = 1$ y $p_{r+1} = \cdots = p_k = 2$. Utilizar este resultado para dar una nueva expresión de la fórmula de Taylor (Teorema 6-22) en el caso $n = 2$. NOTA. El símbolo $\binom{k}{r}$ es el coeficiente binomial $k!/[r!(k-r)!]$.

6-24. Utilizar la fórmula de Taylor para desarrollar las funciones siguientes en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy^2$, b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

6-25. Sea la función $h = g\mathbf{f}$, donde $\mathbf{f}$, g y h satisfacen las hipótesis del Teorema 6-14. Supongamos, además, que existen las diferenciales de segundo orden $d^2f_1, \dots, d^2f_n$ en el punto $\mathbf{z}$ y que d^2g existe en $\mathbf{f}(\mathbf{z})$. Demostrar que

a)
$$D_{s,r}h(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{j,k}g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] D_s f_j(\mathbf{z}) D_r f_k(\mathbf{z})$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} D_k g[\mathbf{f}(\mathbf{z})] D_{s,r} f_k(\mathbf{z}).$$

b)
$$d^2h(\mathbf{z}; \mathbf{t}) = d^2g[\mathbf{f}(\mathbf{z}); v_1, \dots, v_n] + dg[\mathbf{f}(\mathbf{z}); w_1, \dots, w_n],$$

donde $v_i = df_i(\mathbf{z}; \mathbf{t})$ y $w_i = d^2f_i(\mathbf{z}; \mathbf{t})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Nota. La presencia del segundo término en el segundo miembro de b) demuestra que no existe teorema de invariancia para las diferenciales de segundo orden.

6-26. Sea $f = u + iv$ y supongamos que existe $f'(z_0)$. Escribamos $z = z_0 + re^{i\alpha}$ (α es real y fijo) y hagamos $r \to 0$ en el cociente incremental $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ para obtener

$$f'(z_0) = e^{-i\alpha}(D_{\mathbf{a}}u + iD_{\mathbf{a}}v),$$

donde $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ es un vector unidad y $D_{\mathbf{a}}u$, $D_{\mathbf{a}}v$ son derivadas direccionales. Si $\mathbf{b} = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ donde $\beta = \alpha + \frac{1}{2}\pi$, demostrar mediante razonamiento parecido que

$$f'(z_0) = e^{-i\alpha}(D_{\mathbf{b}}v - iD_{\mathbf{b}}u).$$

Deducir que $D_{\mathbf{a}}u = D_{\mathbf{b}}v$, $D_{\mathbf{a}}v = -D_{\mathbf{b}}u$. (Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son un caso particular.) A las derivadas direccionales deben atribuírseles los valores numéricos correspondientes a z_0.

6-27. I) En cada uno de los ejemplos siguientes escribir $f = u + iv$ y encontrar fórmulas explícitas para $u(x, y)$ y $v(x, y)$:

a) $f(z) = \operatorname{sen} z$, b) $f(z) = \cos z$,

c) $f(z) = |z|$, d) $f(z) = \bar{z}$,

e) $f(z) = \arg z$, $(z \neq 0)$ f) $f(z) = \operatorname{Log} z$ $(z \neq 0)$,

g) $f(z) = e^{z^2}$, h) $f(z) = z^\alpha$ (α complejo, $z \neq 0$).

(Estas funciones están definidas como se indicó en el Capítulo 1.)

II) Demostrar que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para los siguientes valores de z: cualquier z en a), b), g); ningún z en c), d), e); todo z excepto valores reales de $z \leq 0$ en f), h). (En el caso h), las ecuaciones de Cauchy-Reimann son válidas para todo z si α es entero no negativo y para todo $z \neq 0$ si α es entero negativo.)

III) Calcular la derivada $f'(z)$ en a), b), f), g), h), siempre que exista.

6-28. Poner $f = u + iv$ y suponer que f es derivable en cada punto de un conjunto cerrado S de E_2. Suponer también que u y v tienen parciales continuas en S. Demostrar que

a) Si u es constante en S, f es constante en S.

b) Si $u^2 + v^2$ es constante en S, f es constante en S.

c) Si $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, demostrar que $g'(z)$ existe en todo el conjunto $\overline{S}$, imagen simétrica de S respecto al eje real.

6-29. Suponer que u y v satisfacen las condiciones del Teorema 6-26, poner $f = u + iv$, $g = |f'|^2$, $h = 1 + |f|^2$, y demostrar que

a) $\nabla^2 h = 4g$, b) $\nabla^2 h = h^2\nabla^2(\log\ h)$.

6-30. Sea S el disco abierto $\{z|\ |z| < 1\}$ y $\bar{S} = \{z|\ |z| \leq 1\}$. Escrita $f = u + iv$, supongamos que f es contínua en $\bar{S}$ y derivable en todo el conjunto S. Supongamos además que $[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2 = 1$ si $x^2 + y^2 = 1$ y que $f'(z) \neq 0$ si $z \epsilon S$. Demostrar que $|f(z)| < 1$ si $z \epsilon S$.

CAPITULO 7

APLICACIONES DE LA DIFERENCIACIÓN PARCIAL

7-1 Introducción. Este capítulo comprende dos partes principales. La primera parte está dedicada a demostrar un teorema muy importante del análisis, el *teorema de la función implícita*; la segunda trata de los problemas de extremos.

El teorema de la función implícita en su forma más sencilla se refiere a una función $y = f(x)$ que está determinada « implícitamente » mediante una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$. El problema aquí es este: Dada la ecuación $F(x, y) = 0$, ¿cuándo podemos « resolver » esta ecuación respecto a y y obtener una solución explícita $y = f(x)$? Asimismo, si conocemos algo referente a la continuidad o diferenciabilidad de F, ¿qué podemos concluir en relación a la continuidad o diferencialidad de f? El problema toma una forma más general cuando se trata de una función F de varias variables (p. ej. n), y pretendemos saber si podemos resolver una ecuación de la forma $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ con respecto a una de las variables en función de las demás. Con mayor generalidad aún, podemos considerar un sistema de varias ecuaciones que relacionan varias variables, y estudiar el problema de su resolución con respecto a algunas de las variables en función de las restantes. Bajo condiciones algo generales, siempre existirá una solución, y el establecimiento exacto de tales condiciones, con algunas conclusiones relativas a dicha solución, constituye el teorema de la función implícita.

Un caso particular importante de este teorema es el conocidísimo problema de álgebra de la resolución de n ecuaciones lineales de la forma

$$1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donde las a_{ij} y la b_i se consideran como números dados y $x_1, \ldots, x_n$ representan las « incógnitas ». Es conocido que existe una sola solución para este sistema si el determinante de los coeficientes no es nulo, y recíprocamente. En el teorema general de la función implícita, también se considera la no anulación de un cierto determinante, llamado *Jacobiano*. Los determinantes jacobianos se definirán y serán deducidas sus propiedades en el próximo párrafo, pero antes deseamos hacer algunas observaciones concernientes a las notaciones y a la terminología.

Muchos de los resultados de este capítulo se refieren a colecciones de funciones, en las que cada una es una función de varias variables. En consecuencia, el establecimiento de muchos de esos resultados es, por lo general, algo compli-

cado. Puede conseguirse alguna simplificación utilizando la terminología vectorial. Por ejemplo, si consideramos una colección de n funciones reales $f_1, \ldots, f_n$ definidas en un conjunto S, representamos por $\mathbf{f}$ la función vectorial cuyo valor en el punto $\mathbf{x}$ de S es $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$. Escribimos también $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ para indicar esa relación, y f_k se llama entonces el componente k-ésimo de $\mathbf{f}$. Diremos que $\mathbf{f}$ es *diferenciable en el punto* $\mathbf{x}$ si cada componente de $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}$. Esto se abreviará escribiendo $\mathbf{f} \in D$ en $\mathbf{x}$. Diremos además que $\mathbf{f}$ es *diferenciable con continuidad* en $\mathbf{x}$ si cada componente f_k de $\mathbf{f}$ tiene derivadas parciales primeras $D_j f_k (j = 1, 2, \ldots, n)$ continuas en $\mathbf{x}$. Esto se expresará simbólicamente escribiendo $\mathbf{f} \in C'$ en $\mathbf{x}$. Escribimos también $\mathbf{f} \in C'$ en S si $\mathbf{f} \in C'$ en cada punto de S; la notación $\mathbf{f} \in D$ en S tiene un significado semejante. Observemos que $\mathbf{f} \in C'$ en $\mathbf{x}$ implica $\mathbf{f} \in D$ en $\mathbf{x}$, en virtud del Teorema 6-18.

7-2 Jacobianos.

7—1 DEFINICIÓN. *Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones reales definidas en un conjunto abierto S de E_n, y consideremos $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Llamamos Jacobiano de $\mathbf{f}$ a la función real $J_\mathbf{f}$ cuyos valores vienen dados por el determinante*

$$J_\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) \ldots D_n f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ D_1 f_n(\mathbf{x}) & D_2 f_n(\mathbf{x}) \ldots D_n f_n(\mathbf{x}) \end{vmatrix}$$

en todos los puntos $\mathbf{x}$ de S en los que existan todas las parciales $D_j f_i(\mathbf{x})$.

NOTA. También se utiliza la notación $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ en lugar de $J_\mathbf{f}(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Abreviadamente, una matriz A se escribirá $A = [a_{ij}]$ siendo a_{ij} el elemento perteneciente a la fila i y a la columna j, y el determinante de esa matriz se expresará mediante la notación $[A] = \det [a_{ij}]$. Los elementos de la fila i de la matriz $[D_j f_i(\mathbf{x})]$ son los componentes del vector gradiente $\nabla f_i(\mathbf{x})$.

Recordamos de la teoría elemental de las matrices cuadradas de orden n que el producto AB de las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ (dadas en este orden) es la matriz $[c_{ij}]$, donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

y que $\det[AB] = \det[A]\det[B]$. Esto se utilizará en la demostración del próximo teorema. (Para un repaso de la teoría de matrices y determinantes, ver Ref. 7-2.)

7—2 TEOREMA. (*Teorema de multiplicación de Jacobianos*). *Sea la función vectorial $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ definida en un conjunto abierto S de E_n y $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ otra función vectorial definida en un conjunto abierto T*

de E_n, *siendo* $\mathbf{f}(S) \subset T$. *Designemos por* $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ *la función compuesta definida mediante la ecuación*

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})], \qquad \text{si } \mathbf{x} \in S.$$

Entonces, para cada $\mathbf{x}$ *de* S *tal que* $\mathbf{f} \in D$ *en* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{g} \in D$ *en* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, *se verifica*

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}).$$

Demostración. Las hipótesis $\mathbf{f} \in D$ en $\mathbf{x}$ y $\mathbf{g} \in D$ en $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nos aseguran que $\mathbf{h} \in D$ en $\mathbf{x}$ a causa de la regla de la cadena (Teorema 6-14). La multiplicación de determinantes da

$$J_{\mathbf{g}}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det\,[D_j g_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))]\,\det\,[D_j f_i(\mathbf{x})]$$
$$= \det\left[\sum_{k=1}^{n} D_k g_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\,D_j f_k(\mathbf{x})\right].$$

Pero también la regla de la cadena nos dice que la última suma es $D_j h_i(\mathbf{x})$, y esto demuestra el teorema.

En particular, si $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{-1}$, entonces $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ de S y $J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = 1$. Luego del teorema anterior resulta

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = 1.$$

Esto se expresa algunas veces así:

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\,\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(f_1, \ldots, f_n)} = 1.$$

La ecuación $J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ del Teorema 7-2 presenta un fuerte parecido a la regla de la cadena $h'(x) = g'[f(x)]f'(x)$ de la teoría de la derivada uni-dimensional y sugiere que el Jacobiano debería ser considerado, quizás, como una generalización (en las funciones vectoriales) de la derivada. Otras razones para adoptar este punto de vista se verán en alguno de los próximos capítulos, en particular cuando estudiemos la fórmula para el cambio de variables en una integral múltiple. No obstante, debe señalarse que para las funciones complejas definidas en E_2, el Jacobiano $J_f(z)$ no es lo mismo que la derivada $f'(z)$. Efectivamente, si escribimos $f = u + iv$, $f'(z)$ viene dada por la ecuación

$$f'(z) = D_1u(x, y) + iD_1v(x, y), \qquad z = x + iy,$$

mientras que el Jacobiano $J_f(z)$ es

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} D_1u(x, y) & D_2u(x, y) \\ D_1v(x, y) & D_2v(x, y) \end{vmatrix} = D_1u(x, y)D_2v(x, y)$$
$$- D_1v(x, y)D_2u(x, y).$$

Por lo tanto, si las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, podemos escribir

$$J_f(z) = [D_1u(x, y)]^2 + [D_1v(x, y)]^2$$

y vemos que, en este caso, $J_f(z)$ y $f'(z)$ están relacionados mediante la ecuación

$$J_f(z) = |f'(z)|^2.$$

7-3 Funciones con Jacobiano no nulo. En esta sección obtenemos algunas propiedades de las funciones vectoriales que tienen el Jacobiano no nulo en ciertos puntos. Estos resultados se utilizarán después en la demostración del teorema de la función implícita.

7–3 TEOREMA. *Sean K una esfera abierta en E_n con centro en $\mathbf{x}_0$ y $\overline{K}$ la correspondiente esfera cerrada. Designemos por $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ una función vectorial continua en $\overline{K}$ y supongamos que todas las derivadas parciales $D_jf_i(\mathbf{x})$ existen si $\mathbf{x} \in K$. Supongamos además que $\mathbf{f}$ es uno a uno en $\overline{K}$ y que el Jacobiano $J_\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x}$ de K. Entonces $\mathbf{f}(K)$, imagen de K originada por $\mathbf{f}$, contiene un entorno del punto $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.*

Demostración. Designemos por $B(K)$ la frontera de K, esto es

$$B(K) = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r\},$$

siendo r el radio de la esfera K. $B(K)$ es un conjunto cerrado y acotado. Definamos una función real g en $B(K)$ como sigue:

$$g(\mathbf{x}) = |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|, \quad \text{si } \mathbf{x} \in B(K).$$

Entonces $g(\mathbf{x}) > 0$ para cada $\mathbf{x}$ de $B(K)$ debido a que $\mathbf{f}$ es uno a uno en $\overline{K}$. Además, g es continua en $B(K)$, ya que $\mathbf{f}$ es continua en $\overline{K}$. Pero $B(K)$ es un conjunto compacto y, por lo tanto, g debe alcanzar su mínimo absoluto m en algún punto de $B(K)$. Este mínimo m debe ser positivo, puesto que $g(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x}$ de $B(K)$. Utilizando este número positivo m, sea T la esfera abierta con centro en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ y radio $m/2$. Demostraremos que $T \subset \mathbf{f}(K)$ con lo cual queda demostrado el teorema. (Ver Fig. 7-1.)

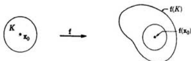


Fig. 7-1. Teorema 7-3 en E_2.

Para ello, tenemos que demostrar que $\mathbf{y} \in T$ implica que $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(K)$. Elegido un punto $\mathbf{y}$ en T, mantengámosle fijo y definamos una nueva función real h en $\bar{K}$ como sigue:

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|, \quad \text{si } \mathbf{x} \in \bar{K}.$$

Entonces h es continua en el conjunto compacto $\bar{K}$ y, por tanto, tiene en él un mínimo absoluto. Queremos demostrar que h alcanza ese mínimo en algún punto de la esfera *abierta* K. En el centro tenemos $h(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}\| < m/2$, ya que $\mathbf{y} \in T$. Por lo tanto, el valor mínimo de h en $\bar{K}$ debe ser también $< m/2$. Pero en el punto frontera $\mathbf{x}$ de $B(K)$, h tiene el valor

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\|$$
$$\geq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| - \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}\| > g(\mathbf{x}) - \frac{m}{2} \geq \frac{m}{2},$$

así que el mínimo no puede presentarse en la frontera de K. Luego existe un *punto interior* $\mathbf{a}$ de K en el que h alcanza su mínimo. En ese punto el cuadrado de h debe tener también un mínimo. Puesto que $h^2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{r=1}^{n} [f_r(\mathbf{x}) - y_r]^2$ y que cada derivada parcial $D_k(h^2)$ debe anularse en $\mathbf{a}$, se verificará

$$\sum_{r=1}^{n} [f_r(\mathbf{a}) - y_r] D_k f_r(\mathbf{a}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pero este es un sistema de ecuaciones lineales cuyo determinante $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ no es cero, ya que $\mathbf{a} \in K$. Esto implica $\mathbf{f}_r(\mathbf{a}) = y_r$ para cada r, o $f(\mathbf{a}) = \mathbf{y}$. Esto es, $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(K)$. Luego $T \subset \mathbf{f}(K)$ y el teorema está demostrado.

Volvamos ahora al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Es sabido que si $\det[a_{ij}] \neq 0$, este sistema posee solución única. Efectivamente, la solución puede obtenerse con la regla de Cramer que expresa cada x_k como un cociente de dos determinantes, a saber $x_k = A_k/D$, donde $D = \det[a_{ij}]$ y A_k es el determinante de la matriz obtenida reemplazando la columna k de $[a_{ij}]$ por $b_1, \ldots, b_n$. (Para la demostración de la regla de Cramer ver Ref. 7-2 del final del capítulo.) Si definimos $f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces la función vectorial $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ tiene el Jacobiano $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det[a_{ij}]$. Decir que el sistema precedente de ecuaciones lineales tiene solución única siempre que $\det[a_{ij}] \neq 0$ equivale a decir que esta función $\mathbf{f}$ es uno a uno siempre que $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$. [¿Por qué?] Este resultado es análogo

al Teorema 5-7, en el que demostrábamos que una función real f es uno a uno en un cierto entorno del punto x siempre que la derivada $f'(x) \neq 0$. En el próximo teorema, el resultado se extiende a las funciones vectoriales que son diferenciables con continuidad.

7–4 TEOREMA. *Consideremos la función $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C'$ en un conjunto abierto S de E_n, y supongamos que el Jacobiano $J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ en un punto $\mathbf{x}_0$ de S. Existe entonces un entorno $N(\mathbf{x}_0)$ en el que $\mathbf{f}$ es uno a uno.*

Demostración. Sean $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n$ n puntos de S y designemos por $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \ldots ; \mathbf{Z}_n)$ el punto de E_{n^2} cuyos n primeros componentes son los componentes de $\mathbf{Z}_1$; los n siguientes son los componentes de $\mathbf{Z}_2$, etc. Definamos una función real h de la manera siguiente:

$$h(\mathbf{Z}) = \det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)].$$

Esta función es continua en todos los puntos $\mathbf{Z}$ de E_{n^2} en los cuales $h(\mathbf{Z})$ está definida, en virtud de que cada $D_j f_i$ es continua en S y de que un determinante es un polinomio en sus n^2 elementos. Sea $\mathbf{Z}_0$ un punto de E_{n^2} obtenido poniendo $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \ldots = \mathbf{Z}_n = \mathbf{x}_0$. Entonces $h(\mathbf{Z}_0) = J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ y por tanto, por la continuidad, existe algún entorno n-dimensional $N(\mathbf{x}_0)$ tal que det $[D_j f_i(\mathbf{Z}_i)] \neq 0$ si cada $\mathbf{Z}_i \in N(\mathbf{x}_0)$. Podemos ahora demostrar que $\mathbf{f}$ es uno a uno en este entorno. En efecto, supongamos que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, siendo $\mathbf{x} \in N(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{y} \in N(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Puesto que $N(\mathbf{x}_0)$ es convexo, el segmento rectilíneo $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset N(\mathbf{x}_0)$ y podemos aplicar el Teorema del Valor Medio n-dimensional para escribir

$$0 = f_i(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{x}) = \nabla f_i(\mathbf{Z}_i) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donde cada $\mathbf{Z}_i \in L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y por tanto $\mathbf{Z}_i \in N(\mathbf{x}_0)$. Pero esto es un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) a_{ik} = 0, \qquad \text{con } a_{ik} = D_k f_i(\mathbf{Z}_i).$$

El determinante de este sistema no es cero, ya que $\mathbf{Z}_i \in N(\mathbf{x}_0)$. Por consiguiente $y_k - x_k = 0$ para todo k, y esto está en contradicción con la hipótesis de que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Hemos demostrado, por tanto, que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ implica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{y})$ luego $\mathbf{f}$ es uno a uno en $N(\mathbf{x}_0)$.

NOTA. El lector debe advertir que el Teorema 7-4 es un teorema *local* y no un teorema global. La no anulación de $J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ garantiza la existencia de $\mathbf{f}^{-1}$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$. No se deduce que $\mathbf{f}$ tiene inversa en S, aun cuando $J_\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x}$ de S. El ejemplo siguiente ilustra este punto: Sea f una función compleja definida por $f(z) = e^z$ si $z \in E_2$. Escribiendo $z = x + iy$, tenemos

$$J_f(z) = |f'(z)|^2 = |e^z|^2 = e^{2x}$$

y vemos que $J_f(z) \neq 0$ para todo z de E_2. Sin embargo, f no es uno a uno en E_2 ya que $f(z_1) = f(z_2)$ para todo par de puntos z_1 y z_2 que difieran en $2\pi i$

Se deduce del Teorema 7-4 que, en las condiciones citadas, $\mathbf{f}$ es lo que podría llamarse una « inversa local » en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0$ en el que $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. En el próximo teorema deducimos algunas propiedades locales de diferenciabilidad de esta función inversa local.

7-4 Teorema de la función inversa.

7–5 Teorema (*Teorema de la función inversa*). *Sean* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C'$ *en un conjunto abierto* S *de* E_n *y* $T = \mathbf{f}(S)$. *Supongamos que el Jacobiano* $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ *en algún punto* $\mathbf{x}_0$ *de* S. *Existen entonces una función* $\mathbf{g}$ *determinada de forma única y dos conjuntos abiertos* $X \subset S$ *e* $Y \subset T$ *tales que*

I) $\mathbf{x}_0 \in X$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in Y$,
II) $Y = \mathbf{f}(X)$,
III) $\mathbf{f}$ *es uno a uno en* X,
IV) $\mathbf{g}$ *está definida en* Y, $\mathbf{g}(Y) = X$, *y* $\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}$ *para todo* $\mathbf{x}$ *de* X,
V) $\mathbf{g} \in C'$ *en* Y.

Demostración. El Jacobiano $J_{\mathbf{f}}$ es continuo en S y, puesto que $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ existe un entorno $N_1(\mathbf{x}_0)$ tal que $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ siempre que $\mathbf{x} \in N_1(\mathbf{x}_0)$. Según el Teorema 7-4 existe un entorno $N(\mathbf{x}_0) \subset N_1(\mathbf{x}_0)$ de manera que $\mathbf{f}$ es uno a uno en $N(\mathbf{x}_0)$. Si $\overline{K}$ es una esfera cerrada contenida en $N(\mathbf{x}_0)$ (con centro en $\mathbf{x}_0$), y K es la esfera abierta correspondiente, $\mathbf{f}(K)$ debe contener un entorno de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, según el Teorema 7-3. Llamemos a este entorno Y, y consideremos $X = \mathbf{f}^{-1}(Y) \cap K$ (Fig. 7-2.) El conjunto X es abierto, en virtud del Teorema 4-15. Aplicando el Teorema 4-17 a $\overline{K}$, encontramos que existe una función $\mathbf{g}$ (la función $\mathbf{f}^{-1}$ del Teorema 4-17) definida en $\mathbf{f}(\overline{K})$ tal que $\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ de $\overline{K}$. Además, puesto que $\overline{K}$ es compacto, $\mathbf{g}$ es continua en $\mathbf{f}(\overline{K})$. Ya que $X \subset \overline{K}$ e $Y \subset \mathbf{f}(\overline{K})$, quedan demostradas las partes I), II), III) y IV).

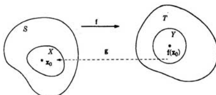


Fig. 7-2. Teorema de la función inversa en E_2.

Queda por verificar V). A tal fin, definamos una función real h mediante la igualdad $h(\mathbf{Z}) = \det[D_j f_i(\mathbf{Z}_i)]$, donde $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n$ son n puntos de S, y $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1; \ldots; \mathbf{Z}_n)$ es el punto correspondiente en E_{n^2}. Entonces, razonando como en la demostración del Teorema 7-4, existe un entorno $N_2(\mathbf{x}_0)$ tal que $h(\mathbf{Z}) \neq 0$ si cada $\mathbf{Z}_i \in N_2(\mathbf{x}_0)$. Podemos suponer ahora que en la primera parte de la demostración el entorno $N(\mathbf{x}_0)$ fue elegido de manera que $N(\mathbf{x}_0) \subset N_2(\mathbf{x}_0)$. Entonces $\overline{K} \subset N_2(\mathbf{x}_0)$ y $h(\mathbf{Z}) \neq 0$ si cada $\mathbf{Z}_i \in \overline{K}$.

Para demostrar V), escribamos $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$. Tenemos que demostrar que cada $g_k \in C'$ en Y. Al objeto de demostrar que $D_r g_k$ existe en Y, supongamos $\mathbf{y} \in Y$ y consideremos el cociente incremental $[g_k(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})]/\lambda$, donde $\mathbf{u}_r$ es el r-ésimo vector coordenado unidad. (Ya que Y es abierto, $\mathbf{y} + \lambda \mathbf{u}_r \in Y$ si $|\lambda|$ es suficientemente pequeño.) Consideremos $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ y $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{u}_r)$. Entonces $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ están ambos en X y $\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}_r$. Por tanto, $f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x}) = 0$ si $i \neq r$, y es igual a λ si $i = r$. Por el Teorema 6-17 tenemos

$$\frac{f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x})}{\lambda} = \nabla f_i(\mathbf{Z}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donde cada $\mathbf{Z}_i$ está en el segmento que une $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ y por consiguiente $\mathbf{Z}_i \in K$. La expresión del primer miembro vale 1 ó 0, según que $i = r$ o $i \neq r$ respectivamente. Este es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $(x'_j - x_j)/\lambda$ y tiene solución única, ya que $\det[D_j f_i(\mathbf{Z}_i)] = h(\mathbf{Z}) \neq 0$. Resolviendo respecto a la k-ésima incógnita por medio de la regla de Cramer, obtenemos una expresión para $[g_k(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})]/\lambda$ en forma de un cociente de determinantes. Cuando $\lambda \to 0$, el punto $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$, puesto que $\mathbf{g}$ es continua, y por lo tanto cada $\mathbf{Z}_i \to \mathbf{x}$, ya que $\mathbf{Z}_i$ pertenece al segmento que une $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$. El determinante que aparece en el denominador tiene como límite el número $\det[D_j f_i(\mathbf{x})] = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, y este no es 0, ya que $\mathbf{x} \in T$. Por consiguiente, existe el límite siguiente:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g_k(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})}{\lambda} = D_r g_k(\mathbf{y}).$$

Esto establece la existencia de $D_r g_k(\mathbf{y})$ para cada $\mathbf{y}$ en Y y cada $r = 1, 2, \ldots, n$. Además, este límite es un cociente de dos determinantes en los que figuran únicamente las derivadas $D_j f_i(\mathbf{x})$. De la continuidad de las $D_j f_i$ resulta, por consiguiente, la continuidad de cada parcial $D_r g_k$. Esto completa el teorema.

Observemos que la demostración precedente nos proporciona al propio tiempo un método para calcular $D_r g_k(\mathbf{y})$. Sin embargo, las derivadas $D_r g_k$ pueden obtenerse más fácilmente (sin recurrir a un proceso de límite) utilizando el teorema de la multiplicación de Jacobianos, que en este caso, asegura que $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) = 1$ si $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X$. El desarrollo de las correspondientes ecuaciones matriciales, es equivalente al siguiente sistema de n^2 ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^{n} D_k g_i(\mathbf{y}) D_j f_k(\mathbf{x}) = \delta_{i,j} \qquad (\text{donde } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Para cada i fijo, obtenemos n ecuaciones lineales al recorrer j los valores $1, 2, \ldots, n$. Estas pueden entonces resolverse respecto a las n incógnitas. $D_1 g_i(\mathbf{y}), \ldots, D_n g_i(\mathbf{y})$, por la regla de Cramer.

7-5 Teorema de la función implícita. El lector sabe que la ecuación de una curva en el plano xy puede expresarse bien en forma « explícita » $y = f(x)$, o en forma « implícita » $F(x, y) = 0$. No obstante, si tenemos una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, no siempre representa ésta una función. (Por ejemplo, $x^2 + y^2 - 5 = 0$.) La ecuación $F(x, y) = 0$ siempre representa una *relación*, esto es, el conjunto de todos los pares (x, y) que satisfacen la ecuación. Espontáneamente se presenta la siguiente pregunta: ¿Cuándo la relación definida por $F(x, y) = 0$ es también una función? En otras palabras, ¿cuándo la ecuación $F(x, y) = 0$ puede resolverse explícitamente respecto a y en función de x, obteniendo solución única? El teorema de la función implícita trata *localmente* esta cuestión, y nos dice que, dado un punto (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$, en determinadas condiciones existirá un entorno de (x_0, y_0) de manera que *en este entorno* la relación definida por $F(x, y) = 0$ es también una función. Esas condiciones son que F y D_2F sean continuas en un entorno (x_0, y_0) y que $D_2F(x_0, y_0) \neq 0$. En su forma más general, en lugar de una ecuación con dos variables, el teorema trata de un sistema de n ecuaciones con $n + k$ variables:

$$f_r(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Este sistema puede ser resuelto respecto a $x_1, \ldots, x_n$ en función de $t_1, \ldots, t_k$, con tal de que ciertas derivadas parciales sean continuas y que el Jacobiano de orden n $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ no sea nulo.

Para abreviar, utilizaremos la siguiente notación en este teorema: Los puntos del espacio $(n + k)$ — dimensional E_{n+k} se escribirán en la forma $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ y $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in E_k$.

7—6 TEOREMA. (*Teorema de la función implícita*). *Sea* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ *una función vectorial definida en un conjunto abierto* S *de* E_{n+k} *cuyos valores pertenecen a* E_n. *Supongamos* $\mathbf{f} \in C'$ *en* S. *Sea* $(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$ *un punto de* S *para el cual* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ *y el determinante de orden* n *det* $[D_j f_i(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)] \neq 0$. *Existen entonces un entorno* k*-dimensional* T_0 *de* $\mathbf{t}_0$ *y una, y sólo una función vectorial* $\mathbf{g}$, *definida en* T_0 *que tiene los valores en* E_n, *de modo que*

I) $\mathbf{g} \in C'$ *en* T_0
II) $\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$
III) $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ *para todo* $\mathbf{t}$ *en* T_0.

Demostración. Aplicaremos el teorema de la función inversa a una cierta función vectorial $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n; F_{n+1}, \ldots, F_{n+k})$ definida en S y con valores en E_{n+k}. La función $\mathbf{F}$ está definida así: Para $1 \leq m \leq n$, tomamos $F_m(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = f_m(\mathbf{x}; \mathbf{t})$, y para $1 \leq m \leq k$, $F_{n+m}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = t_m$. Podemos escribir $\mathbf{F} = (\mathbf{f}; \mathbf{I})$, donde $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ e $\mathbf{I}$ es la función identidad definida por $\mathbf{I}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ para cada $\mathbf{t}$ en E_k. El Jacobiano $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ tiene entonces el mismo valor que el determinante de orden n det $[D_j f_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})]$ debido a que los elementos que aparecen en las k últimas filas y en las k últimas columnas de $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ forman un determinante de orden k con unos a lo largo de la diagonal principal y ceros los restantes elementos; la intersección de las n primera filas y n primeras columnas es el determinante det $[D_j f_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})]$, y $D_i F_{n+j}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = 0$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$. Luego el Jacobiano $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) \neq$. Como $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) = (\mathbf{0}; \mathbf{t}_0)$, según el Teorema 7-5, existen los conjuntos abiertos X e Y que contienen $(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$ y $(\mathbf{0}; \mathbf{t}_0)$, respectivamente, de manera que $\mathbf{F}$ es uno a uno en X, y $Y = \mathbf{F}(X)$. Por consiguiente, existe una función inversa local $\mathbf{G}$, definida en Y y teniendo valores en X, tal que $\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = (\mathbf{x}; \mathbf{t})$ y además $\mathbf{G} \in C'$ en Y.

Ahora $\mathbf{G}$ puede expresarse poniendo de manifiesto sus componentes así: $\mathbf{G} = (\mathbf{v}; \mathbf{w})$ donde $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ es una función vectorial definida en Y con valores en E_n y $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k)$ también está definida en Y pero tiene los valores en E_k. Podemos ahora expresar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ explícitamente. La ecuación $\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = (\mathbf{x}; \mathbf{t})$, cuando está escrita en función de los componentes $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, nos da las dos ecuaciones $\mathbf{v}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = \mathbf{x}$ y $\mathbf{w}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = \mathbf{t}$. Mas ahora, *todo punto* $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ de Y puede ser escrito de manera única en la forma $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$ para algún $(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$ de X, en virtud de que $\mathbf{F}$ es uno a uno en X y la imagen inversa $\mathbf{F}^{-1}(Y)$ contiene X. Además, según la manera con que se definió $\mathbf{F}$, cuando escribimos $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$, debe verificarse $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$. Por consiguiente, $\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{v}[\mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t})] = \mathbf{x}'$ y $\mathbf{w}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{w}[\mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t})] = \mathbf{t}$. Luego la función $\mathbf{G}$ puede ser descrita como sigue: Dada un punto $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ en Y, tenemos $\mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = (\mathbf{x}'; \mathbf{t})$, donde $\mathbf{x}'$ es aquel punto de E_n para el que $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t})$. Esto implica que $\mathbf{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}); \mathbf{t}] = (\mathbf{x}; \mathbf{t})$, para todo $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ de Y.

Estamos ahora en condiciones de definir el conjunto T_0 y la función $\mathbf{g}$ del teorema. Consideremos $T_0 = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} \in E_k, (\mathbf{0}; \mathbf{t}) \in Y\}$, y para cada $\mathbf{t}$ en T_0 definamos $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}(\mathbf{0}; \mathbf{t})$. El conjunto T_0 es abierto. [¿Por qué?] Además, $\mathbf{g} \in C'$ en T_0 porque $\mathbf{G} \in C'$ en Y y los componentes de $\mathbf{g}$ son tomados de los componentes de $\mathbf{G}$. También, $\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{v}(\mathbf{0}; \mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$ porque $(\mathbf{0}; \mathbf{t}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$. Finalmente, la ecuación $\mathbf{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}); \mathbf{t}] = (\mathbf{x}; \mathbf{t})$, que se verifica para todo $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ de Y, da lugar (considerando los componentes en E_n) a la ecuación $\mathbf{f}[\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{x}$. Tomando $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vemos que para todo $\mathbf{t}$ en T_0, tenemos $\mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{0}$, y esto completa la demostración de las proposiciones I), II) y III). Queda por demostrar que existe únicamente una tal función $\mathbf{g}$. Pero esto se deduce inmediatamente del hecho de ser $\mathbf{f}$ uno a uno. Si existiera otra función, llamémosla $\mathbf{h}$, que satisficiera III), tendríamos $\mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}]$, y esto implicaría $(\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) = (\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t})$, o sea $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{t})$ para todo $\mathbf{t}$ de T_0.

7-6 Problemas de extremos. En lo que sigue en este capítulo consideraremos funciones reales f con objeto de determinar todos los puntos (si existen) en los que f tiene un extremo local, esto es, o un mínimo local o un máximo local.

Hemos obtenido ya un resultado (Teorema 5-8) en tal sentido para funciones de una variable. En aquel teorema encontrábamos que una condición *necesaria* para que una función f tenga un extremo local en un punto x_0 interior a un intervalo es que $f'(x_0) = 0$, con tal que $f'(x_0)$ exista. Esta condición, sin embargo, no es suficiente, como podemos ver considerando $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$. Deducimos ahora una condición suficiente.

7—7 TEOREMA. *Admitamos que para algún entero $n \geq 1$, f tenga derivada n-ésima continua en el intervalo abierto (a, b). Supongamos también que para algún punto x_0 interior al intervalo (a, b) se tiene*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \textit{pero} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Entonces si n es par, f tiene un mínimo local en x_0 si $f^{(n)}(x_0) > 0$, y un máximo local en x_0 si $f^{(n)}(x_0) < 0$. Si n es impar, no existe ni máximo local ni mínimo local en x_0.

Demostración. Puesto que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, existe un entorno $N(x_0)$ tal que para todo x de $N(x_0)$, la derivada $f^{(n)}(x)$ tendrá el mismo signo que $f^{(n)}(x_0)$. Según la fórmula de Taylor (Teorema 5-14), para todo x de $N(x_0)$ podemos escribir

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad \text{donde } x_1 \in N(x_0).$$

Si n es par, esta ecuación implica $f(x) \geq f(x_0)$ cuando $f^{(n)}(x_0) > 0$, y $f(x) \leq f(x_0)$ cuando $f^{(n)}(x_0) < 0$. Si n es impar y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces $f(x) > f(x_0)$ cuando $x > x_0$, pero $f(x) < f(x_0)$ cuando $x < x_0$, y no puede existir extremo en x_0. Análoga conclusión se obtiene suponiendo n impar y $f^{(n)}(x_0) < 0$. Esto demuestra el teorema.

Volvamos ahora a las funciones de varias variables. En el Ejercicio 6-1 hemos dado una condición *necesaria* para que una función tenga un extremo local en un punto $\mathbf{x}$ interior a un conjunto abierto. La condición es que cada derivada parcial $D_k f(\mathbf{x})$ debe ser cero en tal punto. También podemos establecer esto utilizando las derivadas en una dirección diciendo que $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ debe ser cero para toda dirección $\mathbf{u}$.

El recíproco, sin embargo, no es cierto. Consideremos el siguiente ejemplo de una función de dos variables reales:

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Aquí tenemos $D_1f(0, 0) = D_2f(0, 0) = 0$. Ahora bien $f(0, 0) = 0$, pero la función toma valores positivos y negativos en todo entorno de $(0, 0)$. (Ver Fig 7-3.) Este ejemplo ilustra otro interesante fenómeno. Si tomamos una recta fija que pase por el origen y hacemos que un punto (x, y) se desplace siguiendo esa recta hacia $(0, 0)$, el punto penetrará en la región situada por encima de la parábola $y = 2x^2$ (o por debajo de la parábola $y = x^2$) en la cual $f(x, y)$ llega a ser y permanece positiva para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Por consiguiente, a lo largo de toda recta como la considerada, f tiene un mínimo en $(0, 0)$, pero el origen no es un mínimo local en ningún entorno bi-dimensional de $(0, 0)$.

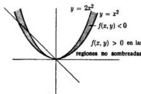


Figura 7-3.

7-7 Condiciones suficientes para un extremo local. El próximo teorema contiene una condición *suficiente* para la existencia de un extremo local de una función de dos variables.

7—8 TEOREMA. *Sea f una función que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un conjunto S de E_2. Supongamos que $(x_0, y_0) \in S$ y que $D_1f(x_0, y_0) = D_2f(x_0, y_0) = 0$. Sea $\Delta = AC - B^2$, donde A, B, y C son las siguientes derivadas parciales de segundo orden:*

$$A = D_{1,1}f(x_0, y_0), \qquad B = D_{1,2}f(x_0, y_0), \qquad C = D_{2,2}f(x_0, y_0).$$

Tenemos entonces:

a) *Si $\Delta > 0$ y $A > 0$, f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).*
b) *Si $\Delta > 0$ y $A < 0$, f tiene un máximo local en (x_0, y_0).*
c) *Si $\Delta < 0$, f no tiene ni máximo ni mínimo locales en (x_0, y_0).*

NOTA. Si $\Delta = 0$ puede ocurrir que en (x_0, y_0) exista un máximo local, un mínimo local o ni uno ni otro.

Demostración. Consideremos $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. La función Q se denomina *forma cuadrática binaria* y el número $\Delta = AC - B^2$ es el discriminante de Q [también se llama el *Hessiano* de f en (x_0, y_0)]. Por el método de completar cuadrados encontramos

$$Q(x, y) = \frac{1}{A}[(Ax + By)^2 + \Delta y^2] \qquad \text{si } A \neq 0.$$

Cuando $\Delta > 0$, la expresión que multiplica a $\frac{1}{A}$ es la suma de dos cuadrados, pero cuando $\Delta < 0$ es la diferencia de dos cuadrados. Por consiguiente, la naturaleza de esta forma cuadrática en las proximidades del origen está determinada por el signo algebraico de Δ.

El primer paso de la demostración es probar que en las cercanías del punto (x_0, y_0) la diferencia $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ tiene un comportamiento muy parecido al de $Q(x, y)$ en las cercanías del origen. A tal fin elegimos dos números reales h y k, no nulos simultáneamente, tales que el rectángulo $R(h, k)$ cuyos vértices son $(x_0\ y_0)$, $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0 + h, y_0 + k)$, $(x_0, y_0 + k)$ esté contenido en S. Aplicando la fórmula bidimensional de Taylor (Teorema 6-22 con $m = n = 2$), encontramos que para un cierto punto $(\bar{x}, \bar{y})$ perteneciente al segmento que une (y_0, y_0) con $(x_0 + h,\ y_0 + k)$ se verifica

$$(1) \qquad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\, d^2 f[(\bar{x}, \bar{y}); (h, k)]$$

$$= \frac{1}{2}\,(ah^2 + 2bhk + ck^2),$$

donde $a = D_{1,1}f(\bar{x}, \bar{y})$, $b = D_{1,2}f(\bar{x}, \bar{y})$, y $c = D_{2,2}f(\bar{x}, \bar{y})$. Al llegar a este punto de la demostración, consideramos dos casos según sea el signo algebraico de Δ.

Caso 1.º ($\Delta > 0$). La condición $\Delta > 0$ implica $A \neq 0$. Introducimos una nueva función D definida en cada (x, y) de S por la ecuación

$$D(x, y) = D_{1,1}f(x, y)\, D_{2,2}f(x, y) - D_{1,2}^2 f(x, y).$$

Esta función D es contínua en S y $D(x_0, y_0) = \Delta > 0$. Existe por lo tanto un entorno de (x_0, y_0) en el que $D(x, y) > 0$ y $D_{1,1}f(x, y)$ tiene el mismo signo que A. Si elegimos h y k de manera que el rectángulo $R(x, y)$ quede contenido en ese entorno, entonces $(\bar{x}, \bar{y}) \in R(h, k)$ y por consiguiente $ac - b^2 > 0$ y a tiene el mismo signo que A. Completando cuadrados, la igualdad (1) se convierte en

$$(1a) \qquad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2a}\,[(ah + bk)^2 + (ac - b^2)k^2].$$

La expresión entre corchetes es positiva (por ser una suma de dos cuadrados) y por tanto la diferencia del primer miembro tiene el mismo signo que a (que a su vez tiene el mismo signo que A). De esto se deducen inmediatamente las conclusiones a) y b).

Caso 2.º ($\Delta < 0$). En este caso demostraremos que todo entorno de (x_0, y_0) contiene puntos (x, y) en los que $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ y puntos para los que $f(x, y) < f(x_0, y_0)$. Si $A \neq 0$, elegimos un entorno de (x_0, y_0) en el que

$D(x, y) < 0$ y $D_{1,1}f(x, y)$ tenga el mismo signo que A. Elijamos ahora h y k de modo que el rectángulo $R(h, k)$ quede interior al entorno. Entonces, como antes, la igualdad (1a) es cierta, pero ahora $ac - b^2 < 0$ y a tiene el mismo signo que A. Si tomamos $k = 0$ y $h \neq 0$, el segundo miembro de (1a) tiene el mismo signo que A, pero si tomamos $k \neq 0$ y $h = -bk/a$ el segundo miembro de (1a) tiene el signo opuesto al de A. Esto demuestra c) si $A \neq 0$, y en el caso en que $C \neq 0$ se sigue un razonamiento parecido.

Supongamos ahora que $A = C = 0$. La condición $\Delta < 0$ implica $B \neq 0$. Si elejimos $h = k$, la igualdad (1) se convierte en

$$f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) = \frac{h^2}{2}(a + 2b + c),$$

de la que obtenemos la relación

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{a + 2b + c}{2} = \frac{A + C}{2} + B = B.$$

Por consiguiente, para un valor suficientemente pequeño de $|h|$ el cociente $[f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)]/h^2$ (y por tanto el numerador) tiene el mismo signo que B. Por otra parte, si elejimos $h = -k$ y utilizamos el mismo tipo de razonamiento, encontramos que el límite de ese cociente es $-B$ de donde resulta que para un valor suficientemente pequeño de $|h|$ el numerador tiene signo opuesto al de B. Esto completa la demostración de la parte c).

Con un razonamiento parecido al seguido en la anterior demostración puede conseguirse la generalización del Teorema 7-8 al caso de n variables independientes. Tal demostración, no obstante, la omitimos. Nos limitaremos a enunciar el Teorema.

7—9 TEOREMA. *Sea f una función que tiene derivadas parciales segundas continuas en un conjunto abierto S de E_n. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto de S para el cual $D_1f(\mathbf{x}_0) = \cdots = D_nf(\mathbf{x}_0) = 0$. Supongamos que el determinante $\Delta = \det [D_{i,j}f(\mathbf{x}_0)] \neq 0$. Consideremos $\Delta_0 = 1$ y sea Δ_{n-k} el determinante obtenido de Δ prescindiendo de las k últimas filas y columnas. Si los $n + 1$ números $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ son todos positivos, entonces f tiene un mínimo local en $\mathbf{x}_0$. Si esos números son alternativamente positivos y negativos, f tiene un máximo local en $\mathbf{x}_0$.*

7-8 Problemas de extremos condicionados. Consideraremos el siguiente tipo de problema de extremos. Supongamos que $f(x, y, z)$ representa la temperatura

en el punto (x, y, z) del espacio y preguntamos por el valor máximo o mínimo de la temperatura sobre una cierta superficie. Si la ecuación de la superficie está dada explícitamente en la forma $z = h(x, y)$, entonces en la expresión $f(x, y, z)$ podemos substituir z por $h(x, y)$ para obtener la temperatura sobre la superficie como una función solamente de x e y, $F(x, y) = f[x, y, h(x, y)]$. El problema se reduce entonces a encontrar los valores extremos de F. Sin embargo, en la práctica, surgen ciertas dificultades. La ecuación de la superficie podría darse en forma implícita, $g(x, y, z) = 0$, y entonces ser imposible el despejar z en función de x e y o igualmente x o y en función de las restantes variables. El problema podría complicarse aún más al querer conocer los valores extremos de la temperatura en todos los puntos que pertenecen a un *curva* del espacio. Una tal curva es la intersección de dos superficies, $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$. Si pudiéramos despejar de estas dos ecuaciones x e y en función de z, introduciríamos estas expresiones en f y obtendríamos una nueva función con la única variable z, cuyos extremos podríamos entonces buscar. En general, sin embargo, no puede realizarse, y debe buscarse un método más practicable. Un método muy elegante y útil para atacar tales problemas fue desarrollado por LAGRANGE.

El método de Lagrange proporciona una condición *necesaria* para un extremo y puede describirse como sigue. Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ una expresión cuyos valores extremos se piden cuando las variables están sometidas a un cierto número de condiciones, sean estas $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Formamos entonces la combinación lineal

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son m constantes. Diferenciamos ϕ respecto a cada coordenada y consideramos el siguiente sistema de $n + m$ ecuaciones:

$$D_r\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, n,$$
$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Lagrange descubrió que si el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ es una solución del problema, debe también satisfacer ese sistema de $n + m$ ecuaciones. En la práctica, se intenta resolver ese sistema respecto a las $n + m$ «incógnitas» $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, y $x_1, \ldots, x_n$. Los puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ así obtenidos deben entonces comprobarse para determinar si originan un máximo, un mínimo, o ninguna de las dos cosas. Los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, que son introducidos únicamente como ayuda para resolver el sistema respecto a $x_1, \ldots, x_n$, se llaman los multiplicadores de Lagrange. Se introduce un multiplicador por cada condición.

Existe un complicado criterio analítico para distinguir entre máximos y mínimos en tales problemas. (Ver, p. ej. Ref. 7-1.) No obstante, este criterio no es muy útil en la práctica y en algunos problemas particulares es normal-

mente más fácil hacer uso de otros medios (por ejemplo, consideraciones físicas o geométricas) para hacer esta distinción.

El siguiente teorema establece la validez del método de Lagrange:

7—10 TEOREMA. *Sea f una función real tal que $f \in C'$ en un conjunto abierto S de E_n. Sean $g_1, \ldots, g_m$ m funciones reales tales que $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m) \in C'$ en S, y supongamos que $m < n$. Sea X_0 aquel subconjunto de S en el cual $\mathbf{g}$ se anula, esto es,*

$$X_0 = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in S,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Supongamos que $\mathbf{x}_0 \in X_0$ y que existe un entorno $N(\mathbf{x}_0)$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x}$ en $X_0 \cap N(\mathbf{x}_0)$. o que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x}$ en $X_0 \cap N(\mathbf{x}_0)$. Supongamos asimismo que el determinante de orden m $\det[D_j g_i(\mathbf{x}_0)] \neq 0$. Existen entonces m números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de manera que se satisfacen las n ecuaciones siguientes:

$$D_r f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

NOTA. Las n ecuaciones 2) equivalen a la siguiente ecuación vectorial:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Demostración. Consideremos el siguiente sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_0) = -D_r f(\mathbf{x}_0) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Este sistema posee solución única ya que, por hipótesis, el determinante del sistema no es nulo. Por consiguiente, las *m primeras ecuaciones* de 2) son compatibles. Tenemos que demostrar ahora que con esta elección de $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ las $n - m$ ecuaciones restantes también se satisfacen.

Para ello, aplicamos el teorema de la función implícita. Ya que $m < n$, todo punto $\mathbf{x}$ de S puede ponerse en la forma $\mathbf{x} = (\mathbf{x}'; \mathbf{t})$, donde $\mathbf{x}' \in E_m$ y $\mathbf{t} \in E_{n-m}$. En lo que sigue escribiremos $\mathbf{x}'$ en lugar de $(x_1, \ldots, x_m)$ y $\mathbf{t}$ para representar $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, así que $t_k = x_{m+k}$. Utilizando la función vectorial $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$, podemos ahora escribir $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ si $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}'_0; \mathbf{t}_0)$. Puesto que $\mathbf{g} \in C'$ en S, y el determinante $\det[D_j g_i(\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0)] \neq 0$, todas las condiciones del teorema de la función implícita quedan satisfechas. Por consiguiente, existe un entorno $(n - m)$-dimensional T_0 de $\mathbf{t}_0$ y una sola función vectorial $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, definida en T_0 y que tiene los valores en E_m, tal que $\mathbf{h} \in C'$ en T_0, $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}'_0$, y para todo $\mathbf{t}$ de T_0, tenemos $\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{0}$. Esto equivale a decir que el sistema de m ecuaciones

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

puede ser «resuelto» respecto a $x_1, \ldots, x_n$ en función de $x_{m+1}, \ldots, x_n$, dando la solución en la forma $x_r = h_r(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $r = 1, 2, \ldots, m$. Ahora «sustituiremos» estas expresiones de $x_1, \ldots, x_m$ en la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ y también en cada expresión $g_p(x_1, \ldots, x_n)$. Es decir, definimos una nueva función F de la manera siguiente:

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f[h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n);\ x_{m+1}, \ldots, x_n];$$

y definimos m nuevas funciones $G_1, \ldots, G_m$ así:

$$G_p(x_{m+1}, \ldots, x_n) = g_p[h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n);\ x_{m+1}, \ldots, x_n].$$

Más brevemente, podemos escribir $F(\mathbf{t}) = f[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$ y $G_p(\mathbf{t}) = g_p[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$, donde $\mathbf{H}(\mathbf{t}) = (\mathbf{h}(\mathbf{t});\ \mathbf{t})$. Aquí $\mathbf{t}$ debe pertenecer al conjunto T_0.

Cada función G_p así definida es idénticamente nula en el conjunto T_0 según el teorema de la función implícita. Por lo tanto, cada derivada $D_r G_p$ es también idénticamente nula en T_0 y, en particular, $D_r G_p(\mathbf{t}_0) = 0$. Pero según la regla de la cadena (Teorema 6-14), podemos calcular estas derivadas así:

$$D_r G_p(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r H_k(\mathbf{t}_0) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Pero $H_k(\mathbf{t}) = h_k(\mathbf{t})$ si $1 \le k \le m$, y $H_k(\mathbf{t}) = x_k$ si $m+1 \le k \le n$. Por consiguiente, cuando $m+1 \le k \le n$, tenemos $D_r H_k(\mathbf{t}) \equiv 0$ si $m + r \neq k$ y $D_r H_{m+r}(\mathbf{t}) = 1$ para todo $\mathbf{t}$. Luego el anterior conjunto de ecuaciones se convierte en

3) $$\sum_{k=1}^{m} D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad \begin{cases} p = 1, 2, \ldots, m, \\ r = 1, 2, \ldots, n-m. \end{cases}$$

Por la continuidad de $\mathbf{h}$, existirá un entorno $N(\mathbf{t}_0) \subset T_0$ tal que $\mathbf{t} \in N(\mathbf{t}_0)$ implica $(\mathbf{h}(\mathbf{t});\ \mathbf{t}) \in N(\mathbf{x}_0)$, donde $N(\mathbf{x}_0)$ es el entorno del enunciado del teorema. Por tanto, $\mathbf{t} \in N(\mathbf{t}_0)$ implica $(\mathbf{h}(\mathbf{t});\ \mathbf{t}) \in X_0 \cap N(\mathbf{x}_0)$ y por consiguiente, según la hipótesis, tenemos o bien que $F(\mathbf{t}) \le F(\mathbf{t}_0)$ para todo $\mathbf{t}$ en $N(\mathbf{t}_0)$ o bien $F(\mathbf{t}) \ge F(\mathbf{t}_0)$ para todo $\mathbf{t}$ en $N(\mathbf{t}_0)$. Esto es, F tiene un máximo local o un mínimo local en el punto interior $\mathbf{t}_0$. Cada derivada parcial $D_r F(\mathbf{t}_0)$ debe pues ser cero. Si utilizamos la regla de la cadena para calcular esas derivadas, encontramos

$$D_r F(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{x}_0) D_r H_k(\mathbf{t}_0) \qquad (r = 1, \ldots, n-m),$$

y podemos pues escribir

4) $$\sum_{k=1}^{m} D_k f(\mathbf{x}_0) D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} f(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n-m).$$

Si multiplicamos ahora 3) por λ_p, sumamos respecto a p, y agregamos el resultado a 4), encontramos

$$\sum_{k=1}^{m}\left[D_k f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{m} \lambda_p D_k g_p(\mathbf{x}_0)\right] D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} f(\mathbf{x}_0)$$
$$+ \sum_{p=1}^{m} \lambda_p D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0,$$

para $r = 1, \ldots, n - m$. En la suma relativa a k, la expresión entre corchetes se anula en virtud de la manera como fueron definidos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Así que obtenemos como resultado

$$D_{m+r} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{m} \lambda_p D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n - m),$$

y estas son exactamente las ecuaciones que necesitábamos para completar la demostración.

Al intentar la solución de un problema de extremos por el método de Lagrange, ordinariamente es muy fácil determinar el sistema de ecuaciones 2) pero, en general, no es cosa fácil «resolverlo» en realidad. Con frecuencia pueden emplearse artificios especiales para obtener los valores extremos de f directamente a partir de 2) sin encontrar de antemano los puntos particulares donde esos extremos son alcanzados. El ejemplo siguiente pone de manifiesto alguno de esos artificios:

EJEMPLO. *Una cuádrica con centro en el origen tiene la ecuación*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1.$$

Calcular las longitudes de sus semi-ejes.

Solución. Escribamos (x_1, x_2, x_3) en lugar de (x, y, z), e introduzcamos la forma cuadrática

5) $$q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i x_j,$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y los $a_{ij} = a_{ji}$ son elegidos de manera que la ecuación de la superficie tenga la forma $q(\mathbf{x}) = 1$. (En consecuencia la forma cuadrática es simétrica y definida positiva.) El problema es equivalente a encontrar los valores extremos de $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ con la condición $g(\mathbf{x}) = 0$, donde $g(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - 1$. Utilizando el método de Lagrange, introducimos un multiplicador y consideramos la ecuación vectorial

6) $$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

(ya que $\nabla g = \nabla q$). En este caso particular, f y q son ambas funciones homogéneas de grado 2 y podemos aplicar el teorema de Euler (ver Ejercicio 6-15) en 6) y obtener

$$\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{x}\cdot\nabla q(\mathbf{x}) = 2f(\mathbf{x}) + 2\lambda q(\mathbf{x}) = 0.$$

Puesto que sobre la superficie $q(\mathbf{x}) = 1$ obtenemos $\lambda = -f(\mathbf{x})$, y 6) se convierte en

7) $$t\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

donde $t = 1/f(\mathbf{x})$. (En este problema no puede ser $f(\mathbf{x}) = 0$.) La ecuación vectorial 7) conduce entonces a las tres ecuaciones siguientes en x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned}(a_{11} - t)x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 &= 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22} - t)x_2 + \quad a_{23}x_3 &= 0,\\ a_{31}x_1 + \quad a_{32}x_2 + (a_{33} - t)x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no es solución para nuestro problema, el determinante de este sistema debe ser nulo. Esto es, debe ser

8) $$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación 8) se llama la *ecuación característica* de la forma cuadrática 5). En este caso, la naturaleza geométrica del problema nos garantiza que las tres raíces t_1, t_2, t_3 de esta cúbica deben ser reales y positivas. [Puesto que $q(\mathbf{x})$ es simétrica y definida positiva, la teoría general de las formas cuadráticas también asegura que las raíces de 8) son todas reales y positivas. (Ver Ref. 7-2, Teorema 9-25.)] Los semi-ejes de la cuádrica son $t_1^{-1/2}, t_2^{-1/2}, t_3^{-1/2}$.

Ejercicios

Jacobianos.

7-1. Sea f una función compleja definida para todo complejo $z \neq 0$ mediante la ecuación $f(z) = 1/\bar{z}$. Demostrar que $J_f(z) = -|z|^{-4}$. Demostrar que f es uno a uno y calcular explícitamente f^{-1}.

7-2. Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ una función vectorial definida (para todo punto (x_1, x_2, x_3) en E_3 para el cual $x_1 + x_2 + x_3 \neq -1$) así:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_k}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Demostrar que $J_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 + x_2 + x_3)^{-4}$. Demostrar que $\mathbf{f}$ es uno a uno y calcular explícitamente $\mathbf{f}^{-1}$.

7-3. Sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ una función vectorial definida en E_n, supongamos que $f \in C'$ en E_n, y designemos por $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ el Jacobiano. Sean $g_1, \ldots, g_n$ n funciones reales definidas

en E_1 que tienen derivadas continuas $g'_1, \ldots, g'_n$. Pongamos $h_k(\mathbf{x}) = f_k[g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, y $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. Demostrar que

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}[g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)]g'_1(x_1)\cdots g'_n(x_n)$$

7-4. a) Si $x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta$, demostrar que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

b) Si $x(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \operatorname{sen} \phi$, $y(r, \theta, \phi) = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$, $z = r \cos \phi$, demostrar que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = -r^2 \operatorname{sen} \phi.$$

7-5. a) Establecer las condiciones precisas a las que deben satisfacer f y g que nos aseguren que las ecuaciones $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ puedan resolverse con respecto a u y v en un entorno de (x_0, y_0). Si las soluciones son $u = F(x, y)$, $v = G(x, y)$, y si $J = \partial(f, g)/\partial(u, v)$, demostrar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

b) Calcular J y las derivadas parciales de F y G en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ cuando $f(u, v) = u^2 - v^2$, $g(u, v) = 2uv$.

7-6. Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ dos funciones como las descritas en el Teorema 7-5. Considerar el caso $n = 3$ y demostrar que se verifica

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})D_1g_i(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \delta_{i,1} & D_1f_2(\mathbf{x}) & D_1f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,2} & D_2f_2(\mathbf{x}) & D_2f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,3} & D_3f_2(\mathbf{x}) & D_3f_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, 3),$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Utilizar esto para deducir la fórmula

$$D_1g_1 = \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x_2, x_3)} \Big/ \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

y obtener expresiones análogas para las otras ocho derivadas D_kg_i.

7-7. Sea $f = u + iv$ una función compleja que satisface las condiciones siguientes: $u \in C'$ y $v \in C'$ en el disco abierto $A = \{z| \, |z| < 1\}$; f es continua en el disco cerrado $\bar{A} = \{z| \, |z| \leq 1\}$; $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = y$ siempre que $x^2 + y^2 = 1$; el Jacobiano $J_f(z) > 0$ si $z \in A$. Sea $B = f(A)$ la imagen de A originada por f. Se trata de demostrar:

a) Si X es un subconjunto abierto de A, entonces $f(X)$ es un subconjunto abierto de B.

b) B es un disco abierto de radio 1.

c) Para cada punto $u_0 + iv_0$ de B, existen tan sólo un número finito de puntos z en A tales que $f(z) = u_0 + iv_0$.

Problemas de extremos.

7-8. Encontrar y clasificar los valores extremos (si existen) de las funciones definidas por medio de las ecuaciones siguientes:

a) $f(x, y) = y^2 + x^2y + x^4$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$.

c) $f(x, y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$.

d) $f(x, y) = y^2 - x^3$.

7-9. Encontrar la mínima distancia entre el punto $(0, b)$ del eje y a la parábola $x^2 - 4y = 0$. Resolver este problema utilizando el método de Lagrange y también sin usarlo.

7-10. Resolver los problemas geométricos siguientes por el método de Lagrange:

a) Encontrar la mínima distancia entre el punto (a_1, a_2, a_3) de E_3 al plano cuya ecuación es $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$.

b) Encontrar el punto de la recta común a los dos planos

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$$

y

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$$

que está más próximo al origen.

7-11. Encontrar el máximo valor de $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right|$, si $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$, utilizando

a) la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

b) el método de Lagrange.

7-12. Encontrar el máximo de $(x_1x_2 \cdots x_n)^2$ bajo la condición

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Utilizar el resultado para deducir la desigualdad siguiente, válida para números reales positivos $a_1, \ldots, a_n$:

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

7-13. Si $f(\mathbf{x}) = x_1^k + \ldots + x_n^k$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, demostrar que un extremo local de f sujeto a la condición $x_1 + \cdots + x_n = a$, es $a^k n^{1-k}$.

7-14. Demostrar que todos los puntos (x_1, x_2, x_3, x_4) donde $x_1^2 + x_2^2$ tiene un extremo local sujeto a las dos condiciones $x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$, $x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 9$, se encuentran entre

$$(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1),\ (0, \pm 1, \pm 2, 0),\ (\pm 1, 0, 0, \pm\sqrt{3}),\ (\pm 2, \pm 3, 0, 0).$$

¿Cuales originan un máximo local y cuales un mínimo local? Razonar las respuestas.

7-15. Demostrar que los valores extremos de $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sujetos a las dos condiciones

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 1 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

y

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0, \qquad (b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0),$$

son t_1^{-1}, t_2^{-1}, donde t_1 y t_2 son las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demostrar que esta es una ecuación cuadrática en t y dar una razón geométrica que explique por qué las raíces t_1, t_2 son reales y positivas.

7-16. Consideremos $\Delta = \det [x_{ij}]$ y $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$. Un famoso teorema de Hadamard establece que $|\Delta| \leq d_1 \ldots d_n$, si $d_1, \ldots, d_n$ son n constantes positivas tales que $|\mathbf{X}_i|^2 = d_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Demostrar esto considerando Δ como una función de n^2 variables sujetas a n condiciones, utilizando el método de Lagrange para probar que cuando Δ tiene un extremo bajo esas condiciones, debe verificarse

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} d_1^2 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & d_n^2 \end{vmatrix}$$

REFERENCIAS

7-1. HANCOCK, H., *Theory of Maxima and Minima*. Boston: Ginn, 1917.

7-2. PERLIS, S., *Theory of Matrices*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1952.

CAPÍTULO 8

FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA, CURVAS RECTIFICABLES Y CONJUNTOS CONEXOS

8-1 Introducción. Algunas de las propiedades fundamentales de las funciones monótonas fueron deducidas en el Capítulo 4. En la primera parte de este capítulo trataremos de las funciones de variación acotada, una clase de funciones íntimamente relacionadas con las funciones monótonas. Veremos que estas funciones están en conexión con las curvas que tienen longitud finita (curvas rectificables). Asimismo desempeñan un papel fundamental en la teoría de la integración (que se desarrolla en el próximo capítulo). En la última parte del presente capítulo estudiaremos las propiedades de los conjuntos conexos.

8-2 Propiedades de las funciones monótonas.

8—1 Teorema. *Sean f una función creciente definida en $[a, b]$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ puntos tales que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Se verifica entonces la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b) - f(a).$$

Demostración. Supongamos que $y_k \in (x_k, x_{k+1})$. Para $1 \leq k \leq n-1$, tenemos $f(x_k+) \leq f(y_k)$ y $f(y_{k-1}) \leq f(x_k-)$, así que $f(x_k+) - f(x_k-) \leq f(y_k) - f(y_{k-1})$. Si sumamos estas desigualdades obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(y_{n-1}) - f(y_0) \leq f(b) - f(a).$$

Esta es la desigualdad del teorema.

La diferencia $f(x_k+) - f(x_k-)$ es, naturalmente, el salto de f en x_k. El teorema anterior nos dice que para toda colección finita de puntos x_k en (a, b), la suma de los saltos en dichos puntos está siempre acotada por $f(b) - f(a)$. Este resultado puede ser utilizado para demostrar el teorema siguiente.

8—2 Teorema. *Si f es monótona en $[a, b]$, el conjunto de las discontinuidades de f es numerable.*

Demostración. Supongamos que f es creciente y sea S_m el conjunto de

puntos en (a, b) en los que el salto de f excede a $1/m$, $m > 0$. Si $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ pertenecen a S_m, el Teorema 8-1 nos dice que

$$\frac{n-1}{m} \leq f(b) - f(a).$$

Esto significa que S_m debe ser un conjunto finito. Pero el conjunto de las discontinuidades de f en (a, b) es un subconjunto de la reunión $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ y, por tanto, es numerable. (Si f es decreciente, el razonamiento puede aplicarse a $-f$.)

8-3 Funciones de variación acotada.

8—3 Definición. *Si $[a, b]$ es un intervalo finito, un conjunto de puntos*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

que satisfacen las desigualdades $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ se llama una partición de $[a, b]$. El intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es el subintervalo k-ésimo de P y escribimos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, así que $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$. La colección de todas las particiones posibles de $[a, b]$ se designa por $\mathcal{P}[a, b]$.

8—4 Definición. *Sea f una función definida en $[a, b]$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, escribimos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Si existe un número positivo M tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M$$

para todas las particiones de $[a, b]$, se dice que f es de variación acotada en $[a, b]$.

Los dos próximos teoremas proporcionan ejemplos de funciones de variación acotada.

8—5 Teorema. *Si f es monótona en $[a, b]$, es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Sea f creciente. Entonces para toda partición de $[a, b]$ tenemos $\Delta f_k \geq 0$ y, por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

8—6 Teorema. *Si f es continua en $[a, b]$ y existe f' y es ésta acotada en el interior, $|f'(x)| \leq A$ para todo x de (a, b), entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Aplicando el Teorema del valor medio, podemos escribir

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}), \text{ donde } t_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Esto implica

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f'(t_k)| \Delta x_k \leq A \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = A(b-a).$$

8—7 TEOREMA. *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, es decir $\sum|\Delta f_k| \leq M$ para todas las particiones de $[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$. En realidad, $|f(x)| \leq |f(a)| + M$ si $x \in [a, b]$.*

Demostración. Supongamos que $x \in (a, b)$. Utilizando la partición particular $P = \{a, x, b\}$, encontramos

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M.$$

Esto implica que $|f(x) - f(a)| \leq M$, $|f(x)| \leq |f(a)| + M$, como queríamos demostrar.

EJEMPLOS.

1. Es fácil construir una función continua que no es de variación acotada. Por ejemplo, $f(x) = x \cos(\pi/2x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Entonces f es continua en $[0, 1]$, pero si consideramos la partición

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

un sencillo cálculo demuestra que

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Esta suma no puede ser acotada para todo n, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ diverge. En este ejemplo la derivada f' existe en $(0, 1)$ pero no está acotada en $(0, 1)$. Sin embargo, f' es acotada en cualquier intervalo cerrado que no contenga el origen y, por tanto, f es de variación acotada en un tal intervalo.

2. Un ejemplo parecido al anterior es el siguiente $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta f es de variación acotada en $[0, 1]$, ya que f' está acotada en $[0, 1]$. En efecto, $f'(0) = 0$ y, para todo $x \neq 0$, $f'(x) = \text{sen}(1/x) + 2x \cos(1/x)$, así que $|f'(x)| \leq 3$ para todo x en $[0, 1]$.

3. La acotación de f' no es necesaria para que f sea de variación acotada. Por ejemplo, $f(x) = x^{1/3}$. Esta función es monótona (y, por tanto, de variación acotada) en todo intervalo finito. Sin embargo, $f'(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0$.

8-4 Variación total.

8—8 DEFINICIÓN. *Sea f de variación acotada en $[a, b]$, y designemos por $\sum(P)$ la suma $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$ correspondiente a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$. El número*

$$V_f(a, b) = \sup \{\Sigma(P) | P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

se llama la variación total de f en el intervalo $[a, b]$.

NOTA. Cuando no haya peligro de confusión, escribiremos V_f en lugar de $V_f(a, b)$.

Puesto que f es de variación acotada en $[a, b]$, el número V_f es finito. También, $V_f \geq 0$, ya que cada suma $\sum(P) \geq 0$. Además, $V_f(a, b) = 0$ si, y únicamente si, f es constante en $[a, b]$. [¿Por qué?]

8—9 TEOREMA. *Supongamos que f y g son dos funciones de variación acotada en $[a, b]$. Entonces también lo son su suma, diferencia, y producto. Asimismo tenemos*

$$V_{f \pm g} \leq V_f + V_g \quad y \quad V_{f \cdot g} \leq AV_f + BV_g,$$

donde $A = \sup \{|g(x)| \, | x \in [a, b]\}$, $B = \sup \{|f(x)| \, | x \in [a, b]\}$.

Demostración. Consideremos $h(x) = f(x)g(x)$. Para toda partición P de $[a, b]$, tenemos

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &= |[f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)] \\ &\quad + [f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]| \leq A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k|. \end{aligned}$$

Esto implica que h es de variación acotada y que $V_h \leq AV_f + BV_g$. Las demostraciones para la suma y la diferencia son sencillas y las omitiremos.

Los cocientes no han sido incluidos en el teorema anterior debido a que la función recíproca de una función de variación acotada no es necesariamente de variación acotada. Por ejemplo, si $f(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$, $1/f$ no será acotada en cualquier intervalo que contenga x_0 y (por el Teorema 8-7) $1/f$ no puede ser de variación acotada en tal intervalo. Para extender el Teorema 8-9 a los cocientes, basta excluir las funciones cuyos valores lleguen a ser tan próximos a cero como se quiera.

8—10 TEOREMA. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que está acotada inferiormente por un número positivo, es decir, supongamos que existe un número positivo m tal que $0 < m \leq |f(x)|$ para todo x en $[a, b]$. En tal caso $g = 1/f$ es también de variación acotada en $[a, b]$, y $V_g \leq V_f/m^2$.*

Demostración.

$$|\Delta g_k| = \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \left|\frac{\Delta f_k}{f(x_k)f(x_{k-1})}\right| \leq \frac{|\Delta f_k|}{m^2}.$$

En los dos últimos teoremas se conservó fijo el intervalo $[a, b]$ y $V_f(a, b)$ fue considerada como una función de f. Si conservamos fija f y estudiamos la variación total como una función del intervalo $[a, b]$, podemos demostrar la siguiente propiedad « *aditiva* ».

8—11 TEOREMA. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$, y supongamos que $c \in (a, b)$. Entonces f es de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y se tiene*

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Demostración. En primer lugar demostramos que f es de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Sean P_1 una partición de $[a, c]$ y P_2 una partición de $[c, b]$. Entonces $P_0 = P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$. Si $\sum(P)$ representa la suma $\sum|\Delta f_k|$ correspondiente a la partición P (del intervalo que se considera), podemos escribir

1) $$\Sigma(P_1) + \Sigma(P_2) = \Sigma(P_0) \leq V_f(a, b).$$

Esto demuestra que cada suma $\sum(P_1)$ y $\sum(P_2)$ está acotada por $V_f(a, b)$ lo cual significa que f es de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$. De 1) obtenemos también la desigualdad

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b)$$

por el Teorema 1-8.

Para obtener la desigualdad inversa, tomemos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ y sea $P_0 = P \cup \{c\}$ la partición (posiblemente nueva) obtenida adjuntando el punto c. Si $c \in [x_{k-1}, x_k]$, tenemos entonces

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|$$

y, por tanto, $\sum(P) \leq \sum(P_0)$. Ahora bien, los puntos de P_0 en $[a, c]$ determinan una partición P_1 de $[a, c]$ y los pertenecientes a $[c, b]$ determinan una partición P_2 de $[c, b]$. Las correspondientes sumas para todas esas particiones están relacionadas así:

$$\Sigma(P) \leq \Sigma(P_0) = \Sigma(P_1) + \Sigma(P_2) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Por consiguiente, $V_f(a, c) + V_f(c, b)$ es una cota superior para toda suma $\sum(P)$. Ya que dicha cota no puede ser menor que la cota superior mínima, tenemos

$$V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b),$$

y esto completa la demostración.

Estamos ahora en condiciones de mantener fijos la función f y el extremo izquierdo del intervalo y estudiar la variación total como una función del extremo de la derecha. La propiedad aditiva que acabamos de demostrar implica importantes propiedades para esa función.

8–12 TEOREMA. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$. Sea V la función definida en $[a, b]$ así: $V(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$, $V(a) = 0$. Entonces:*

I) *V es una función creciente en $[a, b]$.*
II) *$V - f$ es una función creciente en $[a, b]$.*

Demostración. Si $a < x < y \leq b$, podemos escribir $V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y)$. Esto implica $V(y) - V(x) = V_f(x, y) \geq 0$. Por lo tanto $V(x) \leq V(y)$, y I) es cierta.

Para demostrar II), pongamos $D(x) = V(x) - f(x)$ si $x \in [a, b]$. Entonces, si $a \leq x < y \leq b$, tenemos

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - [f(y) - f(x)] = V_f(x, y) - [f(y) - f(x)].$$

Pero según la definición de $V_f(x, y)$ se sigue que

$$f(y) - f(x) \leq V_f(x, y).$$

Esto significa que $D(y) - D(x) \geq 0$, y II) queda demostrada.

La siguiente caracterización sencilla y elegante de las funciones de variación acotada es una consecuencia del Teorema 8-12.

8–13 TEOREMA. *Sea f una función definida en $[a, b]$. La condición necesaria y suficiente para que f sea de variación acotada en $[a, b]$ es que f pueda expresarse como la diferencia de dos funciones crecientes.*

Demostración. Si f es de variación acotada en $[a, b]$, podemos escribir $f = V - D$, donde V es la función del Teorema 8-12 y $D = V - f$. Ambas funciones V y D son crecientes en $[a, b]$.

El recíproco del teorema se deduce inmediatamente de los Teoremas 8-5 y 8-9.

La representación de una función de variación acotada como una diferencia de dos funciones crecientes no es única. Si $f = f_1 - f_2$, donde f_1 y f_2 son crecientes, también tenemos $f = (f_1 + g) - (f_2 + g)$, donde g es una función

creciente arbitraria, y conseguimos una nueva representación de f. Si g es *estrictamente* creciente, lo mismo ocurrirá con $f_1 + g$ y $f_2 + g$. Por consiguiente, el Teorema 8-13 es también cierto, si «creciente» se reemplaza por «estrictamente creciente».

8-5 Funciones continuas de variación acotada.

8—14 Teorema. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$. Si $x \in (a, b]$, consideremos $V(x) = V_f(a, x)$ y pongamos $V(a) = 0$. Todo punto de continuidad de f es también un punto de continuidad de V. El recíproco es también cierto.*

Demostración. Puesto que V es monótona, los límites a la izquierda y a la derecha $V(x+)$ y $V(x-)$ existen para cada punto x de (a, b). Según el Teorema 8-13, lo mismo ocurre para $f(x+)$ y $f(x-)$.

Si $a < x < y \le b$, tenemos [según la definición de $V_f(x, y)$].

$$0 \le |f(y) - f(x)| \le V(y) - V(x).$$

Considerando que $y \to x$, encontramos

$$0 \le |f(x+) - f(x)| \le V(x+) - V(x).$$

Análogamente, $0 \le |f(x) - f(x-)| \le V(x) - V(x-)$. Estas desigualdades implican que un punto de continuidad de V también lo es de f.

Para demostrar el recíproco, sea f continua en el punto c de (a, b). Dado $\varepsilon > 0$, existe entonces un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ implica $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Para este mismo ε, existe también una partición P de $[c, b]$, sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $x_0 = c$, $x_n = b$, para la cual

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|.$$

La incorporación de más puntos a P únicamente puede aumentar la suma $\sum|\Delta f_k|$ y, por tanto, podemos suponer que $0 < x_1 - x_0 < \delta$. Esto significa que

$$|\Delta f_1| = |f(x_1) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y la desigualdad anterior se transforma ahora en

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=2}^{n} |\Delta f_k| \le \frac{\varepsilon}{2} + V_f(x_1, b),$$

ya que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una partición de $[x_1, b]$. Tenemos, por tanto,

$$V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon.$$

Pero $0 \leq V(x_1) - V(c) = V_f(a, x_1) - V_f(a, c) = V_f(c, x_1) = V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon$. Hemos demostrado pues que $0 < x_1 - c < \delta$ implica $0 \leq V(x_1) - V(c) < \varepsilon$. Esto prueba que $V(c+) = V(c)$. Por un razonamiento análogo se llega a $V(c-) = V(c)$. El teorema está pues demostrado para todos los puntos interiores de $[a, b]$. (Para los extremos son necesarias pequeñas modificaciones.)

Combinando los Teoremas 8-14 y 8-13, podemos establecer

8—15 Teorema. *Sea f continua en $[a, b]$. La condición necesaria y suficiente para que f sea de variación acotada en $[a, b]$ es que pueda expresarse como la diferencia de dos funciones continuas crecientes.*

Nota. El teorema también es cierto si «creciente» se reemplaza por «estrictamente creciente».

Naturalmente, las discontinuidades de una función de variación acotada (cuando existen) deben ser discontinuidades de salto en virtud del Teorema 8-13. Además, el Teorema 8-2 nos dice que forman un conjunto numerable.

8-6 Curvas. En el estudio del cálculo elemental, el lector se habrá familiarizado con el método de representar una curva plana paramétricamente mediante un par de ecuaciones de la forma

$$x = \alpha_1(t), \qquad y = \alpha_2(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

El intervalo $[a, b]$ en el que las dos funciones α_1 y α_2 están definidas se llama *intervalo paramétrico* y las funciones α_1 y α_2 corrientemente se suponen continuas y que gozan de ciertas propiedades de diferenciabilidad en este intervalo. Esta manera de representar una curva es particularmente útil, en especial en problemas físicos relativos al movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva. El intervalo paramétrico puede ser interpretado como un «intervalo de tiempo» y las ecuaciones paramétricas dan la posición de la partícula en el tiempo t. Consideraciones parecidas, naturalmente, se aplican a las curvas en el espacio tridimensional. En este caso, se usan tres ecuaciones paramétricas para representar la curva. Podemos ganar mucho en simplicidad, sin embargo, escribiendo *una* ecuación vectorial mejor que varias ecuaciones paramétricas, y en lo que sigue adoptaremos este procedimiento. Además, no es necesario limitarnos a E_2 o E_3, ya que es igualmente fácil dar una definición de lo que entendemos por curva en E_n.

8—16 Definición. *Sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una función vectorial continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La imagen de $[a, b]$ originada por $\boldsymbol{\alpha}$ se dice que es la curva determinada por $\boldsymbol{\alpha}$ y que une los puntos $\boldsymbol{\alpha}(a)$ y $\boldsymbol{\alpha}(b)$. Si $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$, la curva se llama cerrada. Si $\boldsymbol{\alpha}(a) \neq \boldsymbol{\alpha}(b)$, se dice que es un arco con extremos en $\boldsymbol{\alpha}(a)$ y $\boldsymbol{\alpha}(b)$. Si $\boldsymbol{\alpha}$ es uno a uno en*

$[a, b]$, la curva se llama un arco simple, o arco de Jordan. Si $\boldsymbol{\alpha}$ es uno a uno en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$, se llama curva simple cerrada, o curva de Jordán. Si $\boldsymbol{\alpha}$ es constante en $[a, b]$ la curva se llama curva punto. (Ver ejemplos en la fig. 8-1).

NOTA. Funciones distintas pueden representar la misma curva. Si decimos, por ejemplo, que el conjunto de puntos C es un arco de Jordan, se entenderá que existe por lo menos una función $\boldsymbol{\alpha}$, contínua y uno a uno en algún intervalo $[a, b]$, tal que C es la imagen de $[a, b]$ originada por $\boldsymbol{\alpha}$.

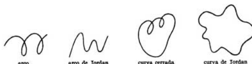


Fig. 8-1. Curvas en E_2.

8-7 Equivalencia de funciones vectoriales continuas. Se presentan ciertos casos en los que una descripción de una curva como un nuevo conjunto de puntos no es satisfactoria. Esto ocurre, en particular, en problemas físicos relativos al movimiento de una partícula, en los que es importante conocer no solamente el conjunto de puntos de la curva descrita por la partícula, sino también el orden de esos puntos durante el movimiento. Por ejemplo, supongamos que una partícula se mueve en el plano xy de manera que su posición en el tiempo t viene dada por

2) $$\alpha(t) = e^{2\pi i t}, \quad \text{si } 0 \le t \le 1.$$

La curva así descrita es el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$. Si en lugar de 2) la ecuación del movimiento es

3) $$\alpha(t) = e^{-2\pi i t}, \quad \text{si } 0 \le t \le 1,$$

la partícula recorre el mismo conjunto de puntos pero el movimiento tiene lugar en « dirección » opuesta que en 2). Aun más, la ecuación

4) $$\alpha(t) = e^{2\pi i t^2}, \quad \text{si } 0 \le t \le 1,$$

representa un movimiento parecido al 2) pero con distinta « velocidad ». La « dirección » del movimiento, sin embargo, es la misma en 2) y 4). Por el momento no nos ocuparemos de la « velocidad » con la que es descrita la curva, sino más bien del conjunto mismo de puntos de la curva y del *orden* en el cual dichos puntos se suceden. Todos los movimientos que describen una curva dada en la misma « dirección » se llamarán propiamente equivalentes. El significado preciso de esta idea lo da la definición siguiente.

8—17 DEFINICIÓN. *Sean* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *y* $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *dos funciones vectoriales definidas y continuas en* $[a, b]$ *y* $[c, d]$ *respectivamente. La función* $\boldsymbol{\beta}$ *se llama propiamente equivalente a* $\boldsymbol{\alpha}$ *si existe una función real* h, *continua y estrictamente creciente en* $[c, d]$, *tal que* $h(c) = a$, $h(d) = b$, *y que*

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}[h(t)] \quad \textit{para todo } t \textit{ en } [c, d].$$

Por otra parte, $\boldsymbol{\beta}$ *se llama impropiamente equivalente a* $\boldsymbol{\alpha}$ *si*

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}[k(t)] \quad \textit{para todo } t \textit{ en } [c, d],$$

donde k *es continua y estrictamente decreciente en* $[c, d]$, *siendo* $k(c) = b$ *y* $k(d) = a$. *Dos funciones* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *se llaman equivalentes si son propiamente o impropiamente equivalentes.*

NOTA. Cuando $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ describen curvas *cerradas*, la definición anterior requiere $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b) = \boldsymbol{\beta}(c) = \boldsymbol{\beta}(d)$.

Si usamos una terminología física e imaginamos $\boldsymbol{\alpha}$ como la descripción de un movimiento de A a B, por ejemplo, a lo largo de una curva Γ, entonces todas las funciones propiamente equivalentes a $\boldsymbol{\alpha}$ determinan también movimientos de A a B a lo largo de Γ, en tanto que todas las funciones impropiamente equivalentes a $\boldsymbol{\alpha}$ describen movimientos de B a A a lo largo de Γ.

Puesto que las funciones continuas estrictamente crecientes poseen inversas continuas y estrictamente crecientes (Teorema 4-29), se deduce que $\boldsymbol{\beta}$ es propiamente equivalente a $\boldsymbol{\alpha}$ si, y únicamente si, $\boldsymbol{\alpha}$ es propiamente equivalente a $\boldsymbol{\beta}$. Además, si $\boldsymbol{\alpha}$ es propiamente equivalente a $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\beta}$ es propiamente equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ son propiamente equivalentes. (Análogas observaciones son válidas, como es natural, para la equivalencia impropia.) Asimismo, es evidente que dos funciones equivalentes describen siempre la misma curva. El recíproco subsiste para aquellas funciones que describen *arcos simples*. Es decir, tenemos

8—18 TEOREMA. *Dos funciones* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *que describen arcos de Jordan son equivalentes si describen el mismo arco y recíprocamente.*

Demostración. Las funciones equivalentes describen necesariamente la misma curva. Toda la dificultad radica en la demostración del recíproco.

Consideremos $\boldsymbol{\alpha}$ definida en $[a, b]$ y $\boldsymbol{\beta}$ en $[c, d]$, y supongamos que ambas describan el mismo arco de Jordan Γ. Puesto que $\boldsymbol{\beta}$ es uno a uno y continua en el conjunto compacto $[c, d]$, el Teorema 4-17 nos dice que $\boldsymbol{\beta}^{-1}$ existe y es continua en $\boldsymbol{\beta}([c, d]) = \boldsymbol{\alpha}([a, b]) = \Gamma$. Definamos $h(t) = \boldsymbol{\beta}^{-1}[\boldsymbol{\alpha}(t)]$ si $t \in [a, b]$. Entonces h es continua en $[a, b]$ (según el Teorema 4-11) y $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}[h(t)]$ según la misma definición de h. El teorema quedará demostrado si podemos probar que h es estrictamente monótona en $[a, b]$.

Ya que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}^{-1}$ son ambas uno a uno, lo mismo ocurre para h. Para precisar, supongamos que $h(a) < h(b)$. Deseamos demostrar que h es estrictamente

creciente en $[a, b]$ y que $h(a) = c$, $h(b) = d$. Si $a < t_1 < t_2 < b$, entonces $h(t_1) \neq h(t_2)$. Supongamos que $h(t_1) > h(t_2)$. Si $h(a) < h(t_2)$, en el intervalo $[a, t_1]$ todos los valores comprendidos entre $h(a)$ y $h(t_1)$ serán alcanzados por h, en particular $h(t_2)$. Esto contradice la uniunivocidad. Si $h(a) > h(t_2)$, entonces $h(a)$ sería alcanzado en el intervalo $[t_2, b]$, lo cual es imposible. Por lo tanto, la desigualdad $h(t_1) > h(t_2)$ no puede verificarse. Luego $h(t_1) < h(t_2)$, y esto significa que h es estrictamente creciente en el intervalo abierto (a, b). Por la continuidad, lo mismo ocurre en $[a, b]$. De la definición de h se deduce que $h(a) = c$ y $h(b) = d$. Por consiguiente hemos demostrado que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son propiamente equivalentes. (En el caso en que $h(a) > h(b)$, un razonamiento semejante demuestra que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son impropiamente equivalentes.)

En la segunda parte del teorema anterior hemos considerado esencial el que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ describieran *arcos* de Jordan. El teorema debe ser modificado al considerar *curvas* de Jordan. En efecto, dos funciones que describen la misma curva de Jordan no son necesariamente equivalentes. Por ejemplo, si $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son tales funciones (definidas en $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente), debe verificarse $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$ y $\boldsymbol{\beta}(c) = \boldsymbol{\beta}(d)$. Si $\boldsymbol{\alpha}(a) \neq \boldsymbol{\beta}(c)$, las funciones no pueden ser equivalentes (de acuerdo con la Definición 8-17). Sin embargo, el hecho de que describen la misma curva implica $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\beta}(e)$ para algún punto e de (c, d). En este caso, podemos hacer un «traslado» del intervalo paramétrico y obtener una nueva función $\boldsymbol{\gamma}$, definida en $[e, d - c + e]$, que es equivalente a $\boldsymbol{\alpha}$ y describe la misma curva que $\boldsymbol{\beta}$. Esta idea de «trasladar» el intervalo paramétrico es lo bastante importante para justificar una definición formal.

8—19 DEFINICIÓN. *Sea $\boldsymbol{\beta}$ una función continua definida en $[c, d]$, siendo $\boldsymbol{\beta}(c) = \boldsymbol{\beta}(d)$, y supongamos que $e \in (c, d)$. La función $\boldsymbol{\gamma}$, definida en $[e, d - c + e]$ por las ecuaciones*

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\beta}(t) \quad si \quad t \in [e, d], \qquad \boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\beta}(t - d + c) \quad si \quad t \in [d, d - c + e],$$

se dice que se ha obtenido de $\boldsymbol{\beta}$ trasladando el intervalo $[c, d]$ hasta el $[e, d - c + e]$.

NOTA. Es evidente que $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\beta}$ describen la misma curva cerrada. No obstante, $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\beta}$ no son equivalentes.

Un teorema, análogo al Teorema 8-18, para curvas cerradas puede establecerse ahora como sigue:

8—20 TEOREMA. *Supongamos que dos funciones continuas $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$, definidas en $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente, describen la misma curva de Jordan. Si $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\beta}(c)$, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son equivalentes. Si $\boldsymbol{\alpha}(a) \neq \boldsymbol{\beta}(c)$, existe exactamente un punto e en (c, d) tal que $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\beta}(e)$. En este caso, $\boldsymbol{\alpha}$ es equivalente a la función obtenida de $\boldsymbol{\beta}$ trasladando $[c, d]$ hasta $[e, d - c + e]$.*

Demostración. Deseamos dar un bosquejo de la demostración. Los detalles puede completarlos fácilmente el lector.

Caso 1. Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\beta}(c)$. Para cada t en (a, b), existe exactamente un x en (c, d) tal que $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}(x)$. Definamos h en (a, b) como sigue: $h(t) = x$ si $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}(x)$. Es fácil demostrar que h es continua y estrictamente monótona en el intervalo abierto (a, b). Tomando $h(a) = \lim_{t\to a+} h(t)$ y $h(b) = \lim_{t\to b-} h(t)$, lo mismo ocurre en el intervalo cerrado. Además, $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}[h(t)]$ para cada t en $[a, b]$ y, por tanto, $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son equivalentes.

Caso 2. Si $\boldsymbol{\alpha}(a) \neq \boldsymbol{\beta}(c)$, consideremos $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\beta}(e)$ y reduzcamos este caso al Caso 1 cambiando el intervalo $[c, d]$ en el $[e, d - c + e]$.

El Teorema 8-20 sugiere una manera de extender la definición de la palabra *equivalencia*, de forma que el Teorema 8-18 sea también cierto para curvas de Jordan.

8–21 DEFINICIÓN. *Sean* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *dos funciones (definidas en* $[a, b]$ *y* $[c, d]$ *respectivamente) que describen dos curvas cerradas. Diremos que* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *son propiamente equivalentes siempre que se satisfacen las siguientes condiciones:*

I) *Si* $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\beta}(c)$, $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *deben ser propiamente equivalentes en el sentido de la Definición* 8-17.

II) *Si* $\boldsymbol{\alpha}(a) \neq \boldsymbol{\beta}(c)$, *debe existir una función* $\boldsymbol{\gamma}$, *obtenida a partir de* $\boldsymbol{\beta}$ *trasladando* $[c, d]$ *hasta* $[e, d - c + e]$, *donde* $e \in (c, d)$, *de manera que* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\gamma}$ *son propiamente equivalentes en el sentido de la Definición* 8-17.

La extensión de la definición de equivalencia impropia es parecida. Con esta generalización del significado de la palabra equivalencia, se deduce que *dos funciones que definen curvas simples son equivalentes si, y únicamente si, describen la misma curva.*

Es importante observar que la afirmación precedente no es legítima si las curvas *no* son simples. Por ejemplo, la función compleja α, definida en $[0, 1]$ por la ecuación $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$, describe la misma curva que la función β definida en $[0, 2]$ por la misma fórmula: $\boldsymbol{\beta}(t) = e^{2\pi i t}$. No obstante, β no describe una curva de Jordan, ya que $e^{2\pi i(t+1)} = e^{2\pi i t}$ y cada punto de la curva se obtiene de dos valores distintos de t en $[0, 2]$. Es sencillo demostrar en este caso que α y β no pueden ser equivalentes. (Ver Ejercicio 8-8.)

8-8 Caminos dirigidos. Utilizando el concepto de equivalencia introducido en el número anterior, podemos atribuir un significado matemático preciso a la idea intuitiva de «recorrido» de una curva en una «dirección» dada. Esto se consigue introduciendo la noción de *camino dirigido*.

8—22 DEFINICIÓN. *Sea Γ una curva descrita por una función vectorial continua α definida en $[a, b]$, y pongamos $\mathbf{A} = \alpha(a)$, $\mathbf{B} = \alpha(b)$. Asociados a Γ, tenemos dos conjuntos de funciones, a saber:*

I) *Todas las funciones propiamente equivalentes a α.*

II) *Todas las funciones impropiamente equivalentes a α.*

Estos dos conjuntos, designados por $\Gamma[\alpha]$ y $-\Gamma[\alpha]$, respectivamente, se llaman caminos dirigidos a lo largo de Γ y se dice que tienen direcciones opuestas. Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, es decir cuando Γ es un arco, escribimos también $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ en lugar de $\Gamma[\alpha]$ para designar el conjunto I), y decimos que $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es el camino desde $\mathbf{A}$ hasta $\mathbf{B}$ a lo largo de Γ. El punto $\mathbf{A}$ se llama el punto inicial de $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ y $\mathbf{B}$ es su punto final. Análogamente, $-\Gamma[\alpha]$ se designa por $\Gamma(\mathbf{B}, \mathbf{A})$.

Si usamos una terminología física e imaginamos Γ como un conjunto de puntos que van siendo ocupados por una partícula móvil, entonces una función perteneciente a $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ describe un movimiento desde $\mathbf{A}$ hasta $\mathbf{B}$ a lo largo de Γ, mientras que una función de $\Gamma(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ describe un movimiento de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ a lo largo de Γ.

Para una mayor flexibilidad del lenguaje, en algunas ocasiones usaremos la palabra *camino* para referirnos a cada una de las funciones de los conjuntos $\Gamma[\alpha]$ y $-\Gamma[\alpha]$. Así, cuando hablamos de un camino α desde $\mathbf{A}$ hasta $\mathbf{B}$, significaremos que $\alpha \in \Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Un ejemplo importante de un camino cerrado en el plano es el *círculo orientado positivamente.* (Ver Fig. 8-2.) Este se define como sigue:



Fig. 8-2. Círculo orientado positivamente.

8—23 DEFINICIÓN. *Sean z_0 un punto en E_2 y r un número positivo dado. Consideremos la función compleja α definida por la ecuación*

$$\alpha(t) = z_0 + re^{2\pi it}, \quad donde \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La colección de funciones propiamente equivalentes a α se llama círculo orientado positivamente con centro en z_0 y radio r, y se dice que tiene un sentido positivo o contrario al de las agujas del reloj. El camino en sentido opuesto tiene sentido negativo, el de las agujas del reloj.

8-9 Curvas rectificables. Recordemos que el segmento rectilíneo cerrado $L[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ que une dos puntos distintos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en E_n es el conjunto

$$L[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Por consiguiente, $L[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ es la curva descrita por la ecuación paramétrica

$$\alpha(t) = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}, \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La longitud de $L[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ es, naturalmente, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Ahora se introducirá el concepto de longitud para curvas más generales. Como es corriente, éste se da mediante la aproximación de una curva por polígonos inscritos. (Ver Fig. 8-3.)

8—24 Definición. *Consideremos una curva en E_n descrita por una función continua $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definida en $[a, b]$. Para cada partición*

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$$

de $[a, b]$, el conjunto de puntos

$$\pi(P) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in L[\boldsymbol{\alpha}(t_{k-1}), \boldsymbol{\alpha}(t_k)],\ k = 1, 2, \ldots, m\}$$

se llama el polígono inscrito determinado por P. La longitud de $\pi(P)$, designada por $|\pi(P)|$, se define como la suma

$$|\pi(P)| = \sum_{k=1}^{m} |\boldsymbol{\alpha}(t_k) - \boldsymbol{\alpha}(t_{k-1})|.$$

Si existe un número positivo M tal que $|\pi(P)| < M$ para toda partición de $[a, b]$, la curva descrita por $\boldsymbol{\alpha}$ se llama rectificable. En este caso, el número

$$\sup \{|\pi(P)| \,|P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

se llama la longitud del arco de curva y se representa por $\Lambda_\alpha(a, b)$.

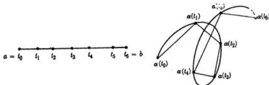


Fig. 8-3. Una partición de $[a, b]$ en seis intervalos y el correspondiente polígono inscrito.

Nota. Si $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son funciones equivalentes, definidas en $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente, toda partición P de $[a, b]$ da origen a una partición P' de

$[c, d]$ de manera que $\pi(P) = \pi(P')$, y recíprocamente. Luego la curva descrita por $\boldsymbol{\alpha}$ es rectificable si, y únicamente si, la descrita por $\boldsymbol{\beta}$ es rectificable. En tal caso, tenemos $\Lambda_{\alpha}(a, b) = \Lambda_{\beta}(c, d)$. De ahí resulta que para curvas *simples* la longitud está completamente determinada por el conjunto de puntos de la curva y no depende de la función particular utilizada para describir dicha curva. En este caso escribiremos $\Lambda(\Gamma)$ para indicar la longitud de Γ.

No es difícil caracterizar todas las curvas rectificables.

8—25 Teorema. *Una curva descrita mediante una función* $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$ *definida en* $[a, b]$ *es rectificable si, y únicamente si, cada componente* a_k *es de variación acotada en* $[a, b]$. *Si la curva es rectificable, tenemos las desigualdades*

5) $$V_k(a, b) \leq \Lambda_{\alpha}(a, b) \leq V_1(a, b) + \cdots + V_n(a, b) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

donde $V_k(a, b)$ *representa la variación total de* a_k *en* $[a, b]$.

Demostración. Si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ es una partición de $[a, b]$, tenemos

6) $$\sum_{i=1}^{m} |a_k(t_i) - a_k(t_{i-1})| \leq |\pi(P)| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_j(t_i) - a_j(t_{i-1})|$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Todas las afirmaciones del teorema resultan fácilmente de 6).

8-10 Propiedades de la longitud de un arco. Si una función $\boldsymbol{\alpha}$ (definida en $[a, b]$) describe una curva rectificable, cada componente a_k es de variación acotada en todo subintervalo $[x, y] \subset [a, b]$. En esta sección mantenemos fija $\boldsymbol{\alpha}$ y estudiamos la longitud $\Lambda_{\alpha}(x, y)$ como una función del intervalo $[x, y]$.

8—26 Teorema. *Si una curva rectificable es descrita por una función* $\boldsymbol{\alpha}$ *definida en* $[a, b]$ *y si* $c \in (a, b)$, *tenemos*

$$\Lambda_{\alpha}(a, b) = \Lambda_{\alpha}(a, c) + \Lambda_{\alpha}(c, b).$$

Demostración. Agregando el punto c a la partición P de $[a, b]$, obtenemos una partición P_1 de $[a, c]$ y otra P_2 de $[c, b]$ de modo que

$$|\pi(P)| \leq |\pi(P_1)| + |\pi(P_2)| \leq \Lambda_{\alpha}(a, c) + \Lambda_{\alpha}(c, b).$$

Esto implica que $\Lambda_{\alpha}(a, b) \leq \Lambda_{\alpha}(a, c) + \Lambda_{\alpha}(c, b)$. Para obtener la desigualdad inversa, sean P_1 y P_2 particiones arbitrarias de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Entonces $P = P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$ para la cual tenemos

$$|\pi(P_1)| + |\pi(P_2)| = |\pi(P)| \leq \Lambda_{\alpha}(a, b).$$

Puesto que el extremo superior de todas las sumas $|\pi(P_1)| + |\pi(P_2)|$ es la suma $\Lambda_{\alpha}(a, c) + \Lambda_{\alpha}(c, b)$ (ver Teorema 1-8), resulta inmediatamente el teorema.

8—27 TEOREMA. *Consideremos una curva rectificable descrita por una función* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *definida en* $[a, b]$. *Si* $x \in (a, b]$, *consideremos* $s(x) = \Lambda_\alpha(a, x)$ *y* $s(a) = 0$. *Tenemos entonces :*

I) *La función s así definida es creciente y continua en* $[a, b]$.

II) *Si no existe un subintervalo de* $[a, b]$ *en el que* α *es constante, entonces s es estrictamente creciente en* $[a, b]$. *En particular, esto es cierto cuando* α *describe una curva simple.*

Demostración. Si $a \leq x < y \leq b$, el Teorema 8-26 implica que $s(y) - -s(x) = \Lambda_\alpha(x, y) \geq 0$. Esto demuestra que s es creciente en $[a, b]$. Además, tendremos $s(y) - s(x) > 0$ a no ser que $\Lambda_\alpha(x, y) = 0$. Pero según la desigualdad 5), $\Lambda_\alpha(x, y) = 0$ implica $V_k(x, y) = 0$ para cada k, lo que implica que α es constante en $[x, y]$. Luego II) es cierta.

Para demostrar que s es continua, utilizamos nuevamente la desigualdad 5) para escribir

$$0 \leq s(y) - s(x) = \Lambda_\alpha(x, y) \leq \sum_{k=1}^{n} V_k(x, y).$$

Si hacemos $y \to x$, encontramos que cada término $V_k(x, y) \to 0$ y por tanto $s(x) = s(x+)$. Análogamente, $s(x) = s(x-)$ y con ello la demostración está completa.

8-11 Conexión. Los restantes párrafos de este capítulo están dedicados a ciertos conceptos de la teoría de conjuntos de puntos que serán indispensables para temas posteriores, particularmente en el estudio de las integrales múltiples y de las integrales curvilíneas. Entre esos conceptos, uno de los más importantes es la noción de *conexión*. En la actualidad, existen conexiones de distintas « clases » utilizadas en análisis, dos de las cuales serán tratadas aquí. La primera se llama *arco-conexión* y se define así :

8—28 DEFINICIÓN. *Un conjunto S de* E_n *se llama arco-conexo si todo par de puntos de S puede ser unido por un arco situado en S.*

Así, por ejemplo, todo conjunto convexo es arco-conexo, ya que el segmento rectilíneo que une dos puntos de tal conjunto está situado en él. En particular, las esferas abiertas y las esferas cerradas son conjuntos arco-conexos. El lector puede verificar con facilidad la arco-conexión del conjunto de la Fig. 8-4 (la reunión de dos discos cerrados tangentes). El conjunto de la Fig 8-5 consiste en los puntos de la curva descrita por $y = \text{sen}\,(1/x)$, $0 < x \leq 1$, y los del segmento horizontal $-1 \leq x \leq 0$. Este conjunto no es arco-conexo. [¿Por qué?].

La Definición 8-28, si bien sugerida por la intuición, es con frecuencia de difícil manejo para deducir propiedades de los conjuntos que tienen tal tipo de conexión. Definimos ahora una nueva clase de conexión más general que

la anterior, y que tiene la ventaja de poderse expresar más simplemente con la terminología de la teoría de conjuntos.

8—29 Definición. *Un conjunto S de E_n es «no-conexo» siempre que $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos disjuntos no vacíos, ambos abiertos con relación a S (y, por tanto, cerrados con relación a S). Un conjunto S se llama conexo si no es «no-conexo».*

En otras palabras, un conjunto conexo S es el que no puede ser cubierto por dos conjuntos abiertos (o por dos conjuntos cerrados) cuyas intersecciones con S sean conjuntos disjuntos no vacíos. (El lector puede recordar la Definición 4-30 y el Teorema 4-31.)

Como consecuencia del Teorema 3-9 resulta que un intervalo abierto en E_1 es un conjunto conexo. En la Fig. 8-6 se representan ejemplos de conjuntos conexos en E_2.

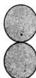


Fig. 8-4. Arco-conexo.

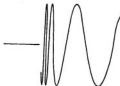


Fig. 8-5. No arco-conexo.

La relación entre la conexión y la arco-conexión viene dada por el teorema siguiente:

8—30 Teorema. *Todo conjunto arco-conexo es conexo.*

Demostración. Sea S un conjunto arco-conexo y supongamos que $S = A \cup B$, donde A y B son disjuntos no vacíos, ambos abiertos con relación a S. Queremos demostrar que esto conduce a una contradicción. Elijamos $\mathbf{x}_0$ en A, e $\mathbf{y}_0$ en B, y los unimos por un arco C contenido en S descrito por una función $\boldsymbol{\alpha}$ (definida en $[a, b]$), siendo $\boldsymbol{\alpha}(a) = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\alpha}(b) = \mathbf{y}_0$. Designemos por I_A e I_B los siguientes subconjuntos del intervalo abierto (a, b):

$$I_A = \{x | x \in (a, b),\ \boldsymbol{\alpha}(x) \in A\}, \qquad I_B = \{x | x \in (a, b),\ \boldsymbol{\alpha}(x) \in B\}.$$

Entonces $(a, b) = I_A \cup I_B$ e $I_A \cap I_B$ es vacío. Si I_B es vacío, es $\boldsymbol{\alpha}^{-1}(B \cap C) = \{b\}$. Pero esto es imposible, ya que $\boldsymbol{\alpha}^{-1}(B \cap C)$ debe ser abierto con relación a $[a, b]$ (según el Teorema 4-32). Luego I_B es no-vacío, y, análogamente, I_A es no vacío. Por otra parte, tenemos $I_A = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(A \cap C) - \{\mathbf{x}_0\}$ e $I_B = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(B \cap C) - \{\mathbf{y}_0\}$. Pero $(A \cap C) - \{\mathbf{x}_0\}$ y $(B \cap C) - \{\mathbf{y}_0\}$ son abiertos respecto a C [¿Por qué?] y por consiguiente, por la continuidad de $\boldsymbol{\alpha}$, I_A e I_B deben ser abiertos respecto

a (a, b). Esto significa que I_A e I_B son no-vacíos, disjuntos y abiertos cuya reunión es el intervalo abierto (a, b). Esto está en contradicción con el hecho de ser (a, b) conexo. [La conexión del intervalo abierto (a, b) es una consecuencia del Teorema 3-9.]

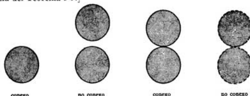


Fig. 8-6. Conjuntos conexos y no conexos en E_1.

NOTA. El Teorema 8-30 implica, naturalmente, que toda curva es conexa. En particular, un intervalo cerrado $[a, b]$ en E_1 es conexo.

El recíproco del Teorema 8-30 no es válido en general. Existen conjuntos conexos que no son arco-conexos, un ejemplo de ellos es el conjunto de la Fig. 8-5. (Ver Ejercicio 8-21.) Sin embargo, podemos demostrar que para *conjuntos abiertos* esos conceptos son equivalentes.

8—31 TEOREMA. *Todo conjunto abierto conexo es arco-conexo.*

Demostración. Sea S un conjunto abierto conexo y supongamos que $\mathbf{x} \in S$. Tenemos que demostrar que $\mathbf{x}$ puede ser unido a todo punto $\mathbf{y}$ de S por un arco perteneciente a S. Designemos por A el subconjunto de S que puede ser unido a $\mathbf{x}$ de ese modo, y consideremos $B = S - A$. Entonces $S = A \cup B$, siendo A y B disjuntos. Vamos a demostrar que A y B son ambos abiertos.

Supongamos que $\mathbf{a} \in A$ y unamos $\mathbf{a}$ a $\mathbf{x}$ por un arco contenido en S, que llamaremos Γ. Puesto que $\mathbf{a} \in S$, existe un entorno $N(\mathbf{a}) \subset S$. Todo $\mathbf{y}$ de $N(\mathbf{a})$ puede ser unido con $\mathbf{a}$ por un segmento rectilíneo (contenido en S) y desde allí a $\mathbf{x}$ por medio de Γ. Así pues $\mathbf{y} \in A$ si $\mathbf{y} \in N(\mathbf{a})$. Esto es $N(\mathbf{a}) \subset A$ y por tanto A es abierto.

Para ver que B es también abierto, supongamos que $\mathbf{b} \in B$. Existe entonces un entorno $N(\mathbf{b}) \subset S$. Pero si un punto $\mathbf{y}$ de $N(\mathbf{b})$ ha podido unirse a $\mathbf{x}$ por un arco, tal como Γ', contenido en S, el mismo punto $\mathbf{b}$ pudo también unirse a $\mathbf{x}$ uniéndolo primero a $\mathbf{y}$ [con un segmento rectilíneo contenido en $N(\mathbf{b})$] y utilizando entonces Γ'. Pero ya que $\mathbf{b} \notin A$, ningún punto de $N(\mathbf{b})$ puede estar en A. Esto es, $N(\mathbf{b}) \subset B$ y, por tanto, B es abierto.

Por consiguiente, tenemos la descomposición $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos. Además, A es no vacío ya que $\mathbf{x} \in A$. Puesto que S es conexo, resulta que B debe ser vacío. Pero esto significa que $S = A$.

Evidentemente A es arco-conexo, porque dos cualesquiera de sus puntos pueden ser unidos, uniendo primero cada uno de ellos a $\mathbf{x}$. Por lo tanto, S es arco-conexo y el teorema está demostrado.

Es fácil probar que la conexión de un conjunto es una propiedad invariante respecto de las aplicaciones continuas. En particular, es una propiedad topológica.

8—32 Teorema. *Sea $\mathbf{f}$ una función vectorial definida y continua en un conjunto conexo S de E_n y supongamos que $\mathbf{f}(S) \subset E_m$. Entonces $\mathbf{f}(S)$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{f}(S)$ es no conexo y escribamos $\mathbf{f}(S) = A_1 \cup B_1$, donde A_1 y B_1 son conjuntos disjuntos no vacíos, ambos abiertos con relación a $\mathbf{f}(S)$. Por la continuidad, los conjuntos $A = \mathbf{f}^{-1}(A_1)$ y $B = \mathbf{f}^{-1}(B_1)$ son abiertos con relación a S. Pero

$$S = \mathbf{f}^{-1}(A_1 \cup B_1) = \mathbf{f}^{-1}(A_1) \cup \mathbf{f}^{-1}(B_1) = A \cup B.$$

Asimismo, A y B son disjuntos porque A_1 y B_1 lo son. Además, A y B son no vacíos ya que A_1 y B_1 también son no vacíos. Esto contradice la conexión de S.

En particular, este teorema nos da otra demostración de que una curva es un conjunto conexo (por ser la imagen de un intervalo cerrado). Además, el Teorema 4-16 nos dice que una curva es también un conjunto *compacto*. Esta sencilla observación nos permite demostrar que todo conjunto abierto conexo es de *conexión poligonal*. Esto es, llegamos al teorema siguiente:

8—33 Teorema. *Sea S un conjunto abierto conexo. Todo par de puntos de S puede unirse por una curva poligonal situada en S.*

Nota. Una curva se llama *poligonal* (o *polígono*) si puede representarse como la reunión de un número finito de segmentos rectilíneos. Así, por ejemplo, los polígonos $\pi(P)$ de la Definición 8-24 son curvas poligonales.

Demostración. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos puntos de S, existe un arco Γ en S que une $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Construiremos un polígono inscrito correspondiente situado en S.

El arco Γ está descrito por una función continua $\boldsymbol{\alpha}$ definida en $[a, b]$. Cada punto $\mathbf{z}$ de Γ puede recubrirse por un entorno $N(\mathbf{z}; r_z) \subset S$. Por la compacidad de Γ, es fácil encontrar *un* radio $r > 0$ tal que para todo $\mathbf{z}$ de Γ se tenga $N(\mathbf{z}; r) \subset S$. Por la continuidad uniforme de $\boldsymbol{\alpha}$, existe para dicho r un $\delta > 0$ de manera que para toda partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ de $[a, b]$, con cada $|t_k - t_{k-1}| < \delta$, se tiene $|\boldsymbol{\alpha}(t_k) - \boldsymbol{\alpha}(t_{k-1})| < r$. Pero para tal P el polígono $\pi(P) \subset S$. Efectivamente, si $\mathbf{z} \in \pi(P)$ y está en el segmento que une $\boldsymbol{\alpha}(t_{k-1})$

con $\alpha(t_k)$, entonces $|\mathbf{z} - \alpha(t_k)| \leq |\alpha(t_{k-1}) - \alpha(t_k)| < r$. Luego, $\mathbf{z} \in N(\alpha(t_k); r) \subset S$. Esto es, $\pi(P) \subset S$. (Ver Fig. 8-7.)

NOTA. Si $S \subset E_2$, cada uno de los segmentos del polígono $\pi(P)$ utilizado en la anterior demostración puede reemplazarse por la reunión de un segmento vertical y otro horizontal como sugiere la Fig. 8-7. Una curva poligonal en E_2 que consta exclusivamente de segmentos horizontales y verticales se llama *polígono escalonado.* Así pues, todo par de puntos de un conjunto abierto conexo S de E_2 pueden ser unidos mediante un polígono escalonado situado en S. Además, siempre pueden unirse utilizando un polígono escalonado *simple*, esto es, que no se corta a sí mismo. Desde luego, cualquier par de puntos pueden también unirse por una curva poligonal *desprovista* de segmentos rectilíneos verticales u horizontales.

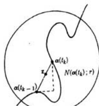


Figura 8-7.

8—34 TEOREMA: *Sea F una colección de conjuntos conexos tales que la intersección $T = \bigcap_{A \in F} A$ es no vacía. En tal caso, la reunión $S = \bigcup_{A \in F} A$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que S es no conexo. Vamos a obtener una contradicción. Escribamos $S \subset U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos tales que $S \cap U$ y $S \cap V$ son conjuntos no vacíos disjuntos. Tomemos $\mathbf{x} \in T$. Entonces $\mathbf{x} \in S$ y, por tanto, uno de los conjuntos U o V contiene $\mathbf{x}$. Sea U el que contiene $\mathbf{x}$. Puesto que $S \cap V$ es no vacío, existe un punto $\mathbf{y}$ en $S \cap V$. Entonces $\mathbf{y} \in A$ para algún A de F. Así pues, tenemos $\mathbf{x} \in A \cap U$ e $\mathbf{y} \in A \cap V$. Luego los conjuntos $A \cap U$ y $A \cap V$ son no vacíos. También son disjuntos, por ser subconjuntos de $S \cap U$ y $S \cap V$, respectivamente. Puesto que $A \subset S \subset U \cup V$, concluimos que A es no conexo. Esto es una contradicción.

8-12 Componentes de un conjunto.

Vamos a demostrar que un conjunto cualquiera de E_n puede ser reducido de manera única a « fragmentos », llamados *componentes.*

8—35 DEFINICIÓN. *Supongamos que $S \subset E_n$. Si T es un subconjunto conexo de S que no está contenido en ningún otro subconjunto conexo de S, se le llama un componente de S.*

En otras palabras, los componentes de S son los máximos subconjuntos conexos de S.

8—36 TEOREMA. *Todo punto de un conjunto S de E_n pertenece únicamente a un determinado componente de S. Si S es abierto, cada componente de S es un conjunto abierto conexo.*

con $\boldsymbol{\alpha}(t_k)$, entonces $|\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}(t_k)| \leq |\boldsymbol{\alpha}(t_{k-1}) - \boldsymbol{\alpha}(t_k)| < r$. Luego, $\mathbf{z} \in N(\boldsymbol{\alpha}(t_k); r) \subset S$. Esto es, $\pi(P) \subset S$. (Ver Fig. 8-7.)

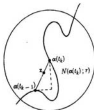


Figura 8-7.

NOTA. Si $S \subset E_2$, cada uno de los segmentos del polígono $\pi(P)$ utilizado en la anterior demostración puede reemplazarse por la reunión de un segmento vertical y otro horizontal como sugiere la Fig. 8-7. Una curva poligonal en E_2 que consta exclusivamente de segmentos horizontales y verticales se llama *polígono escalonado*. Así pues, todo par de puntos de un conjunto abierto conexo S de E_2 pueden ser unidos mediante un polígono escalonado situado en S. Además, siempre pueden unirse utilizando un polígono escalonado *simple*, esto es, que no se corta a sí mismo. Desde luego, cualquier par de puntos pueden también unirse por una curva poligonal *desprovista* de segmentos rectilíneos verticales u horizontales.

8—34 TEOREMA. *Sea F una colección de conjuntos conexos tales que la intersección $T = \bigcap_{A \in F} A$ es no vacía. En tal caso, la reunión $S = \bigcup_{A \in F} A$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que S es no conexo. Vamos a obtener una contradicción. Escribamos $S \subset U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos tales que $S \cap U$ y $S \cap V$ son conjuntos no vacíos disjuntos. Tomemos $\mathbf{x} \in T$. Entonces $\mathbf{x} \in S$ y, por tanto, uno de los conjuntos U o V contiene $\mathbf{x}$. Sea U el que contiene $\mathbf{x}$. Puesto que $S \cap V$ es no vacío, existe un punto $\mathbf{y}$ en $S \cap V$. Entonces $\mathbf{y} \in A$ para algún A de F. Así pues, tenemos $\mathbf{x} \in A \cap U$ e $\mathbf{y} \in A \cap V$. Luego los conjuntos $A \cap U$ y $A \cap V$ son no vacíos. También son disjuntos, por ser subconjuntos de $S \cap U$ y $S \cap V$, respectivamente. Puesto que $A \subset S \subset U \cup V$, concluimos que A es no conexo. Esto es una contradicción.

8-12 Componentes de un conjunto. Vamos a demostrar que un conjunto cualquiera de E_n puede ser reducido de manera única a « fragmentos », llamados *componentes*.

8—35 DEFINICIÓN. *Supongamos que $S \subset E_n$. Si T es un subconjunto conexo de S que no está contenido en ningún otro subconjunto conexo de S, se le llama un componente de S.*

En otras palabras, los componentes de S son los máximos subconjuntos conexos de S.

8—36 TEOREMA. *Todo punto de un conjunto S de E_n pertenece únicamente a un determinado componente de S. Si S es abierto, cada componente de S es un conjunto abierto conexo.*

Demostración. Si $\mathbf{x} \in S$, la reunión de todos los subconjuntos conexos de S que contienen $\mathbf{x}$ debe ser un componente de S que contiene $\mathbf{x}$. Dos componentes de S distintos no pueden contener $\mathbf{x}$, de otro modo su reunión sería un subconjunto conexo mayor que contendría $\mathbf{x}$. Esto demuestra la primera proposición.

Si S es abierto, existe un entorno $N(\mathbf{x}) \subset S$. Si $\mathbf{x}$ pertenece al componente T de S, entonces $N(\mathbf{x}) \subset T$, ya que los entornos son conexos. Por consiguiente, T es abierto. Esto demuestra la segunda parte.

Otra manera de establecer el Teorema 8-36 consiste en decir que los componentes de S forman una colección de conjuntos disjuntos cuya reunión es S. En particular, todo conjunto *abierto* es una reunión de conjuntos conexos abiertos. Según el teorema de Lindelöf (Teorema 3-36), los componentes de un conjunto abierto constituyen una colección *numerable*. (El Teorema 3-9 es un caso particular.)

Terminamos esta sección con la siguiente generalización del teorema de los valores intermedios para funciones continuas (Teorema 4-22).

8—37 TEOREMA. *Sea f una función real definida y continua en un conjunto conexo S de E_n. Si f toma dos valores distintos en S, sean estos a y b, para cada número c comprendido entre a y b existe un punto $\mathbf{x}$ en S tal que $f(\mathbf{x}) = c$.*

La demostración es una sencilla consecuencia del Teorema 8-32 y la dejamos al lector. (Ver Ejercicio 8-22.)

8-13 Regiones.

8—38 DEFINICIÓN. *Supongamos que $S \subset E_n$. Un punto $\mathbf{x}$ de E_n se llama punto exterior a S si existe un entorno de $\mathbf{x}$ que no contiene puntos de S. Si, en cambio, todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene por lo menos un punto de S y por lo menos un punto que no pertenece a S, entonces $\mathbf{x}$ se llama punto frontera de S. El conjunto de todos los puntos frontera de S se llama la frontera de S y se representa por ∂S.*

Así pues el interior de S (ver Definición 3-24), la frontera de S, y el conjunto de puntos exteriores a S son tres conjuntos dos a dos disjuntos cuya reunión es el espacio E_n completo. Naturalmente, ningún punto exterior puede pertenecer a S y un punto frontera puede o no pertenecer a S. Un punto frontera de S no es necesariamente un punto de acumulación de S; no obstante, un punto de S que no es de acumulación de S (llamado *punto aislado de S*) es necesariamente un punto frontera. Un conjunto cerrado contiene todos sus puntos frontera; un conjunto abierto no contiene ninguno de sus puntos frontera.

8—39 DEFINICIÓN. *Un conjunto se llama una región si es la reunión de un conjunto abierto conexo con alguno, ninguno o todos sus puntos frontera. La región se llama abierta si no se incluye ninguno de los puntos frontera. Si todos los puntos frontera se incluyen, la región se llama cerrada.*

NOTA. Algunos autores utilizan la palabra *dominio* en lugar de *región abierta*, especialmente en E_2.

Una curva C en E_2 es un conjunto cerrado y acotado. En consecuencia, su complemento $E_2 - C$ es un conjunto abierto que (según el Teorema 8-36) es la reunión de regiones abiertas disjuntas. Si consideramos estas regiones abiertas como subconjuntos del plano ampliado $E_2{}^*$, existirá *un* componente que contendrá el punto ∞. En otras palabras, uno y sólo uno de los componentes de $E_2 - C$ no está acotado. (En la Fig. 8-8 la región no acotada es la porción no sombreada del plano.)

8-14 Teorema de la curva de Jordan y resultados con él relacionados. Una curva simple cerrada C en el plano divide $E_2 - C$ en *dos* componentes que tienen C como frontera común. (Ver Fig. 8-9.) Si bien esta afirmación puede parecer intuitivamente « evidente » para ciertas curvas de Jordan conocidas tales como círculos, elipses, o polígonos, la demostración para una curva de

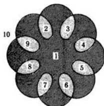


Fig. 8-8. Una curva C para la que $E_2 - C$ tiene diez componentes.

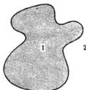


Fig. 8-9. Una curva de Jordan C y los dos componentes de $E_2 - C$.

Jordan cualquiera no es sencilla y no será tratada aquí. CAMILLE JORDAN (1892) fue el primero en indicar que esta proposición (conocida ahora como el *teorema de la curva de Jordan*) debía ser demostrada. Aunque JORDAN y

otros publicaron demostraciones incompletas de este teorema, hasta 1905 no fue dada una demostración correcta por VEBLEN. El citado teorema se establece con precisión así:

8—40 TEOREMA. *Sea C una curva de Jordan en E_2 y consideraremos $S = E_2 - C$. Entonces $S = A \cup B$ donde A y B dos regiones abiertas, siendo tan solo una de ellas acotada. Además $\partial A = \partial B = C$.*

El componente acotado de $E_2 - C$ se llama el *interior* (o *región interna*) de C y se representa por $I(C)$. El componente no acotado de $E_2 - C$ es el *exterior* (o *región externa*) de C. Se dice que los subconjuntos del interior están *dentro de* C y los subconjuntos del exterior están *fuera de* C.

El teorema de la curva de Jordan (y algunos teoremas relacionados con él que se citan a continuación) se necesitará más adelante en la teoría de las integrales curvilíneas. Los resultados, todos ellos referentes a curvas en E_2, se enuncian aquí (sin demostración) para podernos luego referir a ellos.

8—41 TEOREMA. *Sea C una curva de Jordan en E_2. Si $x \in C$ e $y \in I(C)$, existe un arco que une x e y que (excepto el extremo x) está situado enteramente dentro de C. (El arco no es necesariamente rectificable.)*

8—42 TEOREMA. *Sean C y C' dos curvas de Jordan en E_2. Si $C' \subset I(C)$, entonces $I(C') \subset I(C)$.*

NOTA. Las demostraciones del teorema de la curva de Jordan pueden encontrarse en las Referencias 8-1, 8-3 y 8-4. Las Referencias 8-1 y 8-3 contienen también demostraciones del Teorema 8-41. La Referencia 8-4 tiene una demostración del Teorema 8-42 y también del teorema que sigue.

8—43 TEOREMA. *Sean Γ una curva de Jordan en E_2 y C un círculo situado dentro de Γ. Sean a y b dos puntos distintos de C. Existen entonces dos puntos α y β de Γ y dos curvas poligonales simples P y Q que no se cortan y que unen a con α y b con β, respectivamente, teniendo las propiedades siguientes:*

I) *Exceptuando los extremos, P y Q están ambas situadas dentro de Γ y fuera de C.*

II) *Los puntos a y b descomponen C en dos arcos, C_1 y C_2 que unen a con b. Análogamente, α y β descomponen Γ en dos arcos, Γ_1 y Γ_2, que unen α y β. Definimos*

$$G_1 = C_1 \cup \Gamma_1 \cup P \cup Q \quad \text{y} \quad G_2 = C_2 \cup \Gamma_2 \cup P \cup Q.$$

Entonces G_1 y G_2 son curvas de Jordan tales que o bien el interior de C está dentro de G_1 y G_2 o bien el interior de C está fuera de G_1 y G_2.

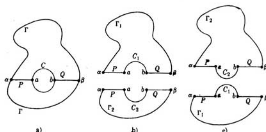


Fig. 8-10. Teorema 8-43.

NOTA. Combinando adecuadamente C_1 y C_2, podemos lograr que el interior de C quede fuera de G_1 y G_2.

Este teorema está representado en la Fig 8-10. En este caso, P y Q son segmentos rectilíneos. Las Figuras 8-10 b) y 8-10 c) representan las dos posibilidades que pueden presentarse en la parte II) del teorema.

EJERCICIOS

Funciones monótonas.

8-1. Sea f una función creciente en $[a, b]$ y designemos por $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ el conjunto de las discontinuidades de f en el interior de (a, b).

a) Utilizar el Teorema 8-1 para demostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k +) - f(x_k -)]$$

converge y tiene una suma que no excede a $f(b) - f(a)$.

b) Se define una función j_f, llamada *función de salto* de f, como sigue: $j_f(a) = 0$, y si $a < x \leq b$, entonces

$$j_f(x) = f(a +) - f(a) + \sum_{x_k < x} [f(x_k +) - f(x_k -)] + f(x) - f(x -),$$

donde la suma se extiende a todos los puntos x_k de $D \cap (a, x)$. Es evidente que j_f es creciente en $[a, b]$. Deducir las siguientes propiedades:

I) $j_f(y) - j_f(x) \leq f(y) - f(x)$, si $a \leq x < y < b$.

II) $j_f(x +) - j_f(x) = f(x +) - f(x)$ y $j_f(x -) - j_f(x) = f(x -) - f(x)$.

III) $f(x) = j_f(x) + g(x)$, donde g es *creciente* y *continua* en $[a, b]$

Funciones de variación acotada.

8-2. Determinar si las siguientes funciones son o no son de variación acotada en $[0, 1]$.

a) $f(x) = x^2 \text{ sen } (1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x} \text{ sen } (1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

8-3. Se dice que una función f, definida en $[a, b]$, satisface una condición uniforme de Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en $[a, b]$ si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < M |x - y|^\alpha$ para todo par x e y de $[a, b]$. (Comparar con el Ejercicio 5-1).

a) Si f es una de esas funciones, demostrar que $\alpha > 1$ implica que f es constante en $[a, b]$, mientras que si $\alpha = 1$, f es de variación acotada en $[a, b]$.

b) Dar un ejemplo de una función f que satisface una condición uniforme de Lipschitz de orden $\alpha < 1$ en $[a, b]$ y no es de variación acotada en $[a, b]$.

c) Dar un ejemplo de una función f de variación acotada en $[a, b]$ pero que no satisface ninguna condición uniforme de Lipschitz en $[a, b]$.

8-4. Demostrar que un polinomio f es de variación acotada en todo intervalo finito $[a, b]$. Dar un método para encontrar la variación total de f en $[a, b]$ si los ceros de la derivada f' son conocidos.

8-5. Si f está definida en todo E_1, se dice que es de variación acotada en $(-\infty, +\infty)$ si es de variación acotada en todo intervalo finito y si existe un número positivo M tal que $V_f(a, b) < M$ para todos los intervalos finitos $[a, b]$. La variación total de f en $(-\infty, +\infty)$ se define entonces como el extremo superior de todos los números $V_f(a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, y se representa por $V_f(-\infty, +\infty)$. Análogas definiciones se aplican a los intervalos infinitos semiabiertos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$.

a) Establecer y demostrar teoremas para el intervalo infinito $(-\infty, +\infty)$ análogos a los Teoremas, 8-7, 8-9, 8-10, 8-11 y 8-12.

b) Demostrar que el Teorema 8-5 es válido para $(-\infty, +\infty)$ si se reemplaza la palabra «monótona» por «acotada y monótona». Establecer y probar una modificación parecida del Teorema 8-13.

8-6. Suponemos que f es de variación acotada en $[a, b]$ y consideramos

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b].$$

Como de costumbre, escribimos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Definimos

$$A(P) = \{k | \Delta f_k > 0\}, \qquad B(P) = \{k | \Delta f_k < 0\}.$$

Los números

$$p_f(a, b) = \sup \left\{ \sum_{k \in A(P)} \Delta f_k | P \in \mathcal{P}[a, b] \right\}$$

y

$$n_f(a, b) = \sup \left\{ \sum_{k \in B(P)} |\Delta f_k| | P \in \mathcal{P}[a, b] \right\}$$

se llaman, respectivamente, la variación positiva y la variación negativa de f en $[a, b]$. Para cada x en $(a, b]$, consideramos $V(x) = V_f(a, x)$, $p(x) = p_f(a, x)$, $n(x) = n_f(a, x)$, y ponemos $V(a) = p(a) = n(a) = 0$. Demostrar que se verifica:

a) $V(x) = p(x) + n(x)$.
b) $0 \leq p(x) \leq V(x)$ y $0 \leq n(x) \leq V(x)$.
c) p y n son crecientes en $[a, b]$.
d) $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$.

NOTA. La parte d) da una nueva demostración del Teorema 8-13.

e) $2p(x) = V(x) + f(x) - f(a), \qquad 2n(x) = V(x) - f(x) + f(a)$.
f) Todo punto de continuidad de f lo es también de p y de n.

Curvas

8-7. Completar los detalles de la demostración del Teorema 8-20.

8-8. Definidas dos funciones complejas α y β como sigue:

$$\alpha(t) = e^{2\pi it} \text{ si } t \in [0, 1], \qquad \beta(t) = e^{2\pi it} \quad \text{si } t \in [0, 2].$$

a) Demostrar que α y β describen la misma curva pero que α y β no son equivalentes (según la Definición 8-21).

b) Demostrar que $\Lambda_\beta[0, 2] = 2\Lambda_\alpha[0, 1]$.

8-9. Probar que toda curva de Jordan es una imagen topológica del círculo unidad S en E_2: $S = \{x | x \in E_2, |x| = 1\}$.

8-10. Para una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ de $[a, b]$, el número $|P|$ (llamado la *norma* de P) está definido como el mayor de los m números positivos $t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Sea $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$ una función continua definida en $[a, b]$. Demostrar que la curva descrita por α es rectificable y tiene una longitud L si, y únicamente si, es válida la siguiente proposición: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|P| < \delta \text{ implica } | \, |\pi(P)| - L| < \varepsilon.$$

8-11. Sea Γ una curva simple rectificable de longitud $\Lambda(\Gamma)$ descrita por una función $\boldsymbol{\alpha}$ definida en $[a, b]$. Pongamos $s(x) = \Lambda_{\boldsymbol{\alpha}}(a, x)$ si $a < x \leq b$, y $s(a) = 0$.

a) Demostrar que s^{-1} existe y es continua en $[0, \Lambda(\Gamma)]$.

b) Definir $\boldsymbol{\beta}$ por la ecuación $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}[s^{-1}(t)]$ si $t \in [0, \Lambda(\Gamma)]$, y demostrar que $\boldsymbol{\beta}$ es propiamente equivalente a $\boldsymbol{\alpha}$.

NOTA. Puesto que $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}[s(t)]$, se dice que la función $\boldsymbol{\beta}$ proporciona una representación de Γ con la longitud como parámetro. El resultado de este ejercicio demuestra que una tal representación existe siempre que Γ es una curva simple rectificable.

8-12. Sean f y g dos funciones reales continuas, de variación acotada y definidas en $[a, b]$, siendo $0 < f(x) < g(x)$ para cada x en (a, b), $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$. Sea h una función compleja definida en el intervalo $[a, 2b - a]$ como sigue:

$$h(t) = t + if(t), \qquad \text{si } a \leq t \leq b,$$
$$h(t) = t + ig(2b - t), \qquad \text{si } b \leq t \leq 2b - a.$$

a) Demostrar que h describe una curva de Jordan rectificable Γ.
b) Explicar, por medio de un dibujo, la relación geométrica entre f, g y h.
c) Demostrar que el conjunto de puntos

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

es una región en E_2 cuya frontera es la curva Γ.

d) Sea H la función compleja definida en $[a, 2b - a]$ como sigue:

$$H(t) = t - \tfrac{1}{2} i[g(t) - f(t)], \qquad \text{si } a \leq t \leq b,$$
$$H(t) = t + \tfrac{1}{2} i[g(2b - t) - f(2b - t)], \qquad \text{si } b \leq t \leq 2b - a.$$

Demostrar que H describe una curva de Jordan rectificable Γ_0 que es la frontera de la región

$$R_0 = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) - g(x) \leq 2y \leq g(x) - f(x)\}.$$

e) Demostrar que R_0 tiene como eje de simetría el eje x. (La región R_0 se llama la *simetrización* de R con respecto al eje x.)

f) Demostrar que la longitud de Γ_0 no excede a la longitud de Γ.

Conjuntos conexos.

8-13. Demostrar que un conjunto abierto S en E_n es no conexo si $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos, ninguno de los cuales es vacío. Demostrar que la misma proposición es también cierta reemplazando, donde figure, la palabra «abierto» por «cerrado».

8-14. Probar que un conjunto S en E_n es conexo si, y únicamente si, los únicos subconjuntos de S que son abiertos y cerrados con relación a S son el mismo S y el conjunto vacío.

8-15. Demostrar que la reunión de dos esferas abiertas $N(\mathbf{x}; a)$ y $N(\mathbf{y}; b)$ en E_n es un conjunto conexo si, y únicamente si, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < a + b$. ¿Qué puede decirse en lo referente a la conexión de la reunión de las dos esferas si una de ellas es cerrada o lo son ambas?

8-16. Sea S un subconjunto de E_n. Una función real continua f definida en S se llama *a dos valores* en S si $f(S) \subset \{0, 1\}$ (en otras palabras, una función a dos valores es una función continua cuyos valores posibles son únicamente 0 y 1). Demostrar que S es conexo si, y únicamente si, toda función a dos valores en S es constante.

8-17. Utilizar el resultado del Ejercicio 8-16 para dar nuevas demostraciones de los Teoremas 8-30, 8-32, y 8-34.

8-18. Sea S un conjunto conexo en E_n y designemos con $\overline{S}$ su adherencia. (Ver Ejercicio 3-12.) Si $S \subset T \subset \overline{S}$, demuestra que T debe ser también conexo. (En particular, esto demuestra que la adherencia de un conjunto conexo es conexo.)

8-19. Demostrar que el producto cartesiano de dos conjuntos conexos es conexo.

[*Indicación*: Utilizar el resultado del Ejercicio 8-16.]

8-20. Demostrar que los únicos subconjuntos de E_1 conexos que contienen más de un punto son los intervalos (abiertos, cerrados, o semi-abiertos).

8-21. Consideremos

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \operatorname{sen}(1/x)\}, \quad B = \{(x, y) \mid y = 0, -1 \leq x \leq 0\},$$

y sea $S = A \cup B$. Demostrar que S es conexo pero no arco-conexo. (Ver Fig. 8-5 relacionada con la Definición 8-28.)

8-22. Probar el Teorema 8-37.

8-23. Sean x e y dos puntos de una región abierta S en E_2.

a) Probar que x e y pueden ser unidos en S por una poligonal escalonada simple.

b) Probar que x e y pueden ser unidos en S por un polígono simple desprovisto de segmentos rectilíneos horizontales o verticales.

8-24. Sea $F = \{F_1, F_2, \ldots\}$ una colección numerable de conjuntos compactos conexos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Demostrar que la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ es cerrado y conexo.

8-25. Sea S un conjunto abierto conexo en E_n. Sea T un componente de $E_n - S$. Demostrar que $E_n - T$ es conexo.

REFERENCIAS CITADAS

8-1. HALL, D. W. y SPENCER, G., *Elementary Topology*. New York : Wiley, 1955.

8-2. LEFSCHETZ, S., *Introduction to Topology*. Princeton : University Press, 1949.

8-3. NEWMAN, M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. 2.ª ed. Cambridge : University Press, 1951.

8-4. THRON, W. J., *Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*. New York: Wiley, 1953.

CAPÍTULO 9

TEORÍA DE LA INTEGRACIÓN DE RIEMANN-STIELTJES

9-1 Introducción. Puede considerarse que el Cálculo trata principalmente dos problemas fundamentales: encontrar la tangente a una curva, y calcular el área limitada por una curva. El primero es resuelto por un proceso de paso al límite conocido con el nombre de *diferenciación*; el segundo mediante otro proceso llamado *integración*.

El lector recordará que en Cálculo elemental cuando se trata de hallar el área limitada por la gráfica de una función positiva f definida en $[a, b]$, subdividimos el intervalo $[a, b]$ en un número finito (p. ej. n) de subintervalos, siendo Δx_k la longitud del k-ésimo subintervalo, y consideramos sumas de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$, donde t_k es un cierto punto del k-ésimo subintervalo. Cada una de tales sumas representa una aproximación del área que calculamos, por medio de rectángulos. Si la función f tiene un comportamiento normal en $[a, b]$ p. ej. ès continua), entonces cabe la posibilidad de que esas sumas tengan un límite cuando $n \to \infty$, haciendo las sucesivas subdivisiones cada vez más pequeñas. Esto, hablando sin precisión, es lo que implica la definición de Riemann de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$. (Una definición precisa será expuesta más adelante.)

Los dos conceptos, derivada e integral, se presentan por caminos completamente distintos y es un hecho realmente notable que los dos tienen una íntima conexión. Si consideramos la integral definida de una función continua f como una función de su límite superior, es decir escribimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

entonces F posee derivada y $F'(x) = f(x)$. Este importante resultado pone de manifiesto que diferenciación e integración son, en cierto modo, operaciones inversas.

En este capítulo estudiaremos el proceso de integración con cierto detalle. En realidad consideraremos un concepto más general que el de Riemann: éste es la *integral de Riemann-Stieltjes*, que incluye no una función sino dos f y α. El símbolo para tal integral es $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$, o alguno similar, y la integral de Riemann se presenta como un caso particular en el que $\alpha(x) = x$. Cuando α tiene derivada continua, la definición es tal que el símbolo $d\alpha(x)$ puede interpretarse como la diferencial $\alpha'(x)\, dx$ y la integral de Stieltjes $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ se convierte en la de Riemann $\int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx$. Sin embargo, la integral de Stieltjes tiene aún sentido cuando α no es diferenciable o incluso cuando α es discontinua. En realidad, es al tratar con funciones α *discontinuas*

cuando se hace patente la importancia de la integral de Stieltjes. Mediante una elección adecuada de una función discontinua α, una suma finita o infinita puede expresarse como una integral de Stieltjes, y la sumación y la integración Riemann ordinaria llegan a ser entonces casos particulares de este proceso más general. Los problemas físicos que consideran distribuciones de masas que son en parte discretas y en parte continuas pueden ser abordados utilizando la integral de Stieltjes. En la teoría matemática de la probabilidad esta integral es un instrumento muy útil que hace posible la consideración simultánea de variables aleatorias continuas y discretas.

9-2 Notaciones. Para abreviar, estableceremos ciertos convenios concernientes a las notaciones y a la terminología que debe usarse en este capítulo. Trabajaremos en un intervalo finito $[a, b]$ y, mientras no se advierta lo contrario, todas las funciones designadas por f, g, α o β se supondrán funciones reales definidas y *acotadas* en $[a, b]$. En la última parte del capítulo se tratará de funciones complejas. En el Capítulo 14 serán discutidas las extensiones a funciones no acotadas y a intervalos infinitos.

Como en el Capítulo 8, una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. La norma de P es el mayor de los n números $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, y se representa por $|P|$. La partición P' de $[a, b]$ es más fina que P (o un afinamiento de P) si $P \subset P'$. Así que, $P \subset P'$ implica $|P'| \leq |P|$, pero el recíproco no es cierto. El símbolo $\Delta\alpha_k$ representa la diferencia $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, de donde $\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a)$. Finalmente, el conjunto de todas las particiones posibles de $[a, b]$ se representa por $\mathcal{P}[a, b]$.

9-3 Definición de la integral de Riemann-Stieltjes.

9-1 DEFINICIÓN. *Sean $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Una suma de la forma*

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k$$

se denomina suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α. Decimos que f es integrable-Riemann con respecto a α en $[a, b]$, y escribimos «$f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$» si existe un número A que goza de la propiedad siguiente: Para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que para toda partición P más fina que P_ε y para todo t_k en $[x_{k-1}, x_k]$, tenemos $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

Cuando un tal número A existe, es único y se representa por $\int_a^b f\,d\alpha$ o por $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$. Entonces se dice también que *existe* la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\,d\alpha$. Las funciones f y α se denominan respectivamente *integrando*

e *integrador*. En el caso particular en que $\alpha(x) = x$, escribimos $S(P, f)$ en lugar de $S(P, f, \alpha)$, y $f \in R$ en lugar de $f \in R(\alpha)$. La integral se llama entonces integral de Riemann y se representa por $\int_a^b f\,dx$ o por $\int_a^b f(x)\,dx$. El valor numérico de $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ depende únicamente de f, α, a y b y no depende del símbolo x. La letra x es una «variable ficticia» y puede ser reemplazada por un símbolo conveniente.

NOTA. Esta es una de las varias definiciones aceptadas de la integral de Riemann-Stieltjes. Otra definición distinta (pero no equivalente) se establece en el Ejercicio 9-3.

9-4 Propiedades lineales. Es fácil demostrar que la integral opera en forma lineal sobre el integrando y el integrador. Éste es el contenido de los dos próximos teoremas.

9—2 TEOREMA. *Si $f \in R(\alpha)$ y $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ (para cualesquiera constantes c_1 y c_2) y tenemos*

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\,d\alpha = c_1 \int_a^b f\,d\alpha + c_2 \int_a^b g\,d\alpha.$$

Demostración. Tomemos $h = c_1 f + c_2 g$. Dada una partición P de $[a, b]$, podemos escribir

$$S(P, h, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} h(t_k)\,\Delta\alpha_k = c_1 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta\alpha_k$$
$$= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, g, \alpha).$$

Dado $\varepsilon > 0$, elijamos P'_ε de modo que $P'_\varepsilon \subseteq P$ implique $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\,d\alpha| < \varepsilon$, y P''_ε de manera que $P''_\varepsilon \subseteq P$ implique $|S(P, g, \alpha) - \int_a^b g\,d\alpha| < \varepsilon$. Si tomamos $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, entonces para P más fina que P_ε, tenemos

$$\left| S(P, h, \alpha) - c_1 \int_a^b f\,d\alpha - c_2 \int_a^b g\,d\alpha \right| \leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon,$$

lo que prueba el teorema.

9—3 TEOREMA. *Si $f \in R(\alpha)$ y $f \in R(\beta)$ en $[a, b]$, entonces $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$ en $[a, b]$ (para cualesquiera constantes c_1 y c_2) y tenemos*

$$\int_a^b f\,d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f\,d\alpha + c_2 \int_a^b f\,d\beta.$$

La demostración es parecida a la del Teorema 9-2 y la dejamos como ejercicio.

Un resultado un tanto parecido a los dos teoremas anteriores nos dice que la integral es también «aditiva» con respecto al intervalo de integración.

9—4 TEOREMA. *Supongamos que $c \in (a, b)$. Si dos de las tres integrales de 1) existen, también existe entonces la tercera y tenemos*

$$1) \qquad \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha.$$

Demostración. Si P es una partición de $[a, b]$ tal que $c \in P$, tomamos $P' = P \cap [a, c]$ y $P'' = P \cap [c, b]$ que designan las particiones correspondientes de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente. Las sumas de Riemann-Stieltjes para estas particiones están relacionadas por la igualdad

$$S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha).$$

Supongamos que $\int_a^c f\,d\alpha$ y $\int_c^b f\,d\alpha$ existan. En tal caso, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P'_ε de $[a, c]$ tal que

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f\,d\alpha \right| < \varepsilon/2 \qquad \text{siempre que } P' \text{ sea más fina que } P'_\varepsilon,$$

y una partición P''_ε de $[c, b]$ tal que

$$\left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon/2 \qquad \text{siempre que } P'' \text{ sea más fina que } P''_\varepsilon.$$

Entonces $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ es una partición de $[a, b]$ tal que el ser P más fina que P_ε implica $P'_\varepsilon \subset P'$ y $P''_\varepsilon \subset P''$. Luego, si P es más fina que P_ε, podemos combinar los resultados precedentes para obtener la desigualdad

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^c f\,d\alpha - \int_c^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $\int_a^b f\,d\alpha$ existe y es igual a $\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$. El lector puede fácilmente verificar que un razonamiento parecido demuestra el teorema en los restantes casos.

Utilizando el método de inducción, podemos demostrar un resultado parecido para una descomposición de $[a, b]$ en un número finito de subintervalos.

NOTA. El tipo de razonamiento anterior no puede usarse para demostrar que la integral $\int_a^c f\,d\alpha$ existe siempre que $\int_a^b f\,d\alpha$ existe. La conclusión es, no obstante, correcta. Para integradores α de variación acotada, esto será demostrado más adelante en el Teorema 9-21.

9—5 DEFINICIÓN. *Si $a < b$, definimos $\int_b^a f\,d\alpha = -\int_a^b f\,d\alpha$ siempre que $\int_a^b f\,d\alpha$ exista. También definimos $\int_a^a f\,d\alpha = 0$*

La igualdad del Teorema 9-4 puede escribirse así:

$$\int_a^b f\,d\alpha + \int_b^c f\,d\alpha + \int_c^a f\,d\alpha = 0.$$

9-5 Integración por partes. En una integral de Riemann-Stieltjes existe una notable relación entre el integrando y el integrador. La existencia de $\int_a^b f\,d\alpha$ implica la de $\int_a^b \alpha\,df$, y el recíproco es también cierto. Además, entre las dos integrales se verifica una relación muy sencilla.

9—6 TEOREMA. *Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $\alpha \in R(f)$ en $[a, b]$ y tenemos*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)\,df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

NOTA. Esta igualdad, que proporciona una especie de ley de reciprocidad para la integral, se conoce como la *fórmula de integración por partes.*

Demostración. Tomemos un $\varepsilon > 0$. Puesto que $\int_a^b f\,d\alpha$ existe, hay una partición P_ε de $[a, b]$ tal que para toda P' más fina que P_ε, tenemos

2) $$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Consideremos una suma de Riemann-Stieltjes cualquiera para la integral $\int_a^b \alpha\,df$, sea ésta

$$S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k)\,\Delta f_k = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_{k-1}),$$

donde P es más fina que P_ε. Escribiendo $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$, tenemos la identidad

$$A = \sum_{k=1}^n f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1}).$$

Restando las dos igualdades, encontramos

$$A - S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k)[\alpha(x_k) - \alpha(t_k)]$$
$$+ \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})[\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})].$$

Las dos sumas del segundo miembro pueden combinarse en una sola suma de la forma $S(P', f, \alpha)$, donde P' es la partición de $[a, b]$ obtenida tomando juntos los puntos x_k y t_k. Entonces P' es más fina que P y, por consiguiente, más fina que P_ε. Por lo tanto, la desigualdad 2) es válida y esto significa que tenemos

$$\left| A - S(P, \alpha, f) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \varepsilon$$

siempre que P es más fina que P_ε. Pero esto equivale a afirmar la existencia de $\int_a^b \alpha \, df$ y que es igual a $A - \int_a^b f \, d\alpha$.

9-6 Cambio de variable en una integral de Riemann-Stieltjes.

9—7 TEOREMA. *Consideremos $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y sea g una función continua y estrictamente monótona definida en un intervalo S cuyos extremos son c y d. Supongamos que $a = g(c)$, $b = g(d)$. Sean h y β las funciones compuestas definidas como sigue:*

$$h(x) = f[g(x)], \qquad \beta(x) = \alpha[g(x)], \qquad \text{si } x \in S.$$

Entonces $h \in R(\beta)$ en S y tenemos

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_c^d h \, d\beta.$$

Demostración. Para precisar, suponemos que g es estrictamente creciente en S. (Esto implica $c < d$.) Entonces g es uno a uno y tiene función inversa g^{-1} continua y estrictamente creciente definida en $[a, b]$. Por lo tanto, a toda partición $P = \{y_0, \ldots, y_n\}$ de $[c, d]$, corresponde una partición $P' = \{x_0, \ldots, x_n\}$ y sólo una de $[a, b]$ siendo $x_k = g(y_k)$. De hecho, podemos escribir $P' = g(P)$ y $P = g^{-1}(P')$. Además, un afinamiento de P produce un afinamiento correspondiente de P', y recíprocamente.

Si se da un $\varepsilon > 0$, existe una partición P'_ε de $[a, b]$ tal que P' más fina que P'_ε implica $|S(P', f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha| < \varepsilon$. Sean $P_\varepsilon = g^{-1}(P'_\varepsilon)$ la correspondiente partición de $[c, d]$, y $P = \{y_0, \ldots, y_n\}$ una partición de $[c, d]$ más fina que P_ε. Formemos una suma de Riemann-Stieltjes

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^{n} h(u_k) \Delta\beta_k,$$

donde $u_k \in [y_{k-1}, y_k]$ y $\Delta\beta_k = \beta(y_k) - \beta(y_{k-1})$. Si ponemos $t_k = g(u_k)$ y $x_k = g(y_k)$, entonces $P' = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ más fina que P'_ε. Además, tenemos entonces

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^{n} f[g(u_k)]\{\alpha[g(y_k)] - \alpha[g(y_{k-1})]\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\{\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\} = S(P', f, \alpha),$$

ya que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Por consiguiente, $|S(P, h, \beta) - \int_a^b f\, d\alpha| < \varepsilon$ y el teorema está demostrado.

NOTA. Este teorema se aplica, en particular, a la integral de Riemann, esto es, cuando $\alpha(x) = x$. Otro teorema de este tipo, en el cual no se requiere que g sea monótona, será demostrado más tarde para las integrales de Riemann. (Ver Teorema 9-33.)

9-7 Reducción a una integral de Riemann. El próximo teorema nos dice que podemos reemplazar el símbolo $d\alpha(x)$ por $\alpha'(x)\, dx$ en la integral $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ siempre que α tenga derivada α' continua.

9–8 TEOREMA. *Consideremos $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y supongamos que α tenga derivada α' continua en $[a, b]$. En tal caso la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx$ existe y tenemos*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx.$$

Demostración. Pongamos $g(x) = f(x)\alpha'(x)$ y consideremos la suma de Riemann

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\alpha'(t_k)\, \Delta x_k.$$

La misma partición P y la misma elección de t_k puede utilizarse para formar la suma de Riemann-Stieltjes

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k.$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio, podemos escribir

$$\Delta\alpha_k = \alpha'(v_k)\, \Delta x_k, \qquad \text{donde} \qquad v_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

y, por tanto,

$$S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, [\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)]\, \Delta x_k.$$

Puesto que f es acotada, podemos escribir $|f(x)| \leq M$ para todo x de $[a, b]$, donde $M > 0$. La continuidad de α' en $[a, b]$ implica la continuidad uniforme en $[a, b]$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que depende únicamente de ε) tal que

$$0 \leq |x - y| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\varepsilon}{2M(b - a)}.$$

Si tomamos una partición P'_ε de norma $|P'_\varepsilon| < \delta$, entonces para cualquier partición más fina P tendremos en la anterior igualdad

$$|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

Para tal P tenemos pues

$$|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, ya que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, existe una partición P''_ε tal que P más fina que P''_ε implica

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando las dos últimas desigualdades, vemos que cuando P es más fina que $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, tendremos $|S(P, g) - \int_a^b f\, d\alpha| < \varepsilon$, y esto demuestra el teorema.

9-8 Funciones escalonadas como integradores. Si α es constante en todo $[a, b]$, la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y tiene el valor 0, ya que cada suma $S(P, f, \alpha) = 0$. Sin embargo, si α es constante salvo en un punto en el que presenta una discontinuidad de salto, la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ no existe necesariamente y, si existe, su valor no es necesariamente cero. Este hecho se expone con precisión en el siguiente teorema:

9–9 TEOREMA. *Dados $a < c < b$. Definimos α en $[a, b]$ como sigue: Los valores $\alpha(a)$, $\alpha(c)$, $\alpha(b)$ son arbitrarios; $\alpha(x) = \alpha(a)$ si $a \leq x < c$, y $\alpha(x) = \alpha(b)$ si $c < x \leq b$. Sea f una función definida en $[a, b]$ de manera que por lo menos una de las funciones f o α sea continua a la izquierda de c y una por lo menos sea continua a la derecha de c. Entonces $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y tenemos*

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)].$$

NOTA. También es cierta la conclusión si $c = a$, con tal de que escribamos $\alpha(c)$ en lugar de $\alpha(c-)$, y, asimismo, subsiste si $c = b$ si escribimos $\alpha(c)$ en lugar de $\alpha(c+)$. Más adelante (Teorema 9-28) demostraremos que la integral no existe si f y α son ambas discontinuas a la derecha o a la izquierda de c.

Demostración. Si $c \in P$, todo término de la suma $S(P, f, \alpha)$ es nulo salvo los dos términos procedentes del subintervalo bisecado por c, pongamos pues

$$S(P, f, \alpha) = f(t_{k-1})[\alpha(c) - \alpha(c-)] + f(t_k)[\alpha(c+) - \alpha(c)],$$

donde $t_{k-1} \leq c \leq t_k$. Esta igualdad puede también escribirse así:

$$\Delta = [f(t_{k-1}) - f(c)][\alpha(c) - \alpha(c-)] + [f(t_k) - f(c)][\alpha(c+) - \alpha(c)],$$

donde $\Delta = S(P, f, \alpha) - f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)]$. Luego tenemos

$$|\Delta| \leq |f(t_{k-1}) - f(c)||\alpha(c) - \alpha(c-)| + |f(t_k) - f(c)||\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

Si f es continua en c, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ implica

$$|f(t_{k-1}) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(t_k) - f(c)| < \varepsilon.$$

En este caso, obtenemos la desigualdad

$$|\Delta| \leq \varepsilon|\alpha(c) - \alpha(c-)| + \varepsilon|\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

Pero esta desigualdad es legítima si f es continua o no en c. Por ejemplo, si f es discontinua a la derecha y a la izquierda de c, entonces $\alpha(c) = \alpha(c-)$ y $\alpha(c) = \alpha(c+)$ y conseguimos $\Delta = 0$. Por otra parte, si f es continua a la izquierda y discontinua a la derecha de c, debemos tener $\alpha(c) = \alpha(c+)$ y obtenemos $|\Delta| \leq \varepsilon|\alpha(c) - \alpha(c-)|$. Análogamente, si f es continua a la derecha y discontinua a la izquierda de c, tenemos $\alpha(c) = \alpha(c-)$ y $|\Delta| \leq \varepsilon|\alpha(c+) - \alpha(c)|$. Luego la última desigualdad escrita es válida en cualquier caso. Esto demuestra el teorema.

El Teorema 9-9 nos dice que el valor de una integral de Riemann-Stieltjes puede ser modificado cambiando el valor de f en un solo punto y es fácil ver que la *existencia* de la integral puede quedar afectada por tal cambio. Consideremos el ejemplo siguiente:

$$\alpha(x) = 0 \text{ si } x \neq 0, \ \alpha(0) = -1,$$
$$f(x) = 1, \quad \text{si } -1 \leq x \leq +1$$

En este caso el Teorema 9-9 implica $\int_{-1}^{1} f\, d\alpha = 0$. Pero si volvemos a definir f de modo que $f(0) = 2$ y $f(x) = 1$ si $x \neq 0$, fácilmente podemos ver que $\int_{-1}^{1} f\, d\alpha$ no existirá. Efectivamente, cuando P es una partición que incluye el 0 como uno de los puntos de subdivisión, encontramos

$$S(P, f, \alpha) = f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(0)] + f(t_{k-1})[\alpha(0) - \alpha(x_{k-2})]$$
$$= f(t_k) - f(t_{k-1}),$$

donde $x_{k-2} \leq t_{k-1} \leq 0 \leq t_k \leq x_k$. El valor de esta suma es 0, 1, ó -1, dependiendo de la elección de t_k y t_{k-1}. Luego, $\int_{-1}^{1} f\, d\alpha$ no existe en este caso. Sin embargo, en una integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$, los valores de f *pueden* cambiarse en un número finito de puntos sin afectar la existencia o el valor de la integral. Para probar esto, basta considerar el caso en que $f(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$ excepto en un punto, por ejemplo $x = c$. Pero para una tal

función es evidente que $|S(P, f)| \leq |f(c)||P|$. Puesto que $|P|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, se deduce que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

El integrador α en el Teorema 9-9 es un caso particular de una clase importante de funciones conocidas con el nombre de *funciones escalonadas*. Estas son funciones constantes en todo un intervalo salvo en un número finito de discontinuidades de salto.

9—10 DEFINICIÓN (*Función escalonada*). *Sea α una función definida en $[a, b]$ de tal manera que sea discontinua en un número finito de puntos c_k, siendo*

$$a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_n \leq b.$$

Si α es constante en cada intervalo abierto (c_{k-1}, c_k), se dice que α es una función escalonada y el número $\alpha(c_k+) - \alpha(c_k-)$ se llama el salto en c_k. Si $c_1 = a$, el salto en c_1 es $\alpha(c_1+) - \alpha(c_1)$, y si $c_n = b$, el salto en c_n es $\alpha(c_n) - \alpha(c_n-)$.

Las funciones escalonadas proporcionan el eslabón de enlace entre las integrales de Riemann-Stieltjes y las sumas finitas:

9—11 TEOREMA. (*Reducción de una integral de Riemann-Stieltjes a una suma finita*). *Sea α una función escalonada definida en $[a, b]$ con salto α_k en x_k, siendo $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. Consideremos f definida en $[a, b]$ de tal manera que f y α no sean ambas discontinuas a la derecha o a la izquierda de cada x_k. En estas condiciones $\int_a^b f\,d\alpha$ existe y tenemos*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\alpha_k.$$

Demostración. Según el Teorema 9-4, $\int_a^b f\,d\alpha$ puede escribirse como una suma de integrales del tipo considerado en el Teorema 9-9.

Uno de los ejemplos más sencillos de funciones escalonadas es la *función parte entera de x*. Su valor en x es el mayor entero que es menor o igual que x y se representa por $[x]$. Así pues, $[x]$ es el único entero que satisface las desigualdades $[x] \leq x < [x] + 1$.

9—12 TEOREMA. *Toda suma finita puede escribirse como una integral de Riemann-Stieltjes. En realidad, dada una suma $\sum_{k=1}^n a_k$, definimos f en $[0, n]$ como sigue:*

$$f(x) = a_k \quad \text{si} \quad k - 1 < x \leq k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad f(0) = 0.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)d[x],$$

donde $[x]$ *es el mayor entero* $\leq x$.

Demostración. La función parte entera es una función escalonada, continua a la derecha y con salto 1 en cada punto x entero. La función f es continua a la izquierda de $1, 2, \ldots, n$. Ahora se aplica el Teorema 9-11.

Utilizaremos las integrales de Riemann-Stieltjes para obtener una fórmula notable conocida con el nombre de *fórmula de sumación de Euler*, que relaciona la integral de una función en un intervalo $[a, b]$ con la suma de los valores de la función en los puntos *enteros* de $[a, b]$. Con frecuencia se usa para aproximar integrales mediante sumas o, inversamente, para estimar los valores de ciertas sumas por medio de integrales.

9—13 Teorema. *(Fórmula de sumación de Euler). Si f tiene derivada f' continua en $[a, b]$, tenemos*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)((x))\,dx + f(a)((a)) - f(b)((b)),$$

donde $((x)) = x - [x]$. *Cuando a y b son enteros, se obtiene*

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)dx + \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Nota. $\sum_{a<n\leq b}$ significa la suma desde $n = [a] + 1$ a $n = [b]$.

Demostración. Aplicando el Teorema 9-6 (integración por partes), podemos escribir

$$\int_a^b f(x)\,d(x - [x]) + \int_a^b (x - [x])\,df(x)$$
$$= f(b)(b - [b]) - f(a)(a - [a]).$$

Puesto que la función parte entera tiene salto unidad en $[a, b]$ en los enteros $x = [a] + 1,\ [a] + 2, \ldots,\ [b]$, podemos escribir

$$\int_a^b f(x)\,d[x] = \sum_{a<n\leq b} f(n).$$

Si combinamos esta igualdad con la anterior, el teorema se deduce inmediatamente.

9-9 Integradores crecientes con monotonía. Integrales superior e inferior. La teoría de la integración de Riemann-Stieltjes será ahora desarrollada para integradores crecientes con monotonía, y veremos más adelante (Teorema 9-20) que esto es precisamente tan general como estudiar la teoría para integradores que son de variación acotada.

Cuando α es creciente, las diferencias $\Delta\alpha_k$ que aparecen en las sumas de Riemann-Stieltjes son todas no negativas. Este simple hecho desempeña un papel esencial en el desarrollo de la teoría. Para simplificar, utilizaremos la abreviatura « $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$» para indicar que « α es creciente en $[a, b]$ ».

Se estableció al principio que el problema de encontrar el área limitada por la gráfica de una función f se planteaba considerando las sumas Riemann $\sum f(t_k)\,\Delta x_k$ como aproximaciones del área por medio de rectángulos. Tales sumas se presentan también espontáneamente en ciertos problemas físicos que requieren para su resolución el uso de la integración. Otro planteo de estos problemas se hace por medio de las sumas *superior* e *inferior* de Riemann. Por ejemplo, en el caso de las áreas, podemos considerar aproximaciones por exceso y por defecto mediante las sumas $\sum M_k\,\Delta x_k$ y $\sum m_k\,\Delta x_k$, donde M_k y m_k representan, respectivamente, el sup y el inf de los valores de la función en el k-ésimo subintervalo. Nuestra intuición geométrica nos dice que las sumas superiores son por lo menos tan grandes como el área que buscamos, mientras que las sumas inferiores no pueden exceder de dicha área. (Ver Fig. 9-1.) No obstante, parece natural preguntar: ¿Cuál es el menor valor posible de las sumas superiores?

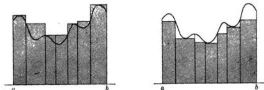


Fig. 9-1. Sumas superior e inferior de Riemann como áreas.

Esto nos lleva a considerar el inf de todas las sumas superiores, que es un número llamado la *integral superior de f*. Análogamente se define la *integral inferior* como el sup de todas las sumas inferiores. Para funciones « razonables » (p. ej., funciones continuas) ambas integrales serán iguales a $\int_a^b f(x)\,dx$. Sin embargo, en general, estas integrales serán distintas y es, por consiguiente, un problema importante el encontrar condiciones relativas a la función que aseguren la coincidencia de los valores de las integrales superior e inferior. Trataremos ahora este tipo de problema para las integrales de Riemann - Stieltjes.

9—14 DEFINICIÓN. *Sea P una partición de* $[a, b]$ *y consideremos*

$$M_k(f) = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$
$$m_k(f) = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Los números

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\, \Delta\alpha_k \quad y \quad L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\, \Delta\alpha_k$$

se llaman, respectivamente, sumas de Stieltjes superior e inferior de f respecto a α para la partición P.

NOTA. Siempre tenemos $m_k(f) \leq M_k(f)$. Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, entonces $\Delta\alpha_k \geq 0$ y podemos también escribir $m_k(f)\, \Delta\alpha_k \leq M_k(f)\, \Delta\alpha_k$, de lo que se deduce que las sumas inferiores no exceden a las sumas superiores. Además, si $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces $m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$. Por lo tanto, cuando $\alpha \nearrow$, tenemos las desigualdades

$$L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

que relacionan las sumas superior e inferior con las sumas de Riemann-Stieltjes. Estas desigualdades, que son frecuentemente usadas en lo que sigue, no son necesariamente ciertas cuando α no es una función creciente.

El próximo teorema demuestra que, para α creciente, un afinamiento de la partición aumenta las sumas inferiores y disminuye las sumas superiores.

9—15 TEOREMA. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, b]$. *Entonces:*

I) *Si P' es más fina que P, tenemos*
$$U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \quad y \quad L(P', f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha)$$

II) *Para dos particiones cualesquiera* P_1 *y* P_2 *tenemos*
$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

Demostración. Basta demostrar I) cuando P' contiene exactamente un punto más que P, sea éste el punto c. Si c pertenece al subintervalo i-ésimo de P, podemos escribir

$$U(P', f, \alpha) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\, \Delta\alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i) - \alpha(c)],$$

donde M' y M'' designan el sup de f en $[x_{i-1}, c]$ y $[c, x_i]$. Pero, como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, tenemos $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$. (La desigualdad para las sumas inferiores se consigue en forma semejante.)

Para demostrar II) consideremos $P = P_1 \cup P_2$. Tenemos entonces

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

NOTA. Se deduce de este teorema que también tenemos (para α creciente)

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

cuando M y m representan el sup y el inf de f en $[a, b]$.

9–16 DEFINICIÓN. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. La integral superior de Stieltjes de f con respecto a α se define así:*

$$\bar{\int_a^b} f \, d\alpha = \inf \{U(P, f, \alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

La integral inferior de Stieltjes se define análogamente:

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup \{L(P, f, \alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

NOTA. Algunas veces escribimos $\bar{I}(f, \alpha)$ e $\underline{I}(f, \alpha)$ para las integrales superior e inferior. En el caso particular en que $\alpha(x) = x$, las sumas superior e inferior se representan por $U(P,f)$ y $L(P,f)$ y se llaman sumas superior e inferior de Riemann. Las correspondientes integrales, representadas mediante $\bar{\int_a^b} f(x) \, dx$ e $\underline{\int_a^b} f(x) \, dx$, se llaman integrales superior e inferior. El primero que las introdujo fue J. G. DARBOUX (1875).

9–17 TEOREMA. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Entonces $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$.*

Demostración. Si se da $\varepsilon < 0$, existe una partición P_1 tal que

$$U(P_1, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon.$$

Según el Teorema 9–15, se deduce que $\bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ es una cota superior para todas las sumas inferiores $L(P, f, \alpha)$. Luego, $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$, y, puesto que ε es arbitrario, esto implica $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$.

Es fácil dar un ejemplo en el que $\underline{I}(f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha)$.

EJEMPLO. Tomemos $\alpha(x) = x$ y definamos f en $[a, b] = [0, 1]$ así:

$$f(x) = 1, \text{ si } x \text{ es racional}, \qquad f(x) = 0, \text{ si } x \text{ es irracional}.$$

Entonces para toda partición P de $[a, b]$, tenemos $M_k(f) = 1$ y $m_k(f) = 0$, ya que todo subintervalo contiene números racionales e irracionales. Por consiguiente, $U(P,f) = 1$ y $L(P,f) = 0$ para toda P, en consecuencia

$$\bar{\int_a^b} f \, dx = 1 \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b} f \, dx = 0.$$

Observemos que el mismo resultado es válido si $f(x) = 0$ cuando x es racional, y $f(x) = 1$ cuando x es irracional.

Las integrales superior e inferior gozan de muchas de las propiedades de la integral. Por ejemplo, tenemos

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^c} f\,d\alpha + \overline{\int_c^b} f\,d\alpha$$

si $a < c < b$, y la misma igualdad es válida para integrales inferiores. No obstante, ciertas igualdades que son válidas para integrales deben reemplazarse por desigualdades cuando se establecen para las integrales superior e inferior. Por ejemplo, tenemos

$$\overline{\int_a^b} (f+g)\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha + \overline{\int_a^b} g\,d\alpha$$

y

$$\underline{\int_a^b} (f+g)\,d\alpha \geq \underline{\int_a^b} f\,d\alpha + \underline{\int_a^b} g\,d\alpha.$$

El lector puede fácilmente verificar estas observaciones. (Ver Ejercicio 9-7.)

9-10 Condición de Riemann. Si se espera la igualdad de las integrales superior e inferior, también debemos esperar que las sumas superiores lleguen a ser tan próximas a las sumas inferiores cuanto queramos. Parece pues natural buscar aquellas funciones f para las cuales la diferencia $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$ puede hacerse arbitrariamente pequeña.

9—18 DEFINICIÓN. *Decimos que f satisface la condición de Riemann respecto a α en $[a, b]$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que si P es más fina que P_ε se verifica*

$$0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

9—19 TEOREMA. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Entonces las tres proposiciones siguientes son equivalentes:*

I) $f \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$.

II) f *satisface la condición de Riemann respecto a* α *en* $[a, b]$.

III) $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha)$.

Demostración. Probaremos que la parte I) implica II), la parte II) implica III), y que la III) implica I). Supongamos que es cierta I). Si $\alpha(b) = \alpha(a)$, es trivial la justificación de II) ; así pues, podemos suponer que $\alpha(a) < \alpha(b)$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos P_ε de modo que para cualquier P más fina y cualesquiera t_k y t'_k en $[x_{k-1}, x_k]$, se obtenga

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

donde $A = \int_a^b f\,d\alpha$. Combinando estas desigualdades, encontramos

$$\left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta\alpha_k\right| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Puesto que $M_k(f) - m_k(f) = \sup \{f(x) - f(x') | x,\ x' \text{ en } [x_{k-1},\ x_k]\}$, se deduce que para todo $h > 0$ podemos elegir t_k y t'_k de modo que $f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$, y tomando

$$h = \tfrac{1}{3}\,\varepsilon/[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

se puede escribir

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\,\Delta\alpha_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta\alpha_k + h\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k < \varepsilon.$$

Luego, I) implica II).

Supongamos, ahora, que II) es cierta. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que si P es más fina que P_ε se verifica $U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon$. Luego para tal P tenemos

$$\bar{I}(f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon \leq \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon.$$

Esto es, $\bar{I}(f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por consiguiente, $\bar{I}(f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha)$. Pero, según el Teorema 9-17, también se cumple la desigualdad opuesta. Luego II) implica III).

Finalmente, supongamos que $\bar{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$ y designemos por A su valor común. Queremos demostrar que $\int_a^b f\,d\alpha$ existe y es igual a A. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos P'_ε de manera que $U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ para toda P más fina que P'_ε. Elijamos asimismo P''_ε tal que $L(P, f, \alpha) > \underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon$ para toda P más fina que P''_ε. Si $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, podemos escribir

$$\underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon < L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$$

para toda P más fina que P_ε. Pero, ya que $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha) = A$, esto significa que $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$ siempre que P sea más fina que P_ε. Lo que prueba que $\int_a^b f\,d\alpha$ existe y es igual a A, con lo cual se ha completado la demostración del teorema.

9-11 Integradores de variación acotada. En el Teorema 8-13 encontrábamos que toda función α de variación acotada en $[a, b]$ puede expresarse

como la diferencia de dos funciones crecientes. Si $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ es una tal descomposición y si $f \in R(\alpha_1)$ y $f \in R(\alpha_2)$ en $[a, b]$, se deduce por la linealidad que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. No obstante, el recíproco no siempre es cierto. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, es posible elegir dos funciones crecientes α_1 y α_2 tales que $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, pero de tal manera que ninguna de las integrales $\int_a^b f\, d\alpha_1$, $\int_a^b f\, d\alpha_2$ exista. La dificultad, naturalmente, estriba en que no hay unicidad en la descomposición $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Sin embargo, podemos demostrar que existe por lo menos una descomposición $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ para la cual el recíproco *es* cierto, a saber, cuando α_1 es la variación total de α y $\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha$. (Recordar la Definición 8-8.)

9–20 Teorema. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$. Designemos por $V(x)$ la variación total de α en $[a, x]$ si $a < x \le b$, y tomemos $V(a) = 0$. Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $f \in R(V)$ en $[a, b]$.*

Demostración. Si $V(b) = 0$, V es constante y el resultado es trivial. Supongamos, por lo tanto, que $V(b) > 0$. Supongamos también que $|f(x)| \le M$ si $x \in [a, b]$. Puesto que V es creciente, necesitamos tan sólo verificar que f satisface la condición de Riemann con respecto a V en $[a, b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, elijamos P_ε de modo que para cualquier P más fina y todo par de puntos t_k y t'_k en $[x_{k-1}, x_k]$ se tenga

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\, \Delta\alpha_k \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad V(b) < \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Para P más fina que P_ε estableceremos las dos desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, |\Delta\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

que, por adición, originan $U(P, f, V) - L(P, f, V) < \varepsilon$.

Para demostrar la primera desigualdad, observemos que $\Delta V_k - |\Delta\alpha_k| \ge 0$ y, por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) \le 2M \sum_{k=1}^{n} (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|)$$

$$= 2M \left(V(b) - \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para probar la segunda desigualdad, consideremos $A(P) = \{k | \Delta\alpha_k \ge 0\}$, $B(P) = \{k | \Delta\alpha_k < 0\}$ y $h = \frac{1}{4}\varepsilon / V(b)$. Si $k \in A(P)$ elijamos t_k y t'_k de modo

que $f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$; pero, si $k \in B(P)$, elijamos t_k y t'_k para que $f(t'_k) - f(t_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, |\Delta\alpha_k| < \sum_{k \in A(P)} [f(t_k) - f(t'_k)]\, |\Delta\alpha_k|$$

$$+ \sum_{k \in B(P)} [f(t'_k) - f(t_k)]\, |\Delta\alpha_k| + h \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\, \Delta\alpha_k + h \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + hV(b) = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se deduce pues que $f \in R(V)$ en $[a, b]$.

NOTA. Este teorema (junto con el Teorema 8-12) nos permite reducir la teoría de la integración de Riemann-Stieltjes para integradores de variación acotada al caso de *integradores crecientes*. La condición de Riemann se hace entonces manejable y proporciona un instrumento particularmente útil en esta teoría. Como primera aplicación obtendremos un resultado que está estrechamente relacionado con el Teorema 9-4.

9—21 TEOREMA. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Entonces $f \in R(\alpha)$ en todo subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$.*

Demostración. Basta suponer que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Según el Teorema 9-4, es también suficiente demostrar que existe cada una de las integrales $\int_a^c f\, d\alpha$ e $\int_a^d f\, d\alpha$. Supongamos que $a < c < b$. Si P es una partición de $[a, x]$, designemos con $\Delta(P, x)$ la diferencia

$$\Delta(P, x) = U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

de las sumas superior e inferior asociadas al intervalo $[a, x]$. Puesto que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, la condición de Riemann es válida. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que $\Delta(P, b) < \varepsilon$ si P es más fina que P_ε. Podemos suponer que $c \in P_\varepsilon$. Los puntos de P_ε en $[a, c]$ forman una partición P'_ε de $[a, c]$. Si P' es una partición de $[a, c]$ más fina que P'_ε, entonces $P = P' \cup P_\varepsilon$ es una partición de $[a, b]$ compuesta de los puntos de P' unidos a aquellos puntos de P_ε pertenecientes a $[c, b]$. Ahora bien, la suma que define $\Delta(P', c)$ contiene únicamente parte de los términos de la suma que define $\Delta(P, b)$. Puesto que cada término es ≥ 0 y que P es más fina que P_ε, tenemos

$$\Delta(P', c) \leq \Delta(P, b) < \varepsilon.$$

Esto es, el que P' sea más fina que P'_ε implica $\Delta(P', c) < \varepsilon$. Luego, f satisface la condición de Riemann en $[a, c]$ y existe $\int_a^c f\, d\alpha$. El mismo razonamiento,

naturalmente, demuestra que $\int_a^d f\,d\alpha$ existe, y según el Teorema 9-4 se deduce que $\int_c^d f\,d\alpha$ existe.

9—22 TEOREMA. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, b]$. *Si* $f \in R(\alpha)$ *y* $g \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$ *y si* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* x *en* $[a, b]$, *tenemos entonces*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x)\,d\alpha(x).$$

Demostración. Para toda partición P, la correspondiente suma de Riemann-Stieltjes satisface

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta\alpha_k = S(P, g, \alpha)$$

ya que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. De esto resulta fácilmente el teorema.

En particular, este teorema implica que $\int_a^b g(x)\,d\alpha(x) \geq 0$ siempre que $g(x) \geq 0$ y $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$.

9—23 TEOREMA. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, b]$. *Si* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$, *entonces* $|f| \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$ *y tenemos la desigualdad*

$$\left| \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x).$$

Demostración. Usando la notación de la Definición 9-14, podemos escribir

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup \{f(x) - f(y) | x, y \text{ en } [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Puesto que la desigualdad $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ es válida siempre, deducimos

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \leq M_k(f) - m_k(f).$$

Multiplicando por $\Delta\alpha_k$ y sumando respecto a k, obtenemos

$$U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

para toda partición P de $[a, b]$. Aplicando la condición de Riemann, encontramos que $|f| \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. La desigualdad del teorema se logra tomando $g = |f|$ en el Teorema 9-22.

NOTA. El recíproco del Teorema 9-23 no es cierto. (Ver Ejercicio 9-9.)

9—24 TEOREMA. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, b]$. *Si* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$, *entonces* $f^2 \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$.

Demostración. Utilizando la notación de la Definición 9-14, tenemos

$$M_k(f^2) = [M_k(|f|)]^2 \quad \text{y} \quad m_k(f^2) = [m_k(|f|)]^2.$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$M_k(f^2) - m_k(f^2) = [M_k(|f|) + m_k(|f|)][M_k(|f|) - m_k(|f|)]$$
$$\leq 2M[M_k(|f|) - m_k(|f|)],$$

donde M es una cota superior de $|f|$ en $[a, b]$. Aplicando la condición de Riemann, se deduce la conclusión.

9—25 TEOREMA. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, b]$. *Si* $f \in R(\alpha)$ *y* $g \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$, *también el producto* $f.g \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$.

Demostración. Utilizamos el Teorema 9-24 unido con la identidad

$$2f(x)g(x) = [f(x) + g(x)]^2 - [f(x)]^2 - [g(x)]^2.$$

9-12 Condiciones suficientes para la existencia de las integrales de Riemann-Stieltjes. En la mayor parte de los teoremas anteriores hemos supuesto la existencia de ciertas integrales y estudiado entonces sus propiedades. Es, por consiguiente, natural preguntar: ¿Cuándo existe la integral? Obtendremos dos condiciones suficientes de notable utilidad.

9—26 TEOREMA. *Si* f *es continua en* $[a, b]$ *y* α *es de variación acotada en* $[a, b]$, *es* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$.

NOTA. Según el Teorema 9-6, puede obtenerse una segunda condición suficiente intercambiando f y α en la hipótesis.

Demostración. Es suficiente probar el teorema cuando α es estrictamente creciente. La continuidad de f en $[a, b]$ implica la continuidad uniforme, así que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ (que depende sólo de ε) tal que

$$|x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon/A,$$

donde $A = 2([\alpha(b) - \alpha(a)]$. Si P_ε es una partición de norma $|P_\varepsilon| < \delta$, entonces para una P más fina que P_ε debe ser

$$M_k(f) - m_k(f) \leq \varepsilon/A,$$

ya que $M_k(f) - m_k(f) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x, \text{ y en } [x_{k-1}, x_k]\}$. Multiplicando la desigualdad por $\Delta\alpha_k$ y sumando, encontramos

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq \frac{\varepsilon}{A} \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

y vemos que la condición de Riemann es válida. Luego $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.

Considerando el caso especial en el que $\alpha(x) = x$, los Teoremas 9-26 y 9-6 originan el siguiente corolario:

9–27 TEOREMA. *Cada una de las condiciones siguientes es suficiente para la existencia de la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$:*

a) *f continua en $[a, b]$.*
b) *f de variación acotada en $[a, b]$.*

9-13 Condiciones necesarias para la existencia de las integrales de Riemann-Stieltjes. Cuando α es de variación acotada en $[a, b]$, la continuidad de f es suficiente para la existencia de $\int_a^b f\,d\alpha$. Sin embargo, la continuidad de f en todo $[a, b]$ en modo alguno es necesaria. Por ejemplo, en el Teorema 9-9 encontrábamos que cuando α es una función escalonada, entonces f puede definirse arbitrariamente en $[a, b]$ con tal de que tan sólo f sea continua en las discontinuidades de α. El próximo teorema nos dice que las discontinuidades comunes a la derecha o a la izquierda deben ser evitadas si la integral ha de existir.

9–28 TEOREMA. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$ y sea $a < c < b$. Supongamos, además, que f y g son ambas discontinuas a la derecha de $x = c$; esto es, supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay valores de x e y en el intervalo $(c, c + \delta)$ para los cuales*

$$|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon \quad y \quad |\alpha(y) - \alpha(c)| \geq \varepsilon.$$

En tal caso no puede existir la integral $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$. Tampoco existe si f y g son discontinuas a la izquierda de c.

Demostración. Sea P una partición de $[a, b]$ que contiene c como un punto de subdivisión y formemos la diferencia

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\,\Delta\alpha_k.$$

Si el i-ésimo subintervalo tiene c como extremo izquierdo, entonces

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq [M_i(f) - m_i(f)][\alpha(x_i) - \alpha(c)]$$

puesto que cada término de la suma es ≥ 0. Si c es una discontinuidad común a la derecha, podemos suponer que el punto x_i se elige de manera que $\alpha(x_i) - \alpha(c) \geq \varepsilon$. Además, la hipótesis del teorema implica $M_i(f) - m_i(f) \geq \varepsilon$. Luego, $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \varepsilon^2$ y no puede satisfacerse la condición de Riemann. (Si c es una discontinuidad común a la izquierda, el razonamiento es similar.)

9-14 Teoremas del Valor Medio para las integrales de Riemann-Stieltjes. Si bien las integrales se presentan en una amplia variedad de problemas, existen relativamente pocos casos en los que puede obtenerse explícitamente su valor.

Sin embargo, con frecuencia basta tener una estima de la integral más bien que su valor exacto. Los Teoremas del Valor Medio de este párrafo son especialmente útiles al hacer tales estimas.

9—29 TEOREMA (*Primer Teorema del Valor Medio para las integrales de Riemann-Stieltjes*). *Supongamos que* $\alpha\nearrow$ *en* $[a, b]$ *y sea* $f \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$. *Designemos por* M *y* m *el* sup *y el* inf, *respectivamente, del conjunto* $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. *Existe entonces un número real* c *comprendido entre* m *y* M : $m \leq c \leq M$, *y tal que*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = c\int_a^b d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

En particular, si f *es continua en* $[a, b]$, *entonces* $c = f(x_0)$ *para algún* x_0 *en* $[a, b]$.

Demostración. Si $\alpha(a) = \alpha(b)$, el teorema es trivial, ambos miembros son 0. Luego podemos suponer que $\alpha(a) < \alpha(b)$. Puesto que todas las sumas superiores e inferiores satisfacen

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ debe quedar comprendida entre las mismas cotas. Por consiguiente, el cociente $c = (\int_a^b f\, d\alpha)/\int_a^b d\alpha)$ queda comprendido entre m y M. Cuando f es continua en $[a, b]$ el teorema del valor intermedio da $c = f(x_0)$ para algún x_0 en $[a, b]$.

Un segundo teorema de este tipo puede obtenerse del primero usando la integración por partes.

9—30 TEOREMA. (*Segundo Teorema del Valor Medio para las integrales de Riemann-Stieltjes*). *Supongamos que* α *sea continua y que* $f\nearrow$ *en* $[a, b]$. *Existe entonces un punto* x_0 *en* $[a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(a)\int_a^{x_0} d\alpha(x) + f(b)\int_{x_0}^b d\alpha(x).$$

Demostración. Según el Teorema 9-6, tenemos

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\, df(x).$$

Aplicando el Teorema 9-29 a la integral del segundo miembro, encontramos

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(a)[\alpha(x_0) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(x_0)],$$

donde $x_0 \in [a, b]$, que es la fórmula que deseábamos demostrar.

9-15 La integral como función del intervalo. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y si α es de variación acotada, entonces (según el Teorema 9-21) la $\int_a^x f\, d\alpha$ existe para cada x en $[a, b]$ y puede estudiarse como una función de x. Vamos a obtener ahora algunas propiedades de esta función.

9—31 TEOREMA. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Definamos F por la igualdad*

$$F(x) = \int_a^x f\, d\alpha, \qquad \text{si } x \in [a, b].$$

Tenemos entonces:

I) *F es de variación acotada en $[a, b]$.*
II) *Todo punto de continuidad de α es también de continuidad de F.*
III) *Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$ existe la derivada $F'(x)$ en cada punto x de $[a, b]$ en el que $\alpha'(x)$ exista y sea continua f. Para tal x tenemos*

$$F'(x) = f(x)\alpha'(x).$$

Demostración. Basta suponer que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Si $x \neq y$, el Teorema 9-29 implica

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f\, d\alpha = c[\alpha(y) - \alpha(x)],$$

donde $m \leq c \leq M$ (con la notación del Teorema 9-29). De esta ecuación siguen inmediatamente las aserciones I) y II). Para demostrar III), dividimos por $y - x$ y observamos que $c \to f(x)$ cuando $y \to x$.

En el próximo teorema se pone de manifiesto la utilidad de la derivada al calcular integrales de Riemann.

9-32 TEOREMA. (*Teorema fundamental del cálculo integral*). *Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. Sea g una función definida en $[a, b]$ tal que exista su derivada g' en $[a, b]$ y tenga como valor*

$$g'(x) = f(x) \qquad \textit{para todo } x \textit{ en } (a, b).$$

En los extremos supongamos que $g(a+)$ y $g(b-)$ existan y satisfagan

$$g(a) - g(a+) = g(b) - g(b-).$$

Tenemos entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g'(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

Demostración. Para toda partición de $[a, b]$ podemos escribir

$$g(b) - g(a) = \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} g'(t_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k,$$

donde t_k es un punto de (x_{k-1}, x_k) determinado mediante el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial. Pero para un $\varepsilon > 0$ dado, la partición puede tomarse lo suficientemente fina para que

$$\left| g(b) - g(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

y esto demuestra el teorema.

9-16 Cambio de variable en una integral de Riemann. La fórmula

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_c^d h\,d\beta$$

del Teorema 9-7 para cambiar la variable en una integral adopta la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]\,g'(t)\,dt$$

cuando $\alpha(x) = x$ y g es una función estrictamente monótona con derivada g' continua. Esto es válido si $f \in R$ en $[a, b]$. Cuando f es continua, podemos usar el Teorema 9-31 para evitar la restricción de que g sea monótona. Tenemos, en efecto, el siguiente teorema.

9—33 TEOREMA. (*Cambio de variable en una integral de Riemann*). *Admitamos que g tenga derivada g' continua en un intervalo S cuyos extremos son c y d. Sea f continua en $g(S)$ y sean $a = g(c)$, $b = g(d)$. Definamos F mediante la igualdad*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \text{si } x \in g(S).$$

Entonces, para cada x de S, la integral $\int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt$ existe y tiene el valor $F[g(x)]$. En particular, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]\,g'(t)\,dt.$$

Demostración. Puesto que g' y la función compuesta fg son continuas en S, la integral en cuestión existe. Definamos la función G en S como sigue:

$$G(x) = \int_c^x f[g(t)]\, g'(t)\, dt.$$

Tenemos que demostrar que $G(x) = F[g(x)]$. Según el Teorema 9-31, tenemos $G'(x) = f[g(x)]g'(x)$ y, según la regla de derivación de las funciones compuestas, la derivada de $F[g(x)]$ es también $f[g(x)]g'(x)$, ya que $F'(x) = f(x)$ Luego, $G(x) - F[g(x)]$ es una constante. Pero, para $x = c$, resulta $G(c) = 0$ y $F[g(c)] = F(a) = 0$, así que esa constante debe ser 0. Por consiguiente, $G(x) = F[g(x)]$ para todo x de S. En particular, cuando $x = d$, obtenemos $G(d) = F[g(d)] = F(b)$ y ésta es la última igualdad del teorema.

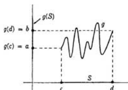


Figura 9-2.

NOTA. Muchos textos demuestran el teorema precedente agregando la hipótesis de que g' nunca es cero en S, que, naturalmente, implica la monotonía de g. La anterior demostración pone de manifiesto que esto no es necesario. Además, el intervalo que une a y b no es necesariamente la imagen de S obtenida por g. Todo lo que se precisa es que $a = g(c)$ y $b = g(d)$. En realidad, el teorema es aún válido si $a = g(c) = g(d) = b$. Esto hace que el teorema sea especialmente útil en las aplicaciones. (Véase Fig. 9-2 para una g admisible.)

9-17 Segundo Teorema del Valor Medio para integrales de Riemann.

9—34 TEOREMA. *Sea g continua y supongamos que $f \nearrow$ en $[a, b]$. Sean A y B dos números reales que satisfacen las desigualdades*

$$A \leq f(a+) \quad y \quad B \geq f(b-).$$

Existe entonces un punto x_0 en $[a, b]$ tal que

$$\text{I)} \quad \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = A \int_a^{x_0} g(x)\, dx + B \int_{x_0}^b g(x)\, dx.$$

En particular, si $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, tenemos

$$\text{II)} \quad \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = B \int_{x_0}^b g(x)\, dx, \qquad \text{donde } x_0 \in [a, b]$$

NOTA. La parte II) es conocida con el nombre de *teorema de Bonnet*.

Demostración. Si $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, entonces $\alpha' = g$, el Teorema 9-30 es aplicable, y obtenemos

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a)\int_a^{x_0} g(x)\, dx + f(b)\int_{x_0}^b g(x)\, dx.$$

Esto demuestra I) siempre que $A = f(a)$ y $B = f(b)$. Ahora bien, si A y B son dos números reales cualesquiera que satisfacen $A \leq f(a+)$ y $B \geq f(b-)$, podemos variar la definición de f en los extremos a y b de manera que tenga los valores $f(a) = A$ y $f(b) = B$. La f modificada es aún creciente en $[a, b]$ y, como antes hemos observado, el cambio del valor de f en un número finito de puntos no afecta al valor de una integral de Riemann. (Naturalmente, el punto x_0 de I) dependerá de la elección de A y B.) Tomando $A = 0$, la parte II) se deduce de la parte I).

9-18 Integrales de Riemann-Stieltjes dependientes de un parámetro.

9—35 TEOREMA. *Sea f continua en cada punto (x, y) de un rectángulo $R = \{(x, y)|a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$ y sea F la función definida en $[c, d]$ mediante la ecuación*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x).$$

Entonces F es continua en $[c, d]$. En otras palabras, si $y_0 \in [c, d]$, tenemos

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, h)\, d\alpha(x) = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x, y_0)\, d\alpha(x).$$

Demostración. Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Puesto que R es un conjunto compacto, f es uniformemente continua en R. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (dependiente sólo de ε) tal que para todo par de puntos $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ en R que cumplen la condición $|z - z'| < \delta$, tenemos $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. Si $|y - y'| < \delta$, es

$$|F(y) - F(y')| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y')|\, d\alpha(x) \leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Esto establece la continuidad de F en $[c, d]$.

Naturalmente, cuando $\alpha(x) = x$, este resultado se convierte en un teorema de continuidad para las integrales de Riemann que contienen un parámetro.

Sin embargo, podemos deducir un resultado mucho más útil para las integrales de Riemann que el obtenido poniendo simplemente $\alpha(x) = x$ si usamos el teorema siguiente.

9–36 TEOREMA. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$, consideremos $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, y definamos*

$$\beta(x) = \int_a^x g(t)\, d\alpha(t), \qquad si\ x \in [a, b].$$

Si f es continua en $[a, b]$, es entonces $f \in R(\beta)$ en $[a, b]$ y tenemos

$$\int_a^b f(x)\, d\beta(x) = \int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x).$$

NOTA. El Teorema 9-8 es un caso particular.

Demostración. En primer lugar, β es de variación acotada en $[a, b]$ (según el Teorema 9-31) y por lo tanto $f \in R(\beta)$ según el Teorema 9-26. Para toda partición P de $[a, b]$, tenemos

$$S(P, f, \beta) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)\, d\alpha(t)$$

y

$$\int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t)\, d\alpha(t).$$

Por consiguiente,

$$S(P, f, \beta) - \int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(t_k) - f(t)]g(t)\, d\alpha(t).$$

La conclusión es ahora una sencilla consecuencia de la continuidad uniforme de f en $[a, b]$.

NOTA. Cuando $\alpha(x) = x$, este teorema nos permite convertir una integral de Riemann $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ cuyo integrando es un producto de una función *continua* f por una función *integrable* g, en una integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\,d\beta$ en la que β es de variación acotada en $[a, b]$. En particular, podemos utilizar el Teorema 9-36 para deducir el siguiente:

COROLARIO DEL TEOREMA 9–35. *Si f es continua en el rectángulo R del Teorema 9-35 y $g \in R$ en $[a, b]$, entonces la función F definida por la ecuación*

$$F(y) = \int_a^b g(x)\, f(x, y)\, dx$$

es continua en $[c, d]$. *Esto es, si* $y_0 \in [c, d]$, *tenemos*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b g(x) f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x) f(x, y_0)\, dx.$$

Demostración. Si $\beta(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, tenemos $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\beta(x)$. Ahora se aplica el Teorema 9-35.

9-19 Diferenciación bajo el signo integral.

9—37 TEOREMA. *Consideremos* $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. *Supongamos que* α *es de variación acotada en* $[a, b]$ *y, para cada* y *fijo en* $[c, d]$, *supongamos que la integral*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x)$$

existe. Si la derivada parcial $D_2 f$ *es continua en* R, *la derivada* $F'(y)$ *existe para cada* y *de* (c, d) *y viene dada por*

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y)\, d\alpha(x).$$

NOTA. En particular, cuando $g \in R$ en $[a, b]$ y $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, obtenemos

$$F(y) = \int_a^b g(x) f(x, y)\, dx \quad \text{y} \quad F'(y) = \int_a^b g(x)\, D_2 f(x, y)\, dx.$$

Demostración. Si $y_0 \in (c, d)$ e $y \neq y_0$, tenemos

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}\, d\alpha(x) = \int_a^b D_2 f(x, \bar{y})\, d\alpha(x),$$

donde $\bar{y}$ está comprendido entre y e y_0. Puesto que $D_2 f$ es continua en R, obtenemos la conclusión haciendo $y \to y_0$ y aplicando el Teorema 9-35.

Para las integrales de Riemann tenemos aún otro teorema en el cual los límites de integración dependen de y.

9—38 TEOREMA. *Consideremos* $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. *Supongamos que* f *y* $D_2 f$ *sean continuas en* R. *Sean* p *y* q *dos funciones que posean derivadas* p' *y* q' *finitas en* $[c, d]$ *y supongamos que* $a \leq p(y) \leq b$ *y que* $a \leq q(y) \leq b$ *para cada* y *de* $[c, d]$. *Definamos* F *mediante la ecuación*

$$F(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx, \qquad si\ y \in [c, d].$$

Existe entonces $F'(y)$ para cada y de (c, d) y viene dada por

$$F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} D_2 f(x, y)\, dx + f[q(y), y]q'(y) - f[p(y), y]p'(y).$$

Demostración. Consideremos $G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} f(t, x_3)\, dt$ definida para x_1 y x_2 pertenecientes a $[a, b]$ y $x_3 \in [c, d]$. En tal caso F es la función compuesta dada por $F(y) = G[p(y), q(y), y]$. Según la regla de derivación (Teorema 6-14), tenemos

$$F'(y) = D_1 G[p(y), q(y), y]p'(y) + D_2 G[p(y), q(y), y]q'(y) + D_3 G[p(y), q(y), y].$$

Aplicando el Teorema 9-31, podemos escribir $D_1 G(x_1, x_2, x_3) = -f(x_1, x_3)$ y $D_2 G(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3)$. En virtud del Teorema 9-37, también tenemos

$$D_3 G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} D_2 f(t, x_3)\, dt.$$

Substituyendo estos resultados en la fórmula de $F'(y)$ se obtiene el teorema.

9-20 Inversión del orden de derivación.

9—39 TEOREMA. *Consideremos $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$, β de variación acotada en $[c, d]$ y f continua en R. Si $(x, y) \in R$, definamos*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x), \qquad G(x) = \int_c^d f(x, y)\, d\beta(y).$$

Entonces $F \in R(\beta)$ en $[c, d]$, $G \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, y tenemos

$$\int_c^d F(y)\, d\beta(y) = \int_a^b G(x)\, d\alpha(x).$$

En otras palabras, podemos invertir el orden de integración como sigue:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x) \right] d\beta(y).$$

NOTA. Si $\alpha(x) = \int_a^x g(u)\, du$ y $\beta(y) = \int_c^y h(v)\, dv$, donde $g \in R$ en $[a, b]$ y $h \in R$ en $[c, d]$, los Teoremas 9-39 y 9-36 dan origen al siguiente resultado para las integrales de Riemann:

$$\int_a^b \left[\int_c^d g(x)h(y)f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Demostración. Según el Teorema 9-35, F es continua en $[c, d]$ y por tanto $F \in R(\beta)$ en $[c, d]$. Análogamente, $G \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Para demostrar la igualdad de las dos integrales, basta considerar el caso en que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$ y $\beta \nearrow$ en $[c, d]$.

Por la continuidad uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ de R, siendo $|z - z'| < \delta$, tenemos $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. Subdividamos ahora R en n^2 rectángulos iguales subdividiendo $[a, b]$ y $[c, d]$ cada uno en n partes iguales, donde n se elige de modo que $(b - a)/n < \delta/\sqrt{2}$ y $(d - c)/n < \delta/\sqrt{2}$. Escribiendo

$$x_k = a + \frac{k(b - a)}{n} \quad \text{e} \quad y_k = c + \frac{k(d - c)}{n},$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y) \right) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)\, d\beta(y) \right) d\alpha(x).$$

Aplicando dos veces el Teorema 9-29 en el segundo miembro, la doble suma se convierte en

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x'_k, y'_j)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

donde (x'_k, y'_j) está en el rectángulo $R_{k,j}$ que tiene (x_k, y_j) y (x_{k+1}, y_{j+1}) como vértices opuestos. De la misma manera, encontramos

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x) \right) d\beta(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x''_k, y''_j)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

donde $(x''_k, y''_j) \in R_{k,j}$. Pero $|f(x'_k, y'_j) - f(x''_k, y''_j)| < \varepsilon$ y por tanto

$$\left| \int_a^b G(x)\, d\alpha(x) - \int_c^d F(y)\, d\beta(y) \right| < \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} [\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)] \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)] = \varepsilon[\beta(d) - \beta(c)][\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Puesto que ε es arbitrario, esto implica la igualdad de las dos integrales.

9-21 Oscilación de una función. Toda función continua es integrable Riemann. No obstante, la continuidad no es ciertamente indispensable, pues hemos visto que $f \in R$ cuando f es de variación acotada en $[a, b]$. En particular, f puede ser una función monótona que tenga un conjunto numerable de discontinuidades y todavía $\int_a^b f(x)\,dx$ existirá. Veremos al final del Capítulo (Ejercicio 9-32) que existen funciones integrables Riemann cuyas discontinuidades forman un conjunto no numerable. Por consiguiente es natural preguntar «cuántas» discontinuidades puede tener una función y que no obstante sea todavía integrable Riemann. Un estudio de esta interesante cuestión nos conducirá a algunas condiciones necesarias y suficientes muy importantes para la existencia de la integral de Riemann.

Hemos visto que $f \in R$ si se satisface la condición de Riemann y recíprocamente. Si examinamos cómo se establece tal condición, podemos formarnos una idea aproximada de la índole de las restricciones impuestas al conjunto de las discontinuidades de f. La diferencia entre las sumas superior e inferior de Riemann viene dada por

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta x_k$$

y, hablando en forma imprecisa, f será integrable si, y tan sólo si, esta suma llega a ser y permanece «pequeña». Escindamos esta suma en dos partes, $S_1 + S_2$, donde S_1 procede de los subintervalos que contienen únicamente puntos de continuidad de f, y S_2 contiene los restantes términos. En S_1, cada diferencia $M_k(f) - m_k(f)$ es pequeña a causa de la continuidad y, por lo tanto, pueden presentarse un gran número de tales términos y conservarse aún pequeña S_1. En S_2, sin embargo, las diferencias $M_k(f) - m_k(f)$ no son necesariamente pequeñas; pero puesto que son acotadas (por un número M), tenemos $|S_2| \leq M \sum \Delta x_k$, así que S_2 será pequeña si la suma de las longitudes de los subintervalos correspondientes a S_2 es pequeña. Por consiguiente, podemos contar con que el conjunto de las discontinuidades de una función integrable puede ser recubierto por intervalos cuya longitud total sea pequeña. Procederemos ahora a una discusión precisa de esta cuestión.

Ante todo, debemos explicar lo que significa decir que

$$M_k(f) - m_k(f)$$

es «pequeña». A tal objeto introducimos el concepto de oscilación.

9—40 DEFINICIÓN. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo cerrado S. Sea T un subconjunto de S. El número*

$$\Omega_f(T) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x \in T, y \in T\}$$

se llama la oscilación de f en el conjunto T. Si $x \in S$, la oscilación de f en x se define como el número

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0+} \Omega_f(N(x; h) \cap S).$$

NOTA. Este límite existe siempre, puesto que $\Omega_f(N(x; h) \cap S)$ es una función monótona de h. En efecto, $T_1 \subset T_2$ implica $\Omega_f(T_1) \leq \Omega_f(T_2)$.

La noción de oscilación proporciona una clara caracterización de la continuidad que puede establecerse como sigue:

9—41 TEOREMA. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo cerrado S. Tal función f es continua en un punto x de S si $\omega_f(x) = 0$, y recíprocamente.*

La demostración queda como ejercicio para el lector. (Ver Ejercicio 9-24.)

El próximo teorema nos dice que si $\omega_f(x) < \varepsilon$ en cada punto de un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\Omega_f(T) < \varepsilon$ para todos los subintervalos T suficientemente pequeños.

9—42 TEOREMA. *Sea f acotada y definida en $[a, b]$, y dado un $\varepsilon > 0$, supongamos que $\omega_f(x) < \varepsilon$ para todo x en $[a, b]$. Existe entonces un $\delta > 0$ (que sólo depende de ε) tal que para todo subintervalo cerrado $T \subset [a, b]$, tenemos $\Omega_f(T) < \varepsilon$ siempre que la longitud de T sea menor que δ.*

Demostración. Para cada x de $[a, b]$ existe un entorno $N_x = N(x; \delta_x)$ tal que

$$\Omega_f(N_x \cap [a, b]) < \omega_f(x) + [\varepsilon - \omega_f(x)] = \varepsilon.$$

El conjunto de todos los entornos de amplitud mitad $N(x; \delta_x/2)$ constituye un recubrimiento abierto de $[a, b]$. Según el teorema de Heine-Borel, un número finito k de éstos recubre $[a, b]$. Sean sus radios $\delta_1/2, \ldots, \delta_k/2$ y δ el menor de estos k números. Cuando el intervalo T tiene una longitud $< \delta$, es parcialmente recubierto por lo menos por uno de esos entornos, sea éste $N(x_p; \delta_p/2)$. Sin embargo, el entorno $N(x_p; \delta_p)$ recubre completamente T (ya que $\delta_p \geq 2\delta$). Además, en $N(x_p; \delta_p) \cap [a, b]$ la oscilación de f es menor que ε. Esto implica que $\Omega_f(T) < \varepsilon$ y el teorema está demostrado.

9—43 TEOREMA. *Sea f acotada y definida en $[a, b]$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto J_ε como sigue:*

$$J_\varepsilon = \{x | x \in [a, b],\ \omega_f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Entonces J_ε es un conjunto cerrado.

Demostración. Sea x un punto de acumulación de J_ε. Si $x \notin J_\varepsilon$, tenemos $\omega_f(x) < \varepsilon$. Por lo tanto, existe un entorno $N(x)$ tal que

$$\Omega_f(N(x) \cap [a, b]) < \epsilon.$$

Así pues, ningún punto de $N(x)$ puede pertenecer a J_ϵ, en contradicción con que x es un punto de acumulación de J_ϵ. Por consiguiente, $x \in J_\epsilon$ y J_ϵ es cerrado.

9-22 Contenido Jordan de conjuntos acotados en E_1. De acuerdo con los resultados anteriores, parece natural pensar que el conjunto de las discontinuidades de una función integrable puede ser recubierto mediante intervalos cuya longitud total es pequeña. En un intento para medir la porción de un intervalo que ocupan las discontinuidades de una función, HANKEL (1882) introduce la noción de *contenido* de un conjunto. CANTOR y STOLZ (1884) extendieron las ideas de HANKEL a subconjuntos de E_n y así fueron poniendo los cimientos de una rama de las matemáticas conocida como la *teoría del contenido*. La teoría desarrollada por HANKEL, CANTOR, y STOLZ, tenía ciertos defectos que aparecían cuando los conjuntos en cuestión no eran cerrados. En un esfuerzo para eliminar tales deficiencias, PEANO (1887) y JORDAN (1892) introdujeron las nociones de contenido *interior* y contenido *exterior*.

La teoría del contenido fue más tarde extendida por BOREL (1898) y LEBESGUE (1902). Su labor condujo a una teoría más general y satisfactoria, conocida ahora como la *teoría de la medida de Lebesgue*. En este libro no se intentará un estudio minucioso de la teoría de la medida (al final del capítulo se encontrará excelente bibliografía relativa a esta cuestión); nos proponemos tratar lo indispensable de las teorías del contenido y de la medida para poner de manifiesto la utilidad de estas ideas cuando se presentan en la teoría de la integración de Riemann.

Sea S un subconjunto de un intervalo $[a, b]$, y sea P una partición de $[a, b]$. Entre los varios subintervalos de P fijemos nuestra atención en dos tipos: 1) aquellos que únicamente contienen puntos interiores de S, y 2) aquellos que contienen puntos de S y puntos frontera de S. (Recordar la Definición 8-38.) Los intervalos del tipo 1) nos dan una aproximación de S por «dentro» y los del tipo 2) una aproximación por «fuera».

9—44 DEFINICIÓN. *Consideremos $S \subset [a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$. Definamos $\underline{J}(P, S)$ como la suma de las longitudes de aquellos subintervalos de P que sólo contienen puntos interiores de S. De la misma manera $\overline{J}(P, S)$ representa la suma de las longitudes de aquellos subintervalos de P que contienen puntos de $S \cup \partial S$. Los números*

$$\underline{c}(S) = \sup \{\underline{J}(P, S) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\},$$
$$\overline{c}(S) = \inf \{\overline{J}(P, S) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

se llaman, respectivamente, los contenidos interior o exterior de Jordan de S. Se dice que S es medible-Jordan si $\underline{c}(S) = \overline{c}(S)$, en cuyo caso este valor común se llama el contenido Jordan de S y se representa por $c(S)$.

NOTA. Es evidente que los números $\underline{c}(S)$ y $\bar{c}(S)$ dependen tan sólo del conjunto S y no del intervalo $[a, b]$ que contiene S.

Siempre tenemos $0 \leq \underline{c}(S) \leq \bar{c}(S)$. Además, cuando S es un conjunto finito, entonces $\underline{c}(S) = \bar{c}(S) = 0$. En realidad, un conjunto S sin puntos interiores tiene $\underline{c}(S) = 0$ puesto que cada suma $\underline{J}(P, S) = 0$. En particular, el conjunto de los números racionales en un intervalo cualquiera $[a, b]$ tiene contenido interior Jordan nulo, como le ocurre al correspondiente conjunto de números irracionales. Sin embargo, cada uno de estos mismos conjuntos tiene contenido exterior Jordan $b - a$. En efecto, para cada uno de ellos se tiene $\bar{J}(P, S) = b - a$ cualesquiera que sea P, ya que todo subintervalo contiene puntos racionales e irracionales.

La longitud del intervalo $[a, b]$ es $b - a$. Este es también el valor del contenido de $[a, b]$. Si el intervalo se descompone en una reunión de dos subintervalos disjuntos, la longitud de su reunión es la suma de las longitudes de las partes componentes. Esta propiedad «aditiva» no subsiste para el contenido interior Jordan ni para el exterior, como vemos escribiendo $[a, b] = A \cup B$, donde A es el conjunto de los números racionales y B el de los irracionales del intervalo $[a, b]$. Efectivamente, tenemos $\bar{c}(A) = \bar{c}(B) = \bar{c}(A \cup B) = b - a$ y $\underline{c}(A) = \underline{c}(B) = 0$, $\underline{c}(A \cup B) = b - a$. No obstante, el contenido *es* aditivo; esto es, $c(A \cup B) = c(A) + c(B)$ si $A \cap B$ es vacío, con tal de que A y B sean ambos medibles-Jordan. (Ver Ejercicio 9-25.)

Inmediatamente puede establecerse una conexión entre el contenido Jordan y la integración Riemann. El eslabón de enlace es la *función característica* de un conjunto.

9–45 DEFINICIÓN. *Dado un conjunto S cualquiera en E_n. La función f_S definida como sigue:*

$$f_S(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{si } \mathbf{x} \in S, \qquad f_S(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in E_n - S,$$

se llama la función característica de S.

9–46 TEOREMA. *Consideremos $S \subset [a, b]$ y sea f_S la función característica de S. Tenemos entonces*

$$\underline{c}(S) = \underline{\int_a^b} f_S(x)\, dx \quad \text{y} \quad \bar{c}(S) = \overline{\int_a^b} f_S(x)\, dx.$$

Demostración. Para cada partición P de $[a, b]$ tenemos

$$L(P, f_S) = \underline{J}(P, S) \quad \text{y} \quad U(P, f_S) = \bar{J}(P, S),$$

donde L y U son las sumas de Riemann inferior y superior. El teorema se deduce al momento de estas igualdades.

9-23 Una condición necesaria y suficiente de integrabilidad expresada en función del contenido.

9—47 TEOREMA. *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Para cada $\varepsilon > 0$ definamos el conjunto J_ε como sigue:*

$$J_\varepsilon = \{x \mid x \in [a, b], \omega_f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Entonces $f \in R$ en $[a, b]$ si $c(J_\varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$, y recíprocamente.

Demostración. Supongamos que $\bar{c}(J_\varepsilon) \neq 0$ para un cierto $\varepsilon > 0$. Vamos a demostrar que la condición de Riemann no es válida. Para toda partición P de $[a, b]$ tenemos

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta x_k = S_1 + S_2 \geq S_1,$$

donde S_1 contiene aquellos términos que proceden de los subintervalos que contienen puntos de J_ε, y S_2 contiene los términos restantes. Los intervalos de S_1 tienen longitud total $\bar{J}(P, J_\varepsilon) \geq \bar{c}(J_\varepsilon)$. Además, en esos intervalos tenemos

$$M_k(f) - m_k(f) \geq \varepsilon \quad \text{así que} \quad S_1 \geq \varepsilon\, \bar{c}(J_\varepsilon).$$

Esto significa que

$$U(P, f) - L(P, f) \geq \varepsilon\, \bar{c}(J_\varepsilon)$$

y no puede satisfacerse la condición de Riemann. Luego, $f \in R$ implica $\bar{c}(J_\varepsilon) = 0$.

Recíprocamente, tomemos un $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\bar{c}(J_\varepsilon) = 0$. Entonces existe una partición P_0 de $[a, b]$ tal que $\bar{J}(P_0, J_\varepsilon) < \varepsilon$. En cada uno de los subintervalos I de P_0 que no contienen puntos de J_ε, tenemos $\omega_f(x) < \varepsilon$ si $x \in I$. Luego, según el Teorema 9-42, existe un $\delta > 0$ (que sólo depende de ε) tal que todo subintervalo I puede ser subdividido en intervalos T de longitud $< \delta$ en los cuales $\Omega_f(T) < \varepsilon$. Designemos por P_ε la nueva partición de $[a, b]$ así obtenida. Si P es más fina que P_ε, podemos escribir

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta x_k = A_1 + A_2,$$

donde A_1 contiene aquellos términos procedentes de subintervalos que contienen puntos de J_ε, y A_2 contiene los términos restantes. En el k-ésimo término de A_2 tenemos $M_k(f) - m_k(f) < \varepsilon$ y por tanto $A_2 < \varepsilon(b - a)$. Para A_1 tenemos la acotación $A_1 \leq (M - m)\, \bar{J}(P_0, J_\varepsilon) < \varepsilon(M - m)$, donde m y M son el inf y el sup de f en $[a, b]$. De donde,

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon[M - m + b - a].$$

Ya que esta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$, vemos que la condición de Riemann se satisface.

Si bien el Teorema 9-47 nos da una condición necesaria y suficiente para determinar si una función acotada es o no es integrable Riemann, tal condición en la práctica no es demasiado útil. Su principal desventaja consiste en que se debe calcular $c(J_\varepsilon)$ para infinitos conjuntos J_ε cuya estructura puede ser de difícil determinación a partir de la descripción de la función. Una condición necesaria y suficiente mucho más manejable fue descubierta por LEBESGUE. Con objeto de formular esta condición, debemos introducir la medida exterior de Lebesgue.

9-24 Medida exterior de Lebesgue de subconjuntos de E_1.

9—48 DEFINICIÓN. *Consideremos $S \subset E_1$. Un recubrimiento de Lebesgue del conjunto S es un conjunto numerable $T = \{I_1, I_2, \ldots\}$ de intervalos abiertos que recubren S. Si $L(I_k)$ es la longitud de I_k, la longitud del recubrimiento, $L(T)$, se define como el número*

$$L(T) = \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k)$$

siempre que esta serie converja. En el caso en que la serie sea divergente, ponemos $L(T) = +\infty$. El número

$$\overline{m}(S) = \inf \{L(T) \mid T \text{ es un recubrimiento de Lebesgue de } S\}$$

se llama la medida exterior de Lebesgue de S.

NOTA. Cuando S es acotado, por ejemplo $S \subset [a, b]$, entonces $0 \leq \overline{m}(S) \leq b - a$. Si $\overline{m}(S) = 0$, S se llama un conjunto de medida nula. (La noción de medida *interior* de Lebesgue no se desarrollará aquí ya que nos interesarán principalmente los conjuntos de medida nula, y, para tales conjuntos, las medidas de Lebesgue interior y exterior son ambas nulas. Ver Ref. 9-1 para un estudio de la medida interior de Lebesgue.) De la definición resulta evidente que $A \subset B$ implica $\overline{m}(A) \leq \overline{m}(B)$.

La relación entre la medida exterior de Lebesgue y el contenido exterior de Jordan se pone de manifiesto en los tres próximos teoremas.

9—49 TEOREMA. *Para todo conjunto acotado S en E_1 tenemos $\overline{m}(S) < \overline{c}(S)$.*

Demostración. Consideramos $S \subset [a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$.

Los subintervalos de P que contienen puntos de $S \cup \partial S$ sean $A_1, \ldots, A_m$, donde $A_k = [a_k, b_k]$. Entonces.

$$\bar{J}(P, S) = \sum_{k=1}^{m} L(A_k).$$

Dado un $\varepsilon > 0$, los intervalos abiertos $B_k = (a_k - \varepsilon/2m,\ b_k + \varepsilon/2m)$ constituyen un recubrimiento de Lebesgue de S para el cual

$$\sum_{k=1}^{m} L(B_k) = \bar{J}(P, S) + \varepsilon.$$

Luego, $\overline{m}(S) \leq \bar{J}(P, S) + \varepsilon$, o $\overline{m}(S) - \varepsilon \leq \bar{J}(P, S)$ para todo P. Así pues $\overline{m}(S) - \varepsilon \leq \bar{c}(S)$ y, puesto que ε es arbitrario, $\overline{m}(S) \leq \bar{c}(S)$.

9–50 Teorema. *Sean B un conjunto acotado en E_1 y A un subconjunto compacto de B. Entonces $\bar{c}(A) \leq \overline{m}(B)$.*

Demostración. Supongamos que $B \subset [a, b]$ y que está fijado un $\varepsilon > 0$. Existe un recubrimiento de Lebesgue T de B tal que $L(T) \leq \overline{m}(B) + \varepsilon$. Ahora bien, T es un recubrimiento abierto de A, y ya que A es compacto, podemos extraer una colección finita T_1 de intervalos abiertos que recubren A. Los extremos de estos intervalos determinan una partición P de $[a, b]$ para la que se verifica

$$\bar{c}(A) \leq \bar{J}(P, A) \leq L(T_1) \leq L(T) < \overline{m}(B) + \varepsilon.$$

Puesto que ε es arbitrario, esto implica $\bar{c}(A) \leq \overline{m}(B)$.

Combinando los Teoremas 9-49 y 9-50, obtenemos

9–51 Teorema. *Si S es un conjunto compacto en E_1, entonces $\bar{c}(S) = \overline{m}(S)$.*

Es muy fácil demostrar que todos los conjuntos numerables son de medida nula. En realidad, vamos a demostrar un teorema más fuerte:

9–52 Teorema. *Sea F un conjunto numerable de conjuntos en E_1,*

$$F = \{F_1, F_2, \ldots\},$$

tales que $\overline{m}(F_k) = 0$ para cada k. Consideremos

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Es entonces $\overline{m}(S) = 0$.

Demostración. Si fijamos $\varepsilon > 0$, para cada F_k existe entonces un recubrimiento de Lebesgue T_k de F_k tal que $L(T_k) < \varepsilon/2^k$. Como que T_k recubre F_k, el conjunto $T = \{T_1, T_2, \ldots\}$ recubre S. Además, T es un recubrimiento numerable de S y tenemos

$$L(T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L(T_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Esto implica que $\overline{m}(S) = 0$ y el teorema está demostrado.

Puesto que un conjunto que contiene tan sólo un punto tiene medida nula, se deduce que todo subconjunto numerable de E_1 tiene medida nula. En particular, el conjunto de los números racionales tiene medida nula. No obstante, existen conjuntos *no numerables* de medida nula. (Ver Ejercicio 9-32.)

9-25 Una condición necesaria y suficiente de integrabilidad expresada en función de la medida. El próximo teorema describe un útil criterio de Lebesgue para la integrabilidad-Riemann.

9—53 TEOREMA. *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$ y representemos con D el conjunto de las discontinuidades de f en $[a, b]$. Entonces $f \in R$ en $[a, b]$ si D es un conjunto de medida nula y recíprocamente.*

Demostración. Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$ y consideremos $J_\varepsilon = \{x|\omega_f(x) \geq \varepsilon\}$. Según el Teorema 9-47, tenemos $\bar{c}(J_\varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. En particular, esto es válido para $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Ahora bien si $x \in D$, entonces $\omega_f(x) \neq 0$ y por tanto $\omega_f(x) > 1/n$ para *algún* n. Por consiguiente,

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{1/n}.$$

Puesto que $\bar{c}(J_{1/n}) = 0$, tenemos también $\overline{m}(J_{1/n}) = 0$ y, por consiguiente, $\overline{m}(D) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\overline{m}(D) = 0$. Elijamos $\varepsilon > 0$ y construyamos J_ε. El J_ε es un conjunto cerrado, según el Teorema 9-43. También, $J_\varepsilon \subset D$. Luego

$$\bar{c}(J_\varepsilon) \leq \overline{m}(D) = 0$$

y esto demuestra que $c(J_\varepsilon) = 0$. Por consiguiente, $f \in R$ en $[a, b]$.

Las siguientes proposiciones (algunas de las cuales fueron demostradas antes en este capítulo) son consecuencias inmediatas del teorema de Lebesgue.

9—54 TEOREMA.

I) *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, $f \in R$ en $[a, b]$.*

II) *Si $f \in R$ en $[a, b]$, entonces $f \in R$ en $[c, d]$ para todo subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$, $|f| \in R$ y $f^2 \in R$ en $[a, b]$. También, $f \cdot g \in R$ en $[a, b]$, siempre que $g \in R$ en $[a, b]$.*

III) *Si $f \in R$ y $g \in R$ en $[a, b]$, también $f/g \in R$ en $[a, b]$, siempre que g no tome el valor cero.*

IV) *Si f y g son funciones acotadas que tienen las mismas discontinuidades en $[a, b]$, se verifica que $f \in R$ en $[a, b]$ si $g \in R$ en $[a, b]$ y recíprocamente.*

V) *Consideremos $g \in R$ en $[a, b]$ y supongamos que $m \leq g(x) \leq M$ para todo x en $[a, b]$. Si f es continua en $[m, M]$, la función compuesta h definida por $h(x) = f[g(x)]$ es integrable-Riemann en $[a, b]$.*

NOTA. La proposición V) no es necesariamente válida si suponemos únicamente que $f \in R$ en $[m, M]$. (Ver Ejercicio 9-29.)

9-26 Integrales complejas de Riemann-Stieltjes. Las integrales Riemann-Stieltjes de la forma $\int_a^b f\, d\alpha$, en las cuales f y α son funciones complejas de variable real definidas y acotadas en un intervalo $[a, b]$, son de fundamental importancia en la teoría de funciones de una variable compleja. Pueden ser introducidas, exactamente con la misma definición que usábamos en el caso real, pues efectivamente la Definición 9-1 tiene también sentido cuando f y α son complejas de variable real. Las sumas de los productos $f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$ que se utilizaron para formar las sumas de Riemann-Stieltjes deben interpretarse tan sólo como sumas de productos de números complejos. Puesto que los números complejos satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva que son válidas para los números reales, no debe sorprender que las integrales complejas gocen de muchas de las propiedades de las integrales reales. En particular, los Teoremas 9-2, 9-3, 9-4, 9-6 y 9-7 (así como sus demostraciones) son todos válidos (palabra por palabra) cuando f y α son funciones complejas de variable real. (En los Teoremas 9-2 y 9-3, las constantes c_1 y c_2 deben ser ahora números complejos.) Además, tenemos el teorema siguiente que reduce la teoría de las integrales complejas de Stieltjes al caso real.

9—55 TEOREMA. *Sean $f = f_1 + if_2$ y $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ funciones complejas definidas en un intervalo $[a, b]$. Tenemos entonces*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \left(\int_a^b f_1\, d\alpha_1 - \int_a^b f_2\, d\alpha_2\right) + i\left(\int_a^b f_2\, d\alpha_1 + \int_a^b f_1\, d\alpha_2\right)$$

siempre que las cuatro integrales del segundo miembro existan.

La demostración del Teorema 9—55 se deduce inmediatamente a partir de la definición y queda para el lector.

El uso de estos teoremas nos permite extender la mayoría de las propiedades importantes de las integrales reales al caso complejo. Por ejemplo, la conexión entre diferenciación e integración establecida en el Teorema 9-31 subsiste para las integrales complejas si definimos nociones tales como continuidad, diferenciabilidad, variación acotada, etc., por medio de los componentes. Así, decimos que la función compleja de variable real $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ es de variación acotada en $[a, b]$ si cada componente α_1 y α_2 es de variación acotada en $[a, b]$. Análogamente, la derivada $\alpha'(t)$ se define mediante la igualdad $\alpha'(t) = \alpha_1'(t) + i\alpha_2'(t)$ siempre que existan las derivadas $\alpha_1'(t)$ y $\alpha'_2(t)$. (Por el mismo procedimiento se definen las derivadas laterales.) Es fácil comprobar que todas las reglas usuales para el cálculo con derivadas (por ejemplo, la regla de la cadena) subsisten para las funciones complejas de este tipo. Dando esto por sentado, los Teoremas 9-31 y 9-32 (el teorema fundamental del cálculo integral), subsisten cuando f y α son complejas de variable real. Las demostraciones se obtienen a partir del caso real utilizando el Teorema 9-55 en forma directa.

9-27 Integrales de contorno. En el estudio de las funciones de una variable compleja, se presentan las integrales complejas de Riemann-Stieltjes en conexión con la teoría de las *integrales de contorno* (también llamadas *integrales curvilíneas complejas*). Estas pueden definirse como sigue:

9—56 DEFINICIÓN. *Sea* Γ *una curva en* E_2 *descrita mediante una función compleja z,*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad si\ a \le t \le b,$$

donde x e y son funciones reales continuas definidas en $[a, b]$. *Representemos con* $\Gamma[z]$ *el correspondiente camino a lo largo de* Γ. *(Ver Definición 8-22.) Si F es una función compleja definida en* Γ, *la integral de contorno de F a lo largo de* $\Gamma[z]$, *que se escribe* $\int_{\Gamma[z]} F(z)dz$, *está definida por*

$$\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz = \int_a^b F[z(t)]\, dz(t),$$

siempre que exista la integral compleja de Riemann-Stieltjes del segundo miembro.

NOTA. Si $A = z(a)$ y $B = z(b)$, también escribimos $\int_{\Gamma(A,\,B)}$ en lugar de $\int_{\Gamma[z]}$.

El efecto de sustituir la función z por una función equivalente se reduce, en el caso más desfavorable, a un cambio de signo, como se indica a continuación.

9—57 TEOREMA. *Sean z y w dos funciones continuas equivalentes que describen la misma curva Γ en E_2. Si existe $\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz$, también existe entonces $\int_{\Gamma[w]} F(w)\, dw$ y tenemos*

$$\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz = \pm \int_{\Gamma[w]} F(w)\, dw,$$

donde se toma el signo más si $\Gamma[w] = \Gamma[z]$ o el signo menos si $\Gamma[w] = -\Gamma[z]$.

La demostración de este teorema se deduce fácilmente de la fórmula para el cambio de variable en una integral de Riemann-Stieltjes (Teorema 9-7). Los detalles quedan para el lector. (Ver Ejercicio 9-35.)

Las integrales de contorno gozan de una propiedad aditiva análoga al Teorema 9-4. Antes de establecer esta propiedad, definiremos la «adición» de caminos.

9—58 DEFINICIÓN. *Sea Γ una curva en E_n descrita por una función vectorial $\boldsymbol{\alpha}$ definida en $[a, b]$, y sean Γ_1 y Γ_2 las imágenes de los subintervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, originadas por $\boldsymbol{\alpha}$, siendo $a < c < b$. Escribimos $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ y nos referimos a Γ como suma de Γ_1 y Γ_2. Análogamente, decimos que el camino $\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]$ es la suma de los caminos $\Gamma_1[\boldsymbol{\alpha}]$ y $\Gamma_2[\boldsymbol{\alpha}]$ y escribimos $\Gamma[\boldsymbol{\alpha}] = \Gamma_1[\boldsymbol{\alpha}] + \Gamma_2[\boldsymbol{\alpha}]$.*

NOTA. Esta adición se define únicamente cuando los extremos están unidos en forma adecuada. La suma es asociativa pero no conmutativa.

Utilizando este concepto, vemos que el Teorema 9-4 implica el siguiente:

9—59 TEOREMA. *Sea Γ una curva en E_2 descrita por una función compleja z continua y supongamos $\Gamma[z] = \Gamma_1[z] + \Gamma_2[z]$. Si dos de las tres integrales de contorno de 2) existen, también existe la tercera y tenemos*

3) $$\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz = \int_{\Gamma_1[z]} F(z)\, dz + \int_{\Gamma_2[z]} F(z)\, dz.$$

En la práctica, casi todas las curvas utilizadas como caminos de integración son curvas *rectificables*. Para tales curvas es con frecuencia útil el siguiente teorema para calcular aproximadamente el valor absoluto de una integral de contorno.

9—60 TEOREMA. *Si Γ es una curva rectificable de longitud $\Lambda(\Gamma)$ descrita por una función compleja continua z, y si existe $\int_{\Gamma[z]} F(z)\,dz$, tenemos la desigualdad*

$$\left|\int_{\Gamma[z]} F(z)\,dz\right| \leq M\Lambda(\Gamma),$$

donde M es tal que $|F(z)| \leq M$ para todo z en Γ.

Demostración. Observemos tan sólo que todas las sumas de Riemann-Stieltjes que se presentan en la definición de $\int_a^b F[z(t)]\,dz(t)$ tienen valor absoluto no superior a $M\Lambda(\Gamma)$.

NOTA. Si Γ es una curva rectificable, una condición suficiente para la existencia de la integral de contorno $\int_{\Gamma[z]} F(z)\,dz$ es que F sea continua en Γ. Esto resulta directamente de los Teoremas 9-26 y 9-55.

Una clase importante de curvas rectificables son las conocidas por el nombre de curvas *regulares a trozos*. Se definen como sigue:

9—61 DEFINICIÓN. *Una curva Γ en E_n se llama regular a trozos si puede ser descrita por una función vectorial $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, definida y continua en $[a, b]$, tal que cada componente α_k tiene una derivada acotada α_k' que es continua en todo el intervalo $[a, b]$, excepto (a lo más) en un número finito de puntos. En estos puntos excepcionales se exige que existan las derivadas a la derecha y a la izquierda. En tales casos también la función $\boldsymbol{\alpha}$ se llama regular a trozos.*

NOTA. Según los Teoremas 8-25 y 8-6, se deduce que toda curva regular a trozos es rectificable.

Si Γ es una curva plana descrita por una función compleja z, siendo $z(t) = x(t) + iy(t)$, entonces en aquellos puntos t de $[a, b]$ en los que exista la derivada $z'(t)$ y sea distinta de 0, la curva Γ poseerá una tangente en $z(t)$ con pendiente $y'(t)/x'(t)$. En los puntos donde $z'(t) = 0$, debe ser $x'(t) = y'(t) = 0$. (En tales puntos, llamados *puntos singulares* de Γ, puede o no existir tangente.) Naturalmente, en los puntos donde $z'(t)$ no existe, no hay tangente. Una curva plana regular a trozos poseerá tangente en todos los puntos salvo en un número finito de ellos. (Ver Fig. 9-3.)


Fig. 9-3. Curva regular a trozos en E_2.

Las integrales de contorno tomadas sobre curvas regulares a trozos pueden expresarse por medio de integrales de Riemann. En efecto, tenemos

9—62 TEOREMA. *Sea Γ una curva descrita en E_2 por una función regular a trozos z definida en $[a, b]$ y supongamos que la integral de contorno de F a lo largo de $\Gamma[z]$ exista. Tenemos entonces*

$$\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz = \int_a^b F[z(t)]z'(t)\, dt.$$

La demostración es consecuencia inmediata de los Teoremas 9-55 y 9-8. Los detalles se dejan al lector.

Las curvas poligonales son ejemplos de curvas regulares a trozos. Por eso toda curva *rectificable* Γ puede aproximarse por curvas regulares a trozos, como son, los polígonos inscritos que se utilizan para encontrar la longitud de Γ. (Ver la Definición 8-24.) La integral curvilínea de una función continua F tomada a lo largo de uno de esos polígonos servirá como aproximación de la integral curvilínea de F a lo largo de Γ. El próximo teorema establece con precisión este hecho.

9—63 TEOREMA. *Sea Γ una curva rectificable descrita por una función compleja z definida en un intervalo $[a, b]$. Supongamos F definida y continua en una región abierta S que contiene a Γ. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existen una partición P de $[a, b]$ y un polígono inscrito correspondiente $\pi = \pi(P) \subset S$ tales que*

$$\left| \int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz - \int_{\pi[w]} F(w)\, dw \right| < \varepsilon.$$

Demostración. Razonando como en la demostración del Teorema 8-33, podemos encontrar *un* radio $r > 0$ tal que para todo punto z en Γ sea $N(z; r) \subset S$. Designemos por T la reunión de todas las esferas cerradas $\bar{N}(z; r/2)$, donde $z \in \Gamma$. Este conjunto T es un subconjunto compacto de S y, por tanto, F es uniformemente continua en T. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, $0 < \delta < r/2$, tal que

$$|F(z) - F(z')| < \frac{\varepsilon}{2\Lambda(\Gamma)}, \quad \text{si } z \in T,\ z' \in T, \quad \text{y} \quad |z - z'| < \delta,$$

donde $\Lambda(\Gamma)$ es la longitud de Γ. Para este δ podemos elegir un δ_1 de modo que

$$|z(t) - z(t')| < \delta$$

siempre que t y t' sean puntos de $[a, b]$ con $|t - t'| < \delta_1$. Para el mismo ε considerado, elijamos una partición P_ε de $[a, b]$ tal que

4) $$\left| \int_a^b F[z(t)]\, dz(t) - S(P_\varepsilon, Fz, z) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde $S(P_\varepsilon, Fz, z)$ es una correspondiente suma de Riemann-Stieltjes. Podemos suponer que la norma de P_ε es $< \delta_1$. Si $P_\varepsilon = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, el correspondiente polígono inscrito $\pi = \pi(P_\varepsilon)$ está situado en T. La integral de F a lo largo de π existe y podemos escribir

$$\int_{\pi[w]} F(w)\, dw = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F[w(t)]\, dw(t),$$

donde w designa la función que describe π. Podemos suponer que se elige w de modo que $w(t_k) = z(t_k)$ para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Tenemos entonces $z(t_k) - z(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} dw(t)$, y podemos escribir la suma Riemann-Stieltjes $S(P_\varepsilon, Fz, z)$ como sigue:

$$S(P_\varepsilon, Fz, z) = \sum_{k=1}^{m} F[z(v_k)][z(t_k) - z(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^{m} F[z(v_k)] \int_{t_{k-1}}^{t_k} dw(t)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F[z(v_k)]\, dw(t),$$

donde $v_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Por lo tanto,

$$\left| \int_{\pi[w]} F(w)\, dw - S(P_\varepsilon, Fz, z) \right|$$
$$= \left| \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{F[w(t)] - F[z(v_k)]\}\, dw(t) \right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{F[w(t)] - F[z(v_k)]\}\, dw(t) \right|.$$

Según el Teorema 9—60, la última integral tiene un valor absoluto no superior a

$$\frac{\varepsilon}{2\Lambda(\Gamma)} |z(t_k) - z(t_{k-1})|$$

y, por tanto

$$\left| \int_{\pi[w]} F(w)\, dw - S(P_\varepsilon, Fz, z) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2V(\Gamma)} |z(t_k) - z(t_{k-1})|$$
$$= \frac{\varepsilon |\pi(P_\varepsilon)|}{2\Lambda(\Gamma)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si combinamos ésta con 4), deducimos el teorema. •

9-28 El número de giros. Si Γ es una curva rectificable cerrada y z_0 es un punto no perteneciente a Γ, la integral de contorno

$$\int_{\Gamma[z]} \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

existe siempre (puesto que el integrando es una función continua en Γ). Esta integral es de capital importancia en la teoría de funciones de una variable compleja. Puede emplearse para introducir un concepto sumamente útil conocido con el nombre de *número de giros.*

9—64 DEFINICIÓN. *Si Γ es una curva rectificable cerrada descrita por una función compleja z, y z_0 es un punto no perteneciente a Γ, definimos $W(\Gamma[z]; z_0)$, el número de giros del camino $\Gamma[z]$ con respecto a z_0, mediante la fórmula*

$$W(\Gamma[z]; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

NOTA. Algunas veces, en lugar de «el número de giros» se usa la palabra «índice».

Las relaciones

$$W(-\Gamma[z]; z_0) = -W(\Gamma[z]; z_0)$$

y

$$W(\Gamma_1[z] + \Gamma_2[z]; z_0) = W(\Gamma_1[z]; z_0) + W(\Gamma_2[z]; z_0)$$

se deducen de manera inmediata de los Teoremas 9-57 y 9-59, respectivamente.

El uso de la denominación de número de giros es debido a que el valor de esta integral es un *entero* que puede usarse para dar una manera matemáticamente precisa de contar el número de veces que el camino $\Gamma[z]$ «gira alrededor» del punto z_0. Por ejemplo, calculemos esta integral cuando $\Gamma[z]$ es un círculo orientado positivamente con centro en z_0. (Ver la Definición 8-23.)

9—65 TEOREMA. *Si $\Gamma[z]$ es un círculo orientado positivamente con centro en z_0, el número de giros $W(\Gamma[z]; z_0) = 1$.*

Demostración. En este caso, Γ puede representarse mediante la ecuación

$$z(t) = z_0 + re^{2\pi i t} = z_0 + r\cos(2\pi t) + ir\,\mathrm{sen}\,(2\pi t), \qquad \text{si } 0 \le t \le 1.$$

Puesto que $z'(t) = -2\pi r\,\mathrm{sen}\,(2\pi t) + 2\pi i r\cos(2\pi t) = 2\pi i r e^{2\pi i t}$, podemos calcular la integral del número de giros utilizando el Teorema 9-62 y obtener

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i r}\int_0^1 e^{-2\pi i t} z'(t)\, dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Esto demuestra el teorema.

Observemos que el valor $+1$ obtenido en este caso está de acuerdo con la interpretación física de $\Gamma[z]$ como el camino descrito por una partícula móvil recorriendo *una vez* el círculo en la dirección positiva. Si la partícula se mueve n veces alrededor del círculo en la dirección positiva, el intervalo paramétrico es $0 \leq t \leq n$ y un cálculo similar al anterior demuestra que el número de giros es n. Por otra parte, si la partícula se mueve n veces alrededor del círculo en la dirección *negativa*, el número de giros tiene el valor $-n$.

El ejemplo que hemos citado de un círculo es un caso particular del siguiente teorema más general:

9—66 Teorema. *Si Γ es una curva rectificable cerrada, el número de giros*

$$W(\Gamma[z]; z_0)$$

es siempre un número entero.

Demostración. En virtud del Teorema 9-63, es suficiente demostrar el teorema para curvas regulares a trozos. Si Γ está descrita por una función regular a trozos z definida en $[a, b]$, la integral del número de giros puede expresarse como una integral de Riemann, según el Teorema 9-62. Definimos entonces una función compleja F por la ecuación

$$F(x) = \int_a^x \frac{z'(t)}{z(t) - z_0}\, dt, \qquad \text{si } a \leq x \leq b,$$

donde $z_0 \notin \Gamma$. Para demostrar el teorema, es preciso probar que $F(b) = 2n\pi i$, donde n es un entero. A tal fin observemos que F es continua en $[a, b]$ y que (según el Teorema 9-31) tenemos

$$F'(x) = \frac{z'(x)}{z(x) - z_0}$$

en cada punto de continuidad de z'. Seguidamente, introducimos G por la igualdad:

$$G(t) = e^{-F(t)}[z(t) - z_0] \qquad \text{si } t \in [a, b].$$

Esta función G es también continua en todo $[a, b]$. Además, en cada punto t de $[a, b]$ donde z' es continua tenemos

$$G'(t) = e^{-F(t)}z'(t) - F'(t)e^{-F(t)}[z(t) - z_0] = 0.$$

Esto es, $G'(t) = 0$ para cada t en $[a, b]$, excepto (a lo sumo) para un número finito de puntos. En cada subintervalo (t_{k-1}, t_k) en el que z' es continua, podemos aplicar el Teorema 9-32 para escribir

$$G(x) - G(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{x} G'(t)\, dt = 0.$$

De esto se deduce que G es constante en cada subintervalo (t_{k-1}, t_k) y por tanto (por la continuidad) G es constante en todo $[a, b]$. Esto es, $G(t) = G(a)$ para todo t en $[a, b]$. Por consiguiente, la igualdad

$$e^{-F(t)}[z(t) - z_0] = z(a) - z_0$$

es válida para cada t en $[a, b]$. Si ponemos $t = b$ y tenemos en cuenta que $z(b) = z(a)$, encontramos

$$e^{-F(b)} = 1,$$

lo cual implica $F(b) = 2n\pi i$, donde n es un entero. Esto completa la demostración.

9–67 Teorema. *Sea Γ una curva de Jordan rectificable en E_2 descrita por una función continua z definida en $[a, b]$. El número de giros es entonces $W(\Gamma[z]; z_0) = 0$ para cada punto z_0 exterior a Γ.*

Demostración. Definamos una función G en $E_2 - \Gamma$ mediante la igualdad

$$G(z_0) = W(\Gamma[z]; z_0) \quad \text{si } z_0 \in E_2 - \Gamma.$$

Por medio de un razonamiento parecido al empleado en la demostración del Teorema 9-35, es fácil ver que G es continua en $E_2 - \Gamma$. Pero, puesto que $G(z_0)$ es siempre un *entero*, se deduce del Teorema 8-37 (el teorema del valor intermedio) que G es constante en cada componente de $E_2 - \Gamma$ y, en particular, G es constante en el componente no acotado de $E_2 - \Gamma$. No es difícil demostrar que G es idénticamente nula en este componente. En efecto, sea K una constante tal que $|z(t)| < K$ para todo t en $[a, b]$ y sea z_1 un punto en el componente no acotado de $E_2 - \Gamma$ tal que $|z_1| > K + \Lambda(\Gamma)$ donde $\Lambda(\Gamma)$ es la longitud de Γ. Tenemos entonces

$$\left|\frac{1}{z(t) - z_1}\right| \le \frac{1}{|z_1| - |z(t)|} < \frac{1}{|z_1| - K}$$

y por tanto, según el Teorema 9-60, podemos escribir

$$0 \le |G(z_1)| \le \frac{\Lambda(\Gamma)}{|z_1| - K} < 1.$$

Puesto que $G(z_1)$ es un entero, se deduce que $G(z_1) = 0$ y esto demuestra que G tiene el valor constante 0 en todo el componente no acotado de $E_2 - \Gamma$.

Hemos visto ya que si $\Gamma[z]$ es un círculo orientado con centro en z_0, el número de giros $W(\Gamma[z]; z_0)$ es ± 1. La conclusión es análoga para toda curva de Jordan rectificable en E_2.

9—68 **Teorema.** *Sea Γ una curva de Jordan rectificable en E_2 descrita por una función continua z. El número de giros es $+1$ o -1 para todo punto z_0 interior a Γ.*

Demostración. Hemos observado en la demostración del Teorema 9-67 que el número de giros debe ser constante en la región interna de Γ, y, por consiguiente, tan sólo necesitamos demostrar que es ± 1 para un punto interior a Γ. Sea z_0 dicho punto interior a Γ y consideremos un círculo C con centro en z_0 y situado enteramente dentro de Γ. Elijamos dos puntos a y b sobre C y construyamos las curvas de Jordan G_1 y G_2 mencionadas en el Teorema 8-43. En función de los caminos podemos escribir

$$G_1(a, a) = P(a, \alpha) + \Gamma_1(\alpha, \beta) + Q(\beta, b) + C_1(b, a)$$

y

$$G_2(a, a) = P(a, \alpha) + \Gamma_2(\alpha, \beta) + Q(\beta, b) + C_2(b, a),$$

donde $C_1 + C_2 = \overset{\leftarrow}{C}$, $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$, y $\overset{\leftarrow}{P}$ y Q son curvas poligonales (utilizando la notación del Teorema 8-43). Según el Teorema 8-43, podemos admitir que z_0 es exterior a G_1 y a G_2 y, por lo tanto,

$$\int_{G_1(a,a)} \frac{1}{z - z_0}\, dz - \int_{G_2(a,a)} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 0,$$

ya que cada integral por separado es 0. Pero esto significa que tenemos

5) $$\int_{P(a,\alpha)} + \int_{\Gamma_1(\alpha,\beta)} + \int_{Q(\beta,b)} + \int_{C_1(b,a)} + \int_{C_2(a,b)} + \int_{Q(b,\beta)} + \int_{\Gamma_2(\beta,\alpha)} + \int_{P(\alpha,a)} = 0.$$

(El integrando en cada caso es $(z - z_0)^{-1}$.) Las integrales sobre las curvas poligonales se cancelan unas con otras y la igualdad 5) se convierte en

6) $$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1(\alpha,\beta)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2(\beta,\alpha)}\right) + \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(b,a)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(a,b)}\right) = 0.$$

La suma de las dos primeras integrales de 6) es $\pm W(\Gamma[z]; z_0)$ y la suma de la tercera y cuarta es ± 1. Luego, $W(\Gamma[z]; z_0)$ es $+1$ o -1 con lo cual queda demostrado el teorema

9-29 Orientación de las curvas rectificables de Jordan. Hemos definido un círculo orientado positivamente (Definición 8-23) especificando explícitamente

la función que describe la curva. Los conceptos de orientaciones positiva y negativa para una curva rectificable de Jordan cualquiera, se introducirá ahora por medio del significado del número de giros.

9—69 DEFINICIÓN. *Sea Γ una curva de Jordan rectificable en E_2 descrita por una función continua z. Decimos que el camino dirigido $\Gamma[z]$ está orientado positivamente si el número de giros $W(\Gamma[z];\ z_0)$ es $+1$ para cada z_0 dentro de Γ, y orientado negativamente si $W(\Gamma[z];\ z_0)$ es -1 para cada z_0 dentro de Γ.*

Se dice que los caminos orientados positivamente tienen una *dirección contraria a la de las agujas del reloj*, mientras que los caminos orientados negativamente tiene la *dirección de las agujas del reloj*. Para representar geométricamente un camino de orientación positiva utilizamos un esquema como el que se muestra en la Fig. 9-4. Si se recorre la curva Γ en la dirección indicada por las flechas (contraria a las agujas del reloj), la región interna de Γ siempre queda a la izquierda.



Fig. 9-4. Representación geométrica de una curva de Jordan orientada positivamente.

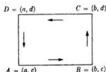


Fig. 9-5. Representación geométrica de $\Gamma(R)$.

9—70 DEFINICIÓN. *Sean $A = (a,\ c)$, $B = (b,\ c)$, $C(b,\ d)$, $D = (a,\ d)$ los vértices de un rectángulo R dado en el plano xy por*

$$R = \{(x,\ y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$

Los cuatro segmentos que constituyen la frontera de R determinan cuatro caminos dirigidos $\Gamma_1(A,\ B)$, $\Gamma_2(B,\ C)$, $\Gamma_3(C,\ D)$ y $\Gamma_4(D,\ A)$ cuya suma es un camino dirigido cerrado que representamos por $\Gamma(R)$:

$$\Gamma(R) = \Gamma_1(A,\ B) + \Gamma_2(B,\ C) + \Gamma_3(C,\ D) + \Gamma_4(D,\ A).$$

NOTA. $\Gamma(R)$ está representado en la Fig. 9-5.

9—71 TEOREMA. *Sea z_0 un punto interior a un rectángulo R en E_2. El número de giros de $\Gamma(R)$ con respecto a z_0 es $+1$, y, por tanto, $\Gamma(R)$ está orientado positivamente.*

Demostración. Basta considerar el caso en que Z_0 es el centro del rectángulo. Sea C un círculo de centro en Z_0 y situado enteramente en el interior de R, podemos aplicar el método seguido para demostrar el Teorema 9-68, considerando como poligonales P y Q los segmentos rectilíneos que pasan por los puntos medios de los lados AD y BC respectivamente. La igualdad (6) es entonces válida, siendo igual a -1 la suma de la tercera y cuarta integrales. Puesto que la suma de las dos primeras es $W(\Gamma(R); Z_0)$, queda demostrado que el número de giros es $+1$, como se afirmó.

9-30 Otros teoremas relativos a la medida exterior de Lebesgue. Terminamos este capítulo añadiendo ciertos resultados sobre la medida exterior de Lebesgue. Uno de estos (Teorema 9-74) será luego utilizado en la demostración del Teorema 13-17.

9-72 TEOREMA. *Para todos los conjuntos A y B de E_1 tenemos $\overline{m}(A \cup B) \leq \overline{m}(A) + \overline{m}(B)$.*

Demostración. Si uno u otro de los números $\overline{m}(A)$ o $\overline{m}(B)$ es $+\infty$, la desigualdad es trivial. Supongamos, pues, que ambos sean finitos. Dado un $\varepsilon > 0$, existen entonces unos recubrimientos de Lebesgue T_1 y T_2 de A y B, respectivamente, tales que $L(T_1) < \overline{m}(A) + \varepsilon$ y $L(T_2) < \overline{m}(B) + \varepsilon$. Los intervalos de T_1 en unión de los de T_2 constituyen un recubrimiento de Lebesgue T de $A \cup B$ tal que $L(T) = L(T_1) + L(T_2) \leq \overline{m}(A) + \overline{m}(B) + 2\varepsilon$. Luego $\overline{m}(A \cup B) \leq \overline{m}(A) + \overline{m}(B) + 2\varepsilon$, y ya que esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ debe verificarse $\overline{m}(A \cup B) \leq \overline{m}(A) + \overline{m}(B)$.

NOTA. Por inducción tenemos $\overline{m}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \overline{m}(A_k)$ y por tanto $\overline{m}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}(A_k)$.

9-73 TEOREMA. *Sea T un conjunto abierto acotado en E_1. Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado A, que es reunión de un número finito de intervalos compactos, tal que $A \subset T$ y que $\overline{m}(T - A) < \varepsilon$.*

Demostración. Según el Teorema 3-10 podemos expresar T como reunión de un conjunto numerable de intervalos abiertos disjuntos, $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Para el ε dado, elijamos n de modo que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{m}(I_k) < \varepsilon/2$. Si $1 \leq k \leq n$, sea A_k un subintervalo cerrado de I_k tal que $\overline{m}(I_k - A_k) < \varepsilon/2^{k+1}$ y $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. De este modo A es un conjunto cerrado y

$$T - A = \bigcup_{k=1}^{n} (I_k - A_k) \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} I_k.$$

Luego $\overline{m}(T - A) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{m}(I_k) < \varepsilon.$

9-74 TEOREMA. *Dados un* $\varepsilon > 0$ *y una sucesión* $\{T_n\}$ *de conjuntos abiertos tales que* $T_{n+1} \subset T_n$ *y que* $\overline{m}(T_n) > \varepsilon$ *para cada* n. *El conjunto* $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ *es no vacío.*

Demostración. La idea de la demostración es la de construir una sucesión de conjuntos *cerrados* no vacíos $\{A_n\}$ que para cada n cumplan $A_{n+1} \subset A_n$ y $A_n \subset T_n$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es no vacío (según el Teorema 3-37) y lo mismo puede decirse de $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$. Construimos $\{A_n\}$ como sigue:

Según el Teorema 9-73 existe un conjunto cerrado A_1 (reunión de un número finito de intervalos compactos) tal que $A_1 \subset T_1$ y $\overline{m}(T_1 - A_1) = \overline{m}(T_1 - A_1^\circ) \subset \varepsilon/2$, donde A_1° representa el interior de A_1. Puesto que $T_n - A_0^1 \subset T_1 - A_1^\circ$, también tenemos $\overline{m}(T_n - A_1^\circ) \leq \overline{m}(T_1 - A_1^\circ) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq 1$. Utilizando el Teorema 9-72, obtenemos $\overline{m}(T_n \cap A_1^\circ) + \overline{m}(T_n - A_1^\circ) \geq \overline{m}(T_n)$ y por lo tanto $\overline{m}(T_n \cap A_1^\circ) > \varepsilon/2$. El conjunto $T_n \cap A_1^\circ$ es abierto y $T_{n+1} \cap A_1^\circ \subset A_1^\circ$. Repitiendo el razonamiento seguido reemplazando $\{T_n\}$ por $\{S_n\}$, siendo $S_n = T_{n+1} \cap A_1^\circ$, encontramos un conjunto cerrado A_2 (reunión de un número finito de intervalos compactos) tal que $A_2 \subset S_2 \subset T_2$, verificándose que $\overline{m}(S_2 - A_2^\circ) < \varepsilon/4$ y $\overline{m}(S_n \cap A_2^\circ) > \varepsilon/4$. En particular, esto implica que A_2 es no vacío. Prosiguiendo de esta manera, conseguimos una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos $\{A_n\}$ que satisfacen $A_n \subset T_n$ y $A_{n+1} \subset A_n$, como deseábamos y esto completa la demostración.

EJERCICIOS

Integrales de Riemann-Stieltjes.

9-1. Demostrar que $\int_a^b d\,\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$, directamente a partir de la Definición 9-1.

9-2. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y si $\int_a^b f\, d\alpha = 0$ para toda f que sea monótona en $[a, b]$, demostrar que α debe ser constante en $[a, b]$.

9-3. En los libros es frecuente ver la siguiente definición de integral de Riemann-Stieltjes: Decimos que f es integrable con respecto a α si existe un número real A que tiene la propiedad de que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición P de $[a, b]$ de norma $|P| < \delta$ y todo t_k de $[x_{k-1}, x_k]$, tenemos $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

9-4. Si $f \in R$ de acuerdo con la Definición 9-1, demostrar que $\int_a^b f(x)\, dx$ también existe de acuerdo con la Definición del Ejercicio 9-3. [*Indicación:* Sean $I = \int_a^b f(x)\, dx$ y $M = \sup \{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$. Dado $\varepsilon > 0$, elegir P_ε de manera que $U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon/2$ (notación de la Sección 9-9). Sean N el número de puntos de división de P_ε y $\delta = \varepsilon/(2\,M\,N)$. Si $|P| < \delta$, poner $U(P, f) = \sum M_k(f)\, \Delta x_k = S_1 + S_2$, donde S_1 es la suma de los términos procedentes de los subintérvalos de P que no contienen puntos de P_ε y S_2 es la suma de los términos restantes. Entonces $S_1 \leq U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon/2$ y $S_2 \leq N\,M\,|P| < N\,M\,\delta = \varepsilon/2$, y por lo tanto $U(P, f) < I + \varepsilon$. Análogamente, $L(P, f) > I - \varepsilon$ si $|P| < \delta'$ para un cierto δ'. Por consiguiente $|S(P, f) - I| < \varepsilon$ si $|P| < \min(\delta, \delta')$.]

9-5. Si $s \neq 1$, utilizar la integración de Stieltjes para deducir las identidades a) y b):

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}}\,dx.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^s} = s\int_1^{2n} \frac{2[x/2]-[x]}{x^{s+1}}\,dx.$

c) Establecer y demostrar un teorema (análogo al Teorema 9-13) que origine la identidad b) como caso particular.

9-6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Para $x \geq 0$, definamos

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{[x]} a_n,$$

donde $[x]$ es el mayor entero contenido en x y las sumas sin términos se interpretan como nulas. Supongamos que f posee derivada continua en el intervalo $1 \leq x \leq a$. Utilizar las integrales de Stieltjes para deducir las fórmulas siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n \leq a} a_n f(n) = -\int_1^a A(x)f'(x)\,dx + A(a)f(a).$

b) $\displaystyle\sum_{n \leq a} a_n f(n) = \sum_{n \leq a} A(n)(f(n) - f(n+1)) + A([a])f([a]+1).$

NOTA. Cuando a es un entero, b) se llama *fórmula de sumación parcial de Abel.*

9-7. Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, demostrar que tenemos

a) $\displaystyle\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^c} f\,d\alpha + \overline{\int_c^b} f\,d\alpha, \qquad (a < c < b),$

b) $\displaystyle\overline{\int_a^b} (f+g)\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha + \overline{\int_a^b} g\,d\alpha,$

c) $\displaystyle\underline{\int_a^b} (f+g)\,d\alpha \geq \underline{\int_a^b} f\,d\alpha + \underline{\int_a^b} g\,d\alpha.$

9-8. Completar la demostración del Teorema 9-22.

9-9. Dar un ejemplo de una función acotada f y una función creciente α definida en $[a, b]$ tal que $|f| \in R(\alpha)$ pero en cambio no exista $\int_a^b f\,d\alpha$.

9-10. Sea α una función continua, y de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y definamos $\beta(x) = \int_a^x g(t)\,d\alpha(t)$ si $x \in [a, b]$. Demostrar que:

a) Si $f \nearrow$ en $[a, b]$, existe un punto x_0 en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f\,d\beta = f(a)\int_a^{x_0} g\,d\alpha + f(b)\int_{x_0}^b g\,d\alpha.$$

b) Si, además, f es continua en $[a, b]$, también tenemos

$$\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x) = f(a)\int_a^{x_0} g\,d\alpha + f(b)\int_{x_0}^b g\,d\alpha.$$

9-11. Supongamos $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, siendo α de variación acotada en $[a, b]$. Designemos por $V(x)$ la variación total de α en $[a, x]$ para cada x en $(a, b]$, y consideremos $V(a) = 0$. Demostrar que

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\,dV \leq MV(b),$$

donde M es una cota superior de $|f|$ en $[a, b]$. En particular, cuando $\alpha(x) = x$, la desigualdad se convierte en

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b - a).$$

9-12. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de funciones de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos existe una función α definida en $[a, b]$ tal que la variación total de $\alpha - \alpha_n$ en $[a, b]$ tienda a 0 cuando $n \to \infty$. Supongamos asimismo que $\alpha(a) = \alpha_n(a) = 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Si f es continua en $[a, b]$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

9-13. Si $f \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$, $f^2 \in R(\alpha)$, y $g^2 \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, demostrar que

$$\frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y)\end{vmatrix}^2 d\alpha(y)\right] d\alpha(x)$$

$$= \left(\int_a^b f(x)^2\,d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,d\alpha(x)\right) - \left(\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x)\right)^2.$$

Cuando $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x)\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,d\alpha(x)\right).$$

(Compárese con el Ejercicio 1-15.)

9-14. Supongamos que $f \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$ y $f \cdot g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Demostrar que

$$\frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))\,d\alpha(y)\right] d\alpha(x)$$

$$= (\alpha(b) - \alpha(a))\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x) - \left(\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)\,d\alpha(x)\right).$$

Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, deducir la desigualdad

$$\left(\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)\,d\alpha(x)\right) \leq (\alpha(b) - \alpha(a))\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x)$$

cuando f y g son ambas crecientes (o ambas decrecientes) en $[a, b]$. Demostrar que se verifica la desigualdad invertida si f crece y g decrece en $[a, b]$.

Integrales de Riemann.

9-15. Supongamos $f \in R$ en $[a, b]$. Utilizar el ejercicio 9-4 para demostrar que el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

existe y que tiene por valor $\int_a^b f(x)\,dx$. Deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{-1/2} = \log\,(1+\sqrt{2}).$$

9-16. Sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una función regular a trozos definida en $[a, b]$. Demostrar que la curva descrita por $\boldsymbol{\alpha}$ tiene por longitud

$$\Lambda_{\boldsymbol{\alpha}}(a, b) = \int_a^b |\boldsymbol{\alpha}'(t)|\,dt,$$

donde $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$.

9-17. Definamos

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt.$$

a) Demostrar que $g'(x) + f'(x) = 0$ para todo x y deducir que $g(x) + f(x) = \pi/4$.

b) Utilizar a) para probar que

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

9-18. Supongamos que $g \in R$ en $[a, b]$ y definamos $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ si $x \in [a, b]$. Demostrar que la integral $\int_a^x |g(t)|dt$ da la variación total de f en $[a, x]$.

9-19. Si $f^{(n+1)}$ es continua en $[a, x]$, definimos

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

a) Demostrar que

$$I_{k-1}(x) - I_k(x) \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Utilizar a) para expresar el resto de la fórmula de Taylor (Teorema 5-14) como una integral.

9-20. Sea f una función continua en $[0, a]$. Si $x \in [0, a]$, definimos $f_0(x) = f(x)$ y consideramos

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

a) Demostrar que existe la derivada n-ésima de f_n y es igual a f.

b) Probar el siguiente teorema de M. Fekete: El número de cambios de signo de f en $[0, a]$ no es menor que el número de cambios de signo del conjunto ordenado de números

$$f(a),\ f_1(a),\ \ldots,\ f_n(a).$$

[*Indicación*: Emplear el método de inducción matemática.]

c) Utilizar b) para demostrar el siguiente teorema de L. Fejér: El número de cambios de signo de f en $[0, a]$ no es menor que el número de cambios de signo del conjunto ordenado

$$f(a), \quad \int_0^a f(t)\, dt, \quad \int_0^a tf(t)\, dt, \ldots, \quad \int_0^a t^n f(t)\, dt.$$

9-21. Sea f una función continua positiva en $[a, b]$. Designemos por M el máximo valor de f en $[a, b]$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f(x)^n\, dx\right]^{1/n} = M.$$

9-22. Una función f de dos variables reales está definida en cada punto (x, y) del cuadrado unidad $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 2y, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

a) Calcular $\bar{\int}_0^1 f(x, y)dx$ e $\underline{\int}_0^1 f(x, y)dx$ en función de y.

b) Demostrar que $\int_0^1 f(x, y)\, dy$ existe para cada x fijo y calcular $\int_0^t f(x, y)\, dy$ en función de x y t para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$.

c) Consideremos $F(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy$. Demostrar la existencia de $\int_0^1 F(x)\, dx$ y calcular su valor.

9-23. Sea f una función definida en $[0, 1]$ así: $f(0) = 0$; si $2^{-n-1} < x \leq 2^{-n}$, entonces $f(x) = 2^{-n}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Dar dos motivos por los que $\int_0^1 f(x)dx$ existe.

b) Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Demostrar que para $0 < x \leq 1$ tenemos

$$F(x) = xA(x) - \tfrac{1}{3}A(x)^2, \qquad \text{donde} \qquad A(x) = 2^{-[-\log x/\log 2]}$$

siendo $[y]$ la parte entera de y.

9-24. Probar el Teorema 9-41.

Contenido de Jordan.

9-25. Demostrar que si A y B son conjuntos acotados en E_1, se verifica

a) $\bar{c}(A \cup B) + \bar{c}(A \cap B) \leq \bar{c}(A) + \bar{c}(B)$.

b) $\underline{c}(A \cup B) + \underline{c}(A \cap B) \geq \underline{c}(A) + \underline{c}(B)$.

c) Si A y B son medibles-Jordan, demostrar que $A \cup B$ y $A \cap B$ son medibles-Jordan y probar que

$$c(A \cup B) + c(A \cap B) = c(A) + c(B).$$

d) Si A y B son medibles -Jordan y si $A \subset B$, demostrar que $B - A$ es medible-Jordan y que

$$c(B - A) = c(B) - c(A).$$

9-26. Sean A y B dos subconjuntos del intervalo I. Se dice que una partición P de I *separa* A y B si existen subintervalos de P cuya reunión es S de manera que $A \subset S$ pero $B \subset I - S$. Si A y B pueden asi separarse, demostrar que

$$\bar{c}(A \cup B) = \bar{c}(A) + \bar{c}(B).$$

9-27. Si A es un subconjunto del intervalo I, demostrar que

$$\underline{c}(A) = c(I) - \bar{c}(I - A).$$

9-28. Dada una sucesión decreciente de números reales $\{G(n)\}$ tal que $G(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Definimos en $[0, 1]$ una función f expresada por medio de $\{G(n)\}$ del modo siguiente: $f(0) = 1$; si x es irracional, entonces $f(x) = 0$; si x es racional, expresado mediante la fracción irreducible m/n, entonces $f(m/n) = G(n)$. Calcular la oscilación $\omega_f(x)$ en cada x de $[0, 1]$ y demostrar que $f \in R$ en $[0, 1]$.

9-29. Sea f la función definida como en el Ejercicio 9-28 tomando $G(n) = 1/n$. Consideremos $g(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$, $g(0) = 0$. Demostrar que la función compuesta h definida poniendo $h(x) = g[f(x)]$ no es integrable-Riemann en $[0, 1]$, aunque $f \in R$ y $g \in R$ en $[0, 1]$.

9-30. Utilizar el Teorema 9-53 para demostrar el Teorema 9-54.

9-31. Hacer uso del Teorema 9-53 para probar que si $f \in R$ y $g \in R$ en $[a, b]$ siendo $f(x) \geq m > 0$ para todo x de $[a, b]$, entonces la función h definida por

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

es integrable Riemann en $[a, b]$.

9-32. Consideremos $I = [0, 1]$ y sea $A_1 = I - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ el subconjunto de I obtenido suprimiendo aquellos puntos que pertenecen al tercio central abierto de I; esto es, $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Sea A_2 el subconjunto de A_1 obtenido suprimiendo el tercio central abierto de $[0, \frac{1}{3}]$ y el de $[\frac{2}{3}, 1]$. Continuar este proceso y definir $A_3, A_4, \ldots$. El conjunto $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ se llama el *conjunto de Cantor*. Demostrar que:

a) C es un conjunto compacto que tiene contenido de Jordan nulo.

b) $x \in C$ si, y únicamente si, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, donde cada a_n es o 0 o 2.

c) C no es numerable.

d) La función característica de C es integrable Riemann en $[0, 1]$.

Integrales complejas.

9-33. Demostrar el Teorema 9-55.

9-34. Verificar que los Teoremas 9-31 y 9-32 son válidos para f y α complejas.

9-35. Probar el Teorema 9-57 utilizando los Teoremas 9-55 y 9-7.

9-36. Probar el Teorema 9-59 utilizando los Teoremas 9-55 y 9-4.

9-37. Probar el Teorema 9-62 utilizando los Teoremas 9-55 y 9-8.

9-38. Sea Γ una curva plana descrita por una función z regular a trozos definida en $[a, b]$ y admitamos que $\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz$ exista. Sea S una región abierta que contenga Γ, y supongamos que G es una función compleja definida en S tal que $G'(z)$ exista y tenga el valor $G'(z) = F(z)$ para cada punto z de Γ. Demostrar que:

a) $$\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz = \int_{\Gamma[z]} G'(z)\, dz = G(B) - G(A), \text{ si } A = z(a),\ B = z(b).$$

NOTA. En particular, la integral tiene el valor 0 cuando Γ es una curva cerrada. [*Indicación*: Subdividir $[a, b]$ en subintervalos en los que z' sea continua y aplicar los Teoremas 9-62 y 9-32 en cada subintervalo.]

b) $$\int_{\Gamma[z]} z^n\, dz = \left(\frac{B^{n+1} - A^{n+1}}{n+1}\right)$$

si n es un entero, $n \neq 1$.

9-39. Sea f una función continua sobre la curva rectificable Γ de longitud $\Lambda(\Gamma)$, y supongamos $|f(z)| \leq M$ si $z \in \Gamma$. Demostrar que $|\int_\Gamma f(z)\, dz| = M\Lambda(\Gamma)$ únicamente si $|f(z)| = M$ en todo punto de Γ.

[*Indicación*: Si $|f(z_0)| < M$ para algún punto z_0 de Γ, existe un arco Γ_1 de Γ en el que $|f(z)| \leq M - \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$.]

REFERENCIAS CITADAS

9-1. BURKILL, J. C., *The Lebesgue Integral*. Cambridge: University Press, 1951.

9-2. HALMOS, P. R., *Measure Theory*. New York: D. Van Nostrand, 1950.

9-3. KESTELMAN, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford: University Press, 1937.

9-4. MCSHANE, E. J., *Integration*. Princeton: University Press, 1944.

9-5. MUNROE, M. E., *Introduction to Measure and Integration*. Reading: Addison-Wesley, 1953.

9-6. ROGOSINSKI, W. W., *Volume and Integral*. New York: Interscience, 1951.

9-7. RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill. 1953.

CAPÍTULO 10

INTEGRALES MÚLTIPLES E INTEGRALES DE LÍNEA

10-1 Introducción. El concepto de la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$ puede generalizarse reemplazando el intervalo $[a, b]$ por una región n-dimensional en la que está definida y acotada la función f. Las regiones más sencillas de E_n, y más adecuadas para esta generalización son los intervalos n-dimensionales. Por ejemplo, en E_2 tomamos un rectángulo R subdividido en rectángulos R_k y consideramos las sumas de Riemann de la forma $\sum f(x_k, y_k)\, A(R_k)$, donde $(x_k, y_k) \in R_k$ y $A(R_k)$ representa el área de R_k. Esto nos conduce al concepto de integral doble. Análogamente, en E_3 utilizamos paralelepípedos rectangulares subdivididos en paralelepípedos R_k más pequeños y, considerando sumas de la forma $\sum f(x_k, y_k, z_k)\, V(R_k)$, donde $(x_k, y_k, z_k) \in R_k$ y $V(R_k)$ es el volumen de R_k, llegamos al concepto de integral triple. Es fácil la discusión de las integrales múltiples en E_n, con tal de que dispongamos de una adecuada generalización de las nociones de área y volumen. Este «volumen generalizado» se llama *medida* o *contenido* y se define en el párrafo siguiente.

10-2 La medida (o contenido) de conjuntos elementales en E_n. Recordemos que un intervalo n-dimensional abierto $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es el producto cartesiano de n intervalos unidimensionales abiertos (a_k, b_k), donde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. El producto cartesiano de n intervalos cerrados $[a_k, b_k]$ se denomina un intervalo n-dimensional cerrado y se representa por $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. En general, un intervalo n-dimensional I (no necesariamente abierto o cerrado) es un conjunto de la forma

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_k \leq x_k \leq b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\},$$

donde alguno de los signos $\leq$ o todos, pueden reemplazarse por el signo $<$. La *medida* o *contenido* n-dimensional de I, representada por $\mu(I)$, se define como el producto

$$\mu(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Así pues, cuando $n = 2$, $\mu(I)$ es el área de I y, cuando $n = 3$, da el volumen de I. Si $r < n$, un intervalo r-dimensional se considera como un intervalo n-dimensional «degenerado» obtenido al admitir las $n - r$ igualdades $a_k = b_k$. En consecuencia, la medida n-dimensional de un tal intervalo degenerado es cero.

Un conjunto S que sea la reunión de un número finito de intervalos no rampantes dos a dos, se llama *conjunto elemental*. Se dice que dos intervalos (y en general, dos conjuntos de E_n) son «no rampantes», si no tienen puntos interiores comunes. (Pueden tener, sin embargo, puntos frontera comunes.)

Si $S = I_1 \cup \cdots \cup I_r$ es una tal descomposición, asignamos a S la medida

$$\mu(S) = \mu(I_1) + \cdots + \mu(I_r).$$

Cuando S está descompuesto de dos maneras como reunión de intervalos no rampantes, por ejemplo $S = I_1 \cup \cdots \cup I_r$ y $S = J_1 \cup \cdots \cup J_p$, un cálculo sencillo demuestra que debe ser

$$\mu(I_1) + \cdots + \mu(I_r) = \mu(J_1) + \cdots + \mu(J_p).$$

Esto implica que la medida de S es un número completamente determinado por S. Se deduce que para dos conjuntos elementales sin parte común S y T debe verificarse $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$. Esto es, la «función de conjunto» μ es aditiva con respecto a los conjuntos elementales. Esta sencilla propiedad es de importancia fundamental en lo que sigue. Naturalmente, $\mu(S) \geq 0$.

Con estas observaciones previas, estamos en disposición de discutir la integración de Riemann en E_n. La única diferencia esencial entre el caso $n = 1$ y el caso $n > 1$ consiste en que la cantidad $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ que se utilizaba como medida de la longitud del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ tenemos que reemplazarla ahora por la medida $\mu(I_k)$ de un subintervalo n-dimensional. Puesto que el proceso que se sigue es el mismo que en el caso unidimensional, omitiremos gran parte de los detalles en la discusión que sigue. Las demostraciones que no aparecen puede fácilmente aportarlas cualquiera que esté identificado con los métodos desarrollados en el Capítulo 9.

10-3 Integración de Riemann de funciones acotadas definidas en intervalos de E_n.

10-1 DEFINICIÓN. *Sea* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *un intervalo en* E_n, *donde* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. *Si* P_k *es una partición de* $[a_k, b_k]$, *el producto cartesiano*

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n$$

se llama una partición de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. *Si* P_k *divide* $[a_k, b_k]$ *en* m_k *subintervalos unidimensionales, entonces* P *determina una descomposición de* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *como reunión de* $m_1 \cdots m_k$ *intervalos n-dimensionales (llamados subintervalos de* P*). Una partición* P' *de* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *es más fina que* P *si* $P \subset P'$. *El conjunto de todas las particiones posibles de* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *se representará por* $\mathcal{P}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

La Figura 10-1 representa particiones en E_2 y en E_3.

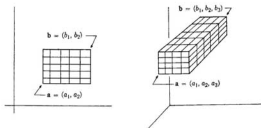


FIG. 10-1. Particiones de intervalos [a, b] en E_2 y en E_3

10—2 DEFINICIÓN. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo cerrado $I \subset E_n$. Si P es una partición de I en m subintervalos $I_1, \ldots, I_m$ y si $\mathbf{t}_k \in I_k$, una suma de la forma*

$$S(P, f) = \sum_{k=1}^{m} f(\mathbf{t}_k)\mu(I_k)$$

se denomina una suma de Riemann. Decimos que f es integrable-Riemann en I y escribimos $f \in R$ en I, siempre que existe un número real A que goza de la siguiente propiedad: Para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de I tal que una partición P más fina que P_ε implica $|S(P, f) - A| < \varepsilon$ para todas las sumas de Riemann $S(P, f)$. Cuando tal número A existe, es único y se representa por

$$\int_I f\, d\mathbf{x}, \qquad \int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad o\ por \qquad \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n).$$

NOTA. Para $n > 1$ la integral se llama *múltiple* o *n-ple*. Cuando $n = 2$ y 3 se usan los nombres de integral *doble* y *triple*. Como en E_1, el símbolo $\mathbf{x}$ en $\int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ es una « variable ficticia » y puede reemplazarse por cualquier otro símbolo conveniente. La notación $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$ también se usa en lugar de $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n)$. Algunas veces las integrales dobles se escriben con dos signos de integral y las triples con tres, así:

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

10—3 DEFINICIÓN. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo cerrado $I \subset E_n$. Si P es una partición de I en m subintervalos $I_1, \ldots, I_m$, consideremos*

$$m_k(f) = \inf \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in I_k\}, \qquad M_k(f) = \sup \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in I_k\}.$$

Los números

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{m} M_k(f)\mu(I_k) \qquad y \qquad L(P, f) = \sum_{k=1}^{m} m_k(f)\mu(I_k)$$

se llaman sumas de Riemann superior e inferior. Las integrales de Riemann superior e inferior de f en I se definen así:

$$\overline{\int_I} f \, d\mathbf{x} = \inf \{U(P, f) \mid P \text{ es una partición de } I\},$$

$$\underline{\int_I} f \, d\mathbf{x} = \sup \{L(P, f) \mid P \text{ es una partición de } I\}.$$

Se dice que la función f satisface la condición de Riemann en I si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de I tal que P más fina que P_ε implica $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

NOTA. Como en el caso unidimensional, las integrales superior e inferior gozan de las propiedades siguientes:

a)
$$\overline{\int_I} (f + g) \, d\mathbf{x} \leq \overline{\int_I} f \, d\mathbf{x} + \overline{\int_I} g \, d\mathbf{x},$$

$$\underline{\int_I} (f + g) \, d\mathbf{x} \geq \underline{\int_I} f \, d\mathbf{x} + \underline{\int_I} g \, d\mathbf{x}.$$

b) Si un intervalo I está descompuesto en una reunión de dos intervalos I_1, I_2 sin parte común, tenemos

$$\overline{\int_I} f \, d\mathbf{x} = \overline{\int_{I_1}} f \, d\mathbf{x} + \overline{\int_{I_2}} f \, d\mathbf{x} \qquad y \qquad \underline{\int_I} f \, d\mathbf{x} = \underline{\int_{I_1}} f \, d\mathbf{x} + \underline{\int_{I_2}} f \, d\mathbf{x}.$$

La demostración del teorema siguiente es esencialmente la misma que la del Teorema 9-19 y será omitida.

10—4 TEOREMA. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo cerrado $I \subset E_n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

I) $f \in R$ *en* I.

II) *f satisface la condición de Riemann en I.*

III) $\underline{\int}_I f d\mathbf{x} = \overline{\int}_I f d\mathbf{x}$.

10-4 Contenido de Jordan de conjuntos acotados en E_n.

10—5 DEFINICIÓN. *Sea S un subconjunto de un intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ en E_n. Para toda partición P de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ definamos $\underline{J}(P, S)$ como la suma de las medidas de aquellos subintervalos de P que únicamente contienen puntos interiores de S y $\overline{J}(P, S)$ como la suma de las medidas de los subintervalos de P que contienen puntos de $S \cup \partial S$. (Recordar las Definiciones 3-24 y 8-38.) Los números*

$$\underline{c}(S) = \sup \{\underline{J}(P, S) \mid P \in \mathcal{P}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\},$$
$$\overline{c}(S) = \inf \{\overline{J}(P, S) \mid P \in \mathcal{P}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}$$

se llaman, respectivamente, el contenido de Jordan interior y exterior (n-dimensional) de S. Se dice que el conjunto S es medible-Jordan si $\underline{c}(S) = \overline{c}(S)$, en cuyo caso este valor común se llama el contenido de Jordan de S, representado por $c(S)$.

NOTA. Es fácil verificar que $\underline{c}(S)$ y $\overline{c}(S)$ dependen tan sólo de S y no del intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ que contiene S. También, $0 \leq \underline{c}(S) \leq \overline{c}(S)$. Para conjuntos finitos tenemos $\underline{c}(S) = \overline{c}(S) = 0$. El contenido exterior de Jordan n-dimensional de un conjunto acotado r-dimensional es cero si $r < n$. Los conjuntos elementales S son medibles-Jordan y $c(S) = \mu(S)$. (Hablando con precisión, deberíamos poner c_n mejor que c para poner de manifiesto que el contenido es n-dimensional, pero no se originan confusiones al omitir esta alusión a n.) Se dice que los conjuntos medibles-Jordan S en E_2 tienen *área* $c(S)$. En este caso, las sumas $\underline{J}(P, S)$ y $\overline{J}(P, S)$ representan aproximaciones del área desde el «interior» y desde el «exterior», respectivamente. Esto está representado en la Fig. 10-2, en la cual los rectángulos sombreados ligeramente están considerados en $\overline{J}(P, S)$, y los rectángulos de sombreado más intenso en $\underline{J}(P, S)$. Para los conjuntos en E_3, $c(S)$ se llama el *volumen* de S.

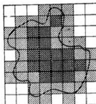


FIG. 10-2. Representación de $\overline{J}(P, S)$ y $\underline{J}(P, S)$ en E_2.

Como en el caso unidimensional, el contenido de Jordan está relacionado con la integración de Riemann por las fórmulas

$$\underline{c}(S) = \underline{\int}_I f_S(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad \overline{c}(S) = \overline{\int}_I f_S(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

si S es un subconjunto de un intervalo I y f_S es la función característica de S.

Vamos a dar ahora una condición necesaria y suficiente para que los conjuntos acotados sean medibles-Jordan.

10—6 TEOREMA. *Sea S un conjunto acotado en E_n y representemos con ∂S su frontera. Tenemos entonces*

$$\bar{c}(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S).$$

Luego, S es medible-Jordan si ∂S tiene contenido nulo, y únicamente en este caso.

Demostración. Sea $I = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ un intervalo cerrado que contiene S. Entonces $\partial S \subset I$ y para toda partición P de I tenemos

$$\bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S).$$

Por consiguiente, $\bar{J}(P, \partial S) \geq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$ y por lo tanto $\bar{c}(\partial S) \geq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$. Para obtener la desigualdad inversa, dado $\varepsilon > 0$, elegimos P_1 de manera que $\bar{J}(P_1, S) < \bar{c}(S) + \varepsilon/2$ y P_2 de modo que $\underline{J}(P_2, S) > \underline{c}(S) - \varepsilon/2$. Consideremos $P = P_1 \cup P_2$. Puesto que un afinamiento de las particiones aumenta las sumas interiores $\underline{J}$ y disminuye las exteriores $\bar{J}$, encontramos.

$$\begin{aligned}\bar{c}(\partial S) \leq \bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S) &\leq \bar{J}(P_1, S) - \underline{J}(P_2, S) \\ &< \bar{c}(S) - \underline{c}(S) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ya que ε es arbitrario, esto significa que $\bar{c}(\partial S) \leq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$. Por lo tanto, $\bar{c}(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$ y la demostración es completa.

Es conveniente, al llegar a este punto, introducir la definición siguiente:

10—7 DEFINICIÓN. *Sea S un conjunto acotado en E_n. El diámetro de S, representado por $d(S)$, se define como el número*

$$d(S) = \sup \{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mid \mathbf{x} \in S, \mathbf{y} \in S\}.$$

NOTA. Si $S \subset T$, entonces $d(S) \leq d(T)$. Si S es un intervalo, por ejemplo

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_k \leq x_k \leq b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

(donde alguno o todos los signos $\leq$ pueden ser $<$), tenemos $d(S) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Si P es una partición de I en m subintérvalos $I_1, \ldots, I_m$, el mayor de los diámetros $d(I_1), \ldots, d(I_m)$ se llama la *norma* de P, y se representa por $|P|$.

En un capítulo posterior daremos un ejemplo de una curva continua en E_2 que pasa por todos los puntos de un rectángulo. Tales curvas (conocidas por el nombre de *curvas que llenan un espacio*) ilustran el hecho de que la imagen

continua de un conjunto de contenido de Jordan bidimensional nulo, puede ser un conjunto de contenido de Jordan bidimensional mayor que cero. Como contraste, el próximo teorema demuestra que esto no puede ocurrir para funciones que satisfacen a una condición uniforme de Lipschitz.

10—8 TEOREMA. *Sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ una función vectorial que satisface una condición uniforme de Lipschitz sobre un conjunto X de E_n. Esto es, supongamos que existen dos números positivos $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que para todo par de puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de X,*

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta \quad \textit{implique} \quad |\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq M|\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

Sea $Y = \mathbf{f}(X)$ la imagen de X en E_p y supongamos que $p \geq n$. Si X tiene contenido de Jordan n-dimensional nulo, entonces Y tiene contenido de Jordan p-dimensional nulo.

NOTA. Es fácil verificar que $\mathbf{f}$ satisfará una condición uniforme de Lipschitz sobre X si cada componente f_k satisface una tal condición sobre X.

Demostración. Incluyamos X en un cubo n-dimensional I, esto es, en un intervalo I que es el producto cartesiano de n intervalos iguales $[a, b]$ (el número $b - a$ se llama *longitud de la arista* de I).

Tomemos un $\varepsilon > 0$ y supongamos que X tiene contenido de Jordan n-dimensional nulo. Consideremos $A = (2M)^p n^{n/2} \delta^{p-n}$. Existe entonces un $\delta_0 > 0$ tal que $J(P, X) < \varepsilon/A$ siempre que P sea una partición de I de norma $|P| < \delta_0$. (Ver ejercicio 10-6.) Podemos también suponer que $\delta_0 \leq \delta$. Puesto que I es un cubo, existe por lo menos una partición P_1 más fina que P_ε cuyos subintervalos son cubos n-dimensionales de igual arista, cuya longitud es $\Delta < \delta_0/\sqrt{n}$. El contenido de cada uno de tales cubos es Δ^n y el diámetro es $\sqrt{n}\,\Delta < \delta_0$. Por consiguiente, $\bar{J}(P_1, X) = q\Delta^n$, donde q representa el número de subintervalos de P_1 que tienen parte común con X. Observemos que $q\,\Delta^n < \varepsilon/A$, ya que $|P_1| < \delta_0$. Si $I_1, \ldots, I_q$ son los subintervalos de P_1 que tienen parte común con X y $\mathbf{x}_k \in I_k \cap X$, entonces para todo $\mathbf{y}$ en $I_k \cap X$ debe ser

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k| \leq \sqrt{n}\,\Delta < \delta,$$

y, por lo tanto

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)| \leq M|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k| \leq M\sqrt{n}\,\Delta.$$

Esto significa que, en E_p, $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ queda contenida dentro de una esfera de radio $M\sqrt{n}\Delta$ alrededor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$. Pero esta esfera está contenida dentro de un cubo p-dimensional de arista $2M\sqrt{n}\,\Delta$ cuyo contenido es $(2M\sqrt{n}\,\Delta)^p$. Por consi-

guiente, la imagen $Y = \mathbf{f}(X)$ es un conjunto acotado cuyo contenido exterior de Jordan p-dimensional no excede a $q(2M\sqrt{n}\Delta)^p$. Pero tenemos

$$q(2M\sqrt{n}\,\Delta)^p = q\,\Delta^n n^{n/2}(2M)^p(\sqrt{n}\,\Delta)^{p-n}$$
$$< q\,\Delta^n n^{n/2}(2M)^p\,\delta^{p-n} = q\,\Delta^n A < \varepsilon.$$

Y puesto que ε es arbitrario, se deduce que Y tiene contenido de Jordan p-dimensional nulo.

Como consecuencia de los dos últimos teoremas, tenemos el siguiente resultado.

10–9 TEOREMA. *Sea $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ una función vectorial continua definida en un conjunto abierto S de E_n. Supongamos que $\mathbf{g}^{-1}$ existe y que es continua en $\mathbf{g}(S)$ y que $\mathbf{g}^{-1}$ satisface una condición uniforme de Lipschitz en un subconjunto compacto X de $\mathbf{g}(S)$. Si X es medible-Jordan, la imagen inversa $\mathbf{g}^{-1}(X)$ es también medible-Jordan.*

Demostración. Si X es medible-Jordan, ∂X tiene contenido cero y, según el Teorema 10-8, $\mathbf{g}^{-1}(\partial X)$ también tiene contenido cero. Si podemos demostrar que $\partial[\mathbf{g}^{-1}(X)] \subset \mathbf{g}^{-1}(\partial X)$ se deducirá que $\partial[\mathbf{g}^{-1}(X)]$ tiene contenido cero y, por lo tanto que $\mathbf{g}^{-1}(X)$ es medible-Jordan, como se desea.

Ahora es fácil probar que $\mathbf{g}(\partial Z) \subset \partial\mathbf{g}(Z)$ para todo subconjunto cerrado Z de S. (Esto requiere tan sólo la continuidad de $\mathbf{g}$ y de $\mathbf{g}^{-1}$, y dejamos la demostración al lector.) Por consiguiente, $\mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\partial Z)] \subset \mathbf{g}^{-1}[\partial\mathbf{g}(Z)]$, lo cual implica que $\partial Z \subset \mathbf{g}^{-1}[\partial\mathbf{g}(Z)]$. Tomando $Z = \mathbf{g}^{-1}(X)$, obtenemos $\partial[\mathbf{g}^{-1}(X)] \subset \mathbf{g}^{-1}(\partial X)$, y esto completa la demostración.

10-5 Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de las integrales múltiples.

10–10 DEFINICIÓN. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo cerrado $I \subset E_n$. Si T es un subconjunto de I, el número*

$$\Omega_f(T) = \sup\,\{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in T,\ \mathbf{y} \in T\}$$

se llama la oscilación de f en T. Si $\mathbf{x} \in I$, la oscilación de f en $\mathbf{x}$ se define como el número

$$\omega_f(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0+} \Omega_f(N(\mathbf{x}; h) \cap I).$$

NOTA. Este límite existe siempre puesto que $\Omega_f(N(\mathbf{x}; h) \cap I)$ es una función monótona de h. En efecto, $T_1 \subset T_2$ implica $\Omega_f(T_1) \leq \Omega_f(T_2)$.

10—11 TEOREMA. *Sea f definida y acotada en el intervalo cerrado $I \subset E_n$. Si $\omega_f(\mathbf{x}) = 0$, f es continua en el punto $\mathbf{x}$ de I y recíprocamente.*

10—12 TEOREMA. *Sea f definida y acotada en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Si, dado un $\varepsilon > 0$, $\omega_f(\mathbf{x}) < \varepsilon$ para todo $\mathbf{x}$ de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, existe entonces un $\delta > 0$ (que depende únicamente de ε) tal que, para todo subintervalo cerrado $T \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, tenemos $\Omega_f(T) < \varepsilon$ siempre que el diámetro $d(T) < \delta$.*

Las demostraciones de los Teoremas 10-11 y 10-12 y de los restantes de este párrafo son tan parecidas a las de los correspondientes teoremas en el caso unidimensional que no es necesario darlas con detalle.

10—13 TEOREMA. *Sea f definida y acotada en un intervalo cerrado $I \subset E_n$. Para cada $\varepsilon > 0$ definamos $J_\varepsilon = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in I,\ \omega_f(\mathbf{x}) \geq \varepsilon\}$. Entonces:*

a) *J_ε es un conjunto cerrado.*

b) *$f \in R$ en I si, y únicamente si, $c(J_\varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$.*

10—14 DEFINICIÓN. *Si $S \subset E_n$, se llama recubrimiento de Lebesgue de S a un conjunto, numerable $\{I_1, I_2, \ldots\}$ de intervalos abiertos n-dimensionales tales que $S \subset \cap_{k=1}^{\infty} I_k$. El número*

$$\overline{m}(S) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c(I_k) | \{I_1, I_2, \ldots\} \text{ es un recubrimiento Lebesgue de } S \right\}$$

se llama la medida exterior de Lebesgue n-dimensional de S.

NOTA. Cuando S es acotado, por ejemplo $S \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = I$, entonces $0 \leq \overline{m}(S) \leq c(I)$. Si $\overline{m}(S) = 0$, se dice que S es de medida nula. Para los conjuntos elementales tenemos $\overline{m}(S) = c(S)$.

10—15 TEOREMA. *Para todo conjunto acotado S de E_n tenemos $\overline{m}(S) \leq \bar{c}(S)$.*

10—16 TEOREMA. *Si B es un conjunto acotado en E_n y A es un subconjunto compacto de B, entonces $\bar{c}(A) \leq \overline{m}(B)$.*

10—17 TEOREMA. *Para los conjuntos compactos S de E_n tenemos $\bar{c}(S) = \overline{m}(S)$.*

10—18 TEOREMA. *Sea $F = \{F_1, F_2, \ldots\}$ un conjunto numerable de conjuntos en E_n tales que $\overline{m}(F_k) = 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots$ Entonces es $\overline{m}(S) = 0$, donde $S = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$.*

10—19 Teorema. *Sea f definida y acotada en un intervalo cerrado $I \subset E_n$. Consideremos $D = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in I, f$ no es continua en $\mathbf{x}\}$. Entonces $f \in R$ en I si, y únicamente si, el conjunto D tiene medida nula.*

10-6 Cálculo de una integral múltiple por integración reiterada. El lector ha aprendido, en el cálculo elemental, a calcular ciertas integrales dobles y triples por integración sucesiva respecto a cada variable. Por ejemplo, si f es una función de dos variables continua en un rectángulo cerrado R en el plano xy, definido por $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, para cada y fijo en $[c, d]$ la función F definida por la ecuación $F(x) = f(x, y)$ es continua (y por tanto integrable) en $[a, b]$. El valor de la integral $\int_a^b F(x)\, dx$ depende de y y define una nueva función G, donde $G(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$. La integral $\int_c^d G(y)\, dy$ tiene el mismo valor que la integral *doble* $\int_R f(x, y)\, d(x, y)$. Esto es, podemos escribir la igualdad

$$1) \qquad \int_R f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

(Esta fórmula se demostrará más adelante.) La cuestión que ahora se presenta consiste en ver si es válido un resultado análogo cuando f es integrable (y no necesariamente continua) en R. Podemos ver inmediatamente que son inevitables ciertas dificultades. Por ejemplo, la integral interior $\int_a^b f(x, y)\, dx$ puede no existir para ciertos valores de y, aun cuando exista la integral doble. En efecto, si f es discontinua en todo punto del segmento rectilíneo $y = y_0$, $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x, y_0)\, dx$ no existirá. Sin embargo, este segmento rectilíneo es un conjunto cuya medida bidimensional exterior de Lebesgue es cero y por consiguiente no afecta la integrabilidad de f en todo el rectángulo R. En un caso de esta naturaleza debemos hacer uso de las integrales superior e inferior para obtener una generalización conveniente de 1).

10—20 Teorema. *Sea f definida y acotada en el rectángulo cerrado R del plano xy dado por*

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Tenemos entonces:

$$\text{I)} \quad \underline{\int_R} f\, d(x, y) \leq \underline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} f(x, y)\, dy \right] dx$$

$$\leq \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} f(x, y)\, dy \right] dx \leq \overline{\int_R} f\, d(x, y).$$

II) *La proposición I) es cierta al reemplazar* $\overline{\int}_c^d$ *por* $\underline{\int}_c^d$ *en todas partes.*

III) $$\underline{\int}_R f\, d(x, y) \leq \underline{\int}_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$
$$\leq \overline{\int}_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)\, dx \right] dy \leq \overline{\int}_R f\, d(x, y).$$

IV) *La proposición* III) *es cierta al reemplazar* $\overline{\int}_a^b$ *por* $\underline{\int}_a^b$ *en todas partes.*

V) *Cuando existe* $\int_R f(x, y)\, d(x, y)$, *tenemos*

$$\int_R f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left[\underline{\int}_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$
$$= \int_c^d \left[\underline{\int}_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Demostración. Para demostrar I), definamos F mediante la ecuación

$$F(x) = \overline{\int}_c^d f(x, y)\, dy, \qquad \text{si } x \in [a, b].$$

Entonces $|F(x)| \leq M(d - c)$, donde $M = \sup \{|f(x, y)| \mid (x, y) \in R\}$, y podemos considerar

$$\overline{I} = \overline{\int}_a^b F(x)\, dx = \overline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Análogamente, definimos

$$\underline{I} = \int_a^b F(x)\, dx = \underline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_a^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Sean $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ una partición de $[c, d]$. Entonces $P = P_1 \times P_2$ es una partición de R en mn subrectángulos R_{ij} y definimos

$$I_{ij} = \overline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\, dy \right] dx, \qquad \underline{I}_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\overline{\int}_{y_{i-1}}^{y_i} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Puesto que tenemos

$$\bar{\int_c^d} f(x, y)\, dy = \sum_{j=1}^{m} \bar{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy,$$

podemos escribir

$$\bar{\int_a^b}\left[\bar{\int_c^d} f(x, y)\, dy\right] dx \leq \sum_{j=1}^{m} \bar{\int_a^b}\left[\bar{\int_{y_{i-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy\right] dx$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} \left[\bar{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

Esto es, tenemos la desigualdad

$$\bar{I} \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{ij}.$$

Análogamente, encontramos

$$\underline{I} \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_{ij}.$$

Si escribimos

$$m_{ij} = \inf \{f(x, y) \mid (x, y) \in R_{ij}\}$$

y

$$M_{ij} = \sup \{f(x, y) \mid (x, y) \in R_{ij}\},$$

de la desigualdad $m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$, $(x, y) \in R_{ij}$, obtenemos

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \bar{\int_{y_{i-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

esto implica

$$m_{ij}\mu(R_{ij}) \leq \underline{\int_{y_{i-1}}^{x_i}} \left[\bar{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy\right] dx$$

$$\leq \bar{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} \left[\bar{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy\right] dx \leq M_{ij}\mu(R_{ij}).$$

Sumando respecto a i y j y utilizando las desigualdades anteriores, conseguimos

$$L(P, f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq U(P, f).$$

Ya que esto es válido para todas las particiones P de R ha de verificarse

$$\underline{\int}_R f \, d(x, y) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{\int}_R f \, d(x, y).$$

Esto demuestra la proposición I).

Es evidente que la anterior demostración podría también seguirse si la función F fuera definida originariamente por la fórmula

$$F(x) = \underline{\int}_c^d f(x, y) \, dy,$$

y así se deduce II) con el mismo razonamiento.

En forma análoga pueden demostrarse III) y IV) intercambiando los papeles de x e y. Por último, V) es una consecuencia inmediata de I) por medio de IV).

Como un corolario, tenemos la fórmula mencionada al principio

$$\int_R f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy,$$

que es válida cuando f es continua en R.

NOTA. La existencia de las integrales «reiteradas» $\int_a^b [\int_c^d f(x, y) dy] dx$ e $\int_c^d [\int_a^b f(x, y) dx] dy$ no implica la existencia de $\int_R f(x, y) d(x, y)$. En el Ejercicio 10-9 se da un contraejemplo.

Antes de considerar en E_n el teorema análogo al Teorema 10-20, introducimos alguna notación y terminología nuevas. Si $k \leq n$, el conjunto de $\mathbf{x}$ en E_n para el que $x_k = 0$ se llama el *hiperplano coordenado* Π_k. Dado un conjunto S en E_n, la *proyección* S_k de S sobre Π_k se define como la imagen de S en la aplicación en la que el correspondiente de cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de S es $(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Es fácil demostrar que una tal aplicación es continua en S. Se deduce que si S es compacto, cada proyección S_k es compacto. Asimismo, si S es conexo, cada S_k es conexo. Las proyecciones en E_3 están representadas en la Fig. 10—3.

Un teorema completamente análogo al Teorema 10-20 es válido para integrales n-múltiples. Bastará indicar cómo se hace la extensión cuando $n = 3$. En este caso, f está definida y acotada en un intervalo cerrado $R = [a_1, b_1] \times$

$\times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ de E_3 y la proposición I) del Teorema 10-20 se reemplaza por

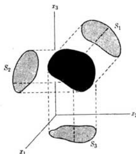


FIG. 10-3. Proyecciones en E_3.

2)
$$\underline{\int}_R f\,d\mathbf{x} \le \underline{\int}_{a_1}^{b_1} \left[\overline{\int}_R f\,d(x_2, x_3) \right] dx_1$$
$$\le \overline{\int}_{a_1}^{b_1} \left[\overline{\int}_{R_1} f\,d(x_2, x_3) \right] dx_1 \le \overline{\int}_R f\,d\mathbf{x},$$

donde R_1 es la proyección de R sobre el plano coordenado Π_1. Cuando $\int_R f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ existe, la fórmula correspondiente a la parte V) del Teorema 10-20 es

3)
$$\int_R f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left[\overline{\int}_{R_1} f\,d(x_2, x_3) \right] dx_1 = \int_{R_1} \left[\overline{\int}_{a_1}^{b_1} f\,dx_1 \right] d(x_2, x_3).$$

Como en el Teorema 10-20, son válidas proposiciones análogas reemplazando adecuadamente las integrales superiores por las inferiores, y existen también fórmulas análogas para las proyecciones R_2 y R_3.

El lector no tendrá dificultad en establecer resultados análogos para las integrales n-ples (pueden probarse mediante el método utilizado en el Teorema 10-20). El caso particular en que existe la integral n-ple $\int_R f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ es de especial importancia y puede establecerse como sigue:

10–21 TEOREMA. *Sea f definida y acotada en un intervalo cerrado*

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

de E_n. Admitamos la existencia de $\int_R f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. En tal caso

$$\int_R f\,d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\left[\bar{\int}_{R_1} f\,d(x_2, \ldots, x_n)\right]dx_1$$

$$= \int_{R_1}\left[\bar{\int}_{a_1}^{b_1} f\,dx_1\right]d(x_2, \ldots, x_n).$$

Son válidas fórmulas análogas, en las cuales las integrales superiores están reemplazadas por las inferiores y R_1 sustituido por R_k, proyección de R sobre Π_k.

Concluimos este párrafo con un teorema bidimensional análogo al teorema fundamental del cálculo integral. Más tarde, este resultado tendrá aplicación al demostrar el teorema de Green para un rectángulo (Teorema 10-39).

10—22 TEOREMA. *Admitamos la existencia de la integral doble $\int_R f(x, y)d(x, y)$, donde R es un rectángulo, $R = [a, b] \times [c, d]$. Sea g una función definida en R y con las siguientes propiedades:*

I) *Existe la derivada parcial $D_1 g$ y está acotada en el interior de R y para cada punto interior (x, y) es $D_1 g(x, y) = f(x, y)$.*

II) *Para cada y fijo en $[c, d]$, existen los límites $g(a +, y)$ y $g(b -, y)$ y satisfacen la igualdad*

$$g(a, y) - g(a+, y) = g(b, y) - g(b -, y).$$

En estas condiciones, existe la integral de Riemann $\int_c^d [g(b, y] - g(a, y)]dy$ y tenemos

$$\int_R f(x, y)\,d(x, y) = \int_c^d [g(b, y) - g(a, y)]\,dy.$$

NOTA. Es válida la fórmula análoga

$$\int_R f(x, y)\,d(x, y) = \int_a^b [h(x, d) - h(x, c)]\,dx,$$

siempre que h sea una función que satisfaga un conjunto de condiciones análogo [esto es, $D_2 h = f$ en I), y $h(x, c) - h(x, c +) = h(x, d) - h(x, d -)$ en II)]. Las funciones g y h satisfarán II) automáticamente si son continuas en todo el rectángulo R.

Demostración. Sean las particiones $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ de $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente. Formemos la suma

$$S = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i, \bar{y}_k) - g(x_{i-1}, \bar{y}_k)](y_k - y_{k-1}),$$

donde $y_{k-1} \leq \bar{y}_k \leq y_k$. Aplicando el Teorema del valor medio unidimensional (Teorema 5-10), podemos escribir

$$g(x_i, \bar{y}_k) - g(x_{i-1}, \bar{y}_k) = D_1 g(\bar{x}_{i,k}, \bar{y}_k)(x_i - x_{i-1}),$$

donde $x_{i-1} \leq \bar{x}_{i,k} \leq x_i$. [El Teorema 5-10 es aplicable en virtud de I) y II).] Ya que $D_1 g = f$ en el interior, podemos escribir

$$S = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_{i,k}, \bar{y}_k)(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}),$$

y esta es una suma particular de Riemann que aproxima la integral $\int_R f(x, y) d(x, y)$, cuya existencia se ha supuesto.

Puede obtenerse una segunda expresión para S a partir de la fórmula que la define, observando que en la suma respecto de i se simplifican parcialmente cada dos términos consecutivos quedando sólo los extremos, y así se tiene

$$S = \sum_{k=1}^{m} [g(b, \bar{y}_k) - g(a, \bar{y}_k)](y_k - y_{k-1}).$$

Sin embargo, esta es una suma general de Riemann para la integral Riemann unidimensional $\int_c^d [g(b, y) - g(a, y)] dy$, y, por tanto, se deduce lo que se quería demostrar.

10-7 Integración múltiple sobre conjuntos más generales. Hasta aquí, la integral múltiple $\int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ se ha definido únicamente para *intervalos* I. Esto, naturalmente, es demasiado restrictivo para las aplicaciones de la integración. No obstante, no es difícil extender la definición a conjuntos cualesquiera medibles-Jordan.

10—23 DEFINICIÓN. *Sea f definida y acotada en un conjunto acotado S medible-Jordan de E_n. Sea I un intervalo cerrado que contiene S y definamos g en I como sigue:*

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in S, \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \in I - S. \end{cases}$$

Se dice entonces que f es integrable-Riemann en S y escribimos $f \in R$ en S, siempre que exista la integral $\int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Escribimos también $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Las integrales superior e inferior $\bar{\int}_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ y $\underline{\int}_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ se definen análogamente.

NOTA. Mediante la consideración de las sumas de Riemann que aproximan $\int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, es fácil ver que la integral $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ no depende de la elección del intervalo I utilizado para incluir S.

Ahora puede darse una condición necesaria y suficiente para la existencia de $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

10—24 TEOREMA. *Sean S un conjunto medible-Jordan en E_n y f una función definida y acotada en S. Entonces $f \in R$ en S si, y únicamente si, las discontinuidades de f en S constituyen un conjunto de medida nula.*

Demostración. Sea I un intervalo cerrado que contiene S y consideremos que $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \in S$, $g(\mathbf{x}) = 0$ cuando $\mathbf{x} \in I - S$. Las discontinuidades de f serán discontinuidades de g. No obstante g puede tener discontinuidades en alguno o en todos los puntos frontera de S. Ya que S tiene contenido Jordan, el Teorema 10-6 nos dice que $c(\partial S) = 0$. Por consiguiente, $g \in R$ en I si, y tan sólo si, las discontinuidades de f forman un conjunto de medida nula.

El próximo teorema demuestra que la integral es aditiva con respecto a los conjuntos medibles-Jordan.

10—25 TEOREMA. *Admitamos que $f \in R$ en un conjunto medible-Jordan S en E_n. Supongamos que $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos no rampantes y medibles-Jordan. Entonces $f \in R$ en A, $f \in R$ en B, y tenemos*

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{4}$$

Demostración. Sea I un intervalo cerrado que contenga S y definamos g como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in S, \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \in I - S. \end{cases}$$

La existencia de $\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ y de $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ es una sencilla consecuencia del Teorema 10—24. Para probar 4), sea P una partición de I en m subintervalos $I_1, \ldots, I_m$ y formemos una suma de Riemann

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^{m} g(\mathbf{t}_k)\mu(I_k).$$

Si S_A representa la parte de la suma que procede de aquellos subintervalos que contienen puntos de A, y S_B se define en forma análoga, podemos escribir

$$S(P, g) = S_A + S_B - S_C,$$

donde S_C contiene aquellos términos procedentes de subintervalos que contienen puntos de A y de B. En particular, todos los puntos comunes a las dos fronteras ∂A y ∂B pertenecerán a esta tercera clase. Pero S_A es una suma de Riemann que aproxima la integral $S_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, y S_B es otra suma de Riemann que aproxima $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Ya que $c(\partial A \cap \partial B) = 0$, se deduce que $|S_C|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño cuando P es suficientemente fina. La igualdad del enunciado es una sencilla consecuencia de estas observaciones.

NOTA. La fórmula 4) también es válida para integrales superiores e inferiores.

Para conjuntos S cuya estructura es relativamente sencilla, puede utilizarse el Teorema 10-20 para obtener fórmulas que den el valor de integrales dobles mediante integración reiterada. Estas fórmulas se dan en el próximo teorema.

10—26 TEOREMA. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones continuas definidas en $[a, b]$ tales que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para cada x en $[a, b]$. Sea S la región cerrada en E_2 definida por*

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$

Si $f \in R$ en S, tenemos

$$\int_S f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Fórmulas análogas son ciertas para integrales n-ples. Las extensiones son tan sencillas que no requieren nuevo comentario.

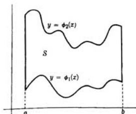


FIG. 10-4. Región en E_2 del tipo descrito en el Teorema 10-26.

En la Figura 10-4 se representa una región del tipo descrito en el teorema. A los conjuntos que pueden descomponerse en un número finito de regiones de este tipo sin parte común, podemos aplicar la integración reiterada a cada parte separadamente y sumar los resultados de acuerdo con el Teorema 10-25. Naturalmente, todos los conjuntos que se consideran deben ser medibles-Jordan.

10-8 Teorema del Valor Medio en las integrales múltiples. Como en el caso unidimensional, las integrales múltiples satisfacen a una propiedad de valor medio. Puede ésta obtenerse como una sencilla consecuencia del teorema siguiente, cuya demostración se deja como ejercicio.

10—27 TEOREMA. *Supongamos que $f \in R$ y $g \in R$ en un conjunto acotado S de E_n. Si $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ de S, tenemos*

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

10—28 TEOREMA. (*Teorema del Valor Medio en las integrales múltiples*). *Supongamos que $g \in R$ y $f \in R$ en un conjunto acotado S de E_n y que $g(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$ de S. Sean $m = \inf f(S)$, $M = \sup f(S)$. Existe entonces un número real λ en el intervalo $m \leq \lambda \leq M$ tal que*

5) $$\int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lambda \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

En particular, tenemos

6) $$mc(S) \leq \int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq Mc(S).$$

NOTA. Si, además, S es conexo y f es continua en S, entonces $\lambda = f(\mathbf{x}_0)$ para algún $\mathbf{x}_0$ de S (en virtud del Teorema 8-37) y la 5) se convierte en

7) $$\int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

En particular, la 7) implica $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)c(S)$, donde $\mathbf{x}_0 \in S$.

Demostración. Ya que $g(\mathbf{x}) \geq 0$, tenemos $mg(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) \leq Mg(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x}$ de S. Según el Teorema 10-27, podemos escribir

$$m \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq M \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Si $\int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$, para todo λ es cierta la 5). Si $\int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} > 0$, la 5) es válida para $\lambda = \int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}/\int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Tomando $g(\mathbf{x}) = 1$, obtenemos 6).

Podemos utilizar 6) para probar que el integrando f puede ser «perturbado» en un conjunto de contenido cero sin afectar por ello el valor de la integral. Tenemos, en efecto, el siguiente teorema:

10—29 Teorema. *Supongamos que $f \in R$ en un conjunto acotado S de E_n. Sea T un subconjunto de S que tenga contenido de Jordan n-dimensional nulo. Sea g una función, definida y acotada en S, tal que $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \in S - T$. Entonces $g \in R$ en S y*

$$\int_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Demostración. Tomemos $h = f - g$. Entonces $\int_S h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_T h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{S-T} h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Sin embargo, $\int_T h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ a causa de 6), e $\int_{S-T} h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ ya que $h(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x}$ en $S - T$.

Nota. Este teorema sugiere un método para extender la definición de integral de Riemann $\int_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ a funciones que no estén definidas y acotadas en *todo* el conjunto S. En efecto, sean S un conjunto acotado de E_n medible Jordan y T un subconjunto de S que tenga contenido nulo. Si f está definida y acotada en $S - T$ y existe $\int_{S-T} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, convenimos en escribir

$$\int_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{S-T} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

y decimos que f es integrable-Riemann en S. A la vista del teorema que acabamos de demostrar, esto es esencialmente lo mismo que extender el dominio de definición de f al conjunto total S, tomando f en T con la condición de que permanezca acotada.

10-9 Cambio de variable en una integral múltiple. Uno de los resultados más importantes de la teoría de la integración múltiple es la fórmula para efectuar un «cambio de variable». Esta es una extensión de la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt, \qquad a = g(c),\ b = g(d),$$

que fue demostrada (en el Teorema 9-33) en el supuesto de que g tenga derivada g' continua en un intervalo S que une c y d y que f sea continua en la imagen $X = g(S)$. Un importante caso particular se presenta cuando la derivada g' no se anula (y, por tanto, tiene signo constante) en S. Para precisar,

supongamos $c < d$ de modo que $S = [c, d]$. Si g' es positiva en S, tenemos $a < b$ y $X = g(S) = [a, b]$. En este caso, la fórmula anterior puede escribirse como sigue:

$$\int_X f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(X)} f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Por otra parte, si g' es negativa en S, entonces $X = g(S) = [b, a]$, y la fórmula se convierte en

$$\int_X f(x)\,dx = -\int_{g^{-1}(X)} f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Ambos casos quedan incluidos, por consiguiente, en la fórmula *única*.

$$\int_X f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(X)} f[g(t)]\,|g'(t)|\,dt.$$

Esta última fórmula también es válida cuando $c > d$, y en esta forma es como se generalizará el resultado a las integrales múltiples. La función g que «transforma la variable» debe ahora reemplazarse por una función vectorial cuyo Jacobiano desempeña el papel de la derivada g'.

10—30 TEOREMA. *Sea $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ una función vectorial definida en una región abierta S de E_n. Supongamos que $\mathbf{g} \in C'$ en S, que $\mathbf{g}$ es uno a uno en S, y que el Jacobiano $J_{\mathbf{g}}$ nunca se anula en S. Sea f una función real definida y continua en la imagen $\mathbf{g}(S)$. Entonces, para toda subregión X de $\mathbf{g}(S)$ compacta y medible-Jordan, tenemos la fórmula*

$$\int_X f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(X)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,dt. \tag{8}$$

NOTA. La fórmula 8) es incluso válida si el Jacobiano se anula en un subconjunto de S de medida nula. (Ver Ejercicio 10-16.)

Demostración. La demostración es por inducción. Cuando $n = 1$, el resultado no es más que un caso particular del Teorema 9-33. Por lo tanto, supongamos que la fórmula es correcta para $n - 1$ y vamos a demostrar que también es cierta para n.

Ya que $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) \neq 0$ para cada $\mathbf{t}$ de S, en ningún punto de S pueden anularse todas las derivadas $D_k g_k(\mathbf{t})$. Para precisar, supongamos que $D_n g_2(\mathbf{t}_0) \neq 0$ en algún punto $\mathbf{t}_0$. Por la continuidad, existirá un entorno $N(\mathbf{t}_0) \subset S$ tal que $D_n g_2\ (\mathbf{t}) \neq 0$ para todo $\mathbf{t}$ en $N(\mathbf{t}_0)$. Demostraremos ahora que existe un

conjunto abierto $A \subset N(\mathbf{t}_0)$ en el que $\mathbf{g}$ puede expresarse como composición de dos funciones vectoriales $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ y $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ que tienen propiedades especiales.

Ante todo, definimos $\boldsymbol{\phi}$ como sigue:

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, g_2(\mathbf{t})), \quad \text{si} \quad \mathbf{t} \in S.$$

Esto es, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})$ deja todos los componentes de $\mathbf{t}$ fijos excepto t_n, que es reemplazado por $g_2(\mathbf{t})$. La función $\boldsymbol{\phi}$ es manifiestamente uno a uno en S y $\boldsymbol{\phi} \in C'$ en S. Además, el Jacobiano de $\boldsymbol{\phi}$ es $D_n g_2$ y, ya que éste no se anula en $N(\mathbf{t}_0)$, podemos aplicar el teorema de la función inversa (Teorema 7-5) para obtener una función inversa «local» $\boldsymbol{\Psi}$ y dos conjuntos abiertos $A \subset N(\mathbf{t}_0)$ y $B \subset \boldsymbol{\phi}(S)$ tales que $\mathbf{t}_0 \in A$, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t}_0) \in B$, $B = \boldsymbol{\phi}(A)$, $\boldsymbol{\Psi} \in C'$ en B, y

$$\boldsymbol{\Psi}[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})] = \mathbf{t} \qquad \text{para cada } \mathbf{t} \text{ en } A.$$

Definamos ahora $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ de la siguiente manera: Si $\mathbf{t} \in B$, tomamos

$$\theta_k(\mathbf{t}) = g_k(t_1, \ldots, t_{n-1}, \Psi_n(\mathbf{t})) \qquad \text{para} \qquad 1 \le k \le n,\ k \ne 2,$$

y $\theta_2(\mathbf{t}) = t_n$. Entonces para cada $\mathbf{t}$ en A, tenemos

$$\theta_k[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})] = g_k(t_1, \ldots, t_{n-1}, \Psi_n[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})]) = g_k(t_1, \ldots, t_n) = g_k(\mathbf{t}),$$
$$\text{si } 1 \le k \le n,\ k \ne 2,$$

y $\theta_2[\boldsymbol{\phi}(t)] = \phi_n(\mathbf{t}) = g_2(\mathbf{t})$. Por consiguiente

$$\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})] = \mathbf{g}(\mathbf{t}) \qquad \text{para todo } \mathbf{t} \text{ en } A.$$

Esto equivale a decir que, en el conjunto abierto A que contiene $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{g}$ ha sido expresada como una función compuesta $\mathbf{g} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\phi}$, donde $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})$ deja todos los componentes de $\mathbf{t}$ fijos excepto t_n, y $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})$ deja fijo t_n. Además, $\boldsymbol{\theta}$ es uno a uno y $\boldsymbol{\theta} \in C'$ en B.

Naturalmente, todo esto se apoya en la hipótesis de que $D_n g_2(\mathbf{t}_0) \ne 0$. Si, se hubiera supuesto que $D_n g_k(\mathbf{t}_0) \ne 0$, existiría a su vez un conjunto abierto A en el cual $\mathbf{g}$ se expresaría como una composición $\mathbf{g} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\phi}$, con la particularidad de que ahora $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})$ dejaría fijos todos los componentes de $\mathbf{t}$ excepto t_n, y $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})$ dejaría fijo t_n.

Sea ahora X una subregión compacta de $\mathbf{g}(S)$ medible-Jordan. La imagen inversa $\mathbf{g}^{-1}(X)$ es entonces un subconjunto compacto de S. A cada $\mathbf{t}_0$ en $\mathbf{g}^{-1}(X)$, corresponde un conjunto abierto A que contiene $\mathbf{t}_0$ en el cual $\mathbf{g}$ es una función compuesta de la forma $\mathbf{g} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\phi}$, donde $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})$ deja fijos todos los componentes de $\mathbf{t}$ excepto uno, al cual $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})$ deja fijo. (No se pierde generalidad al suponer que cada uno de tales conjuntos abiertos A es un *intervalo* abierto.) Al variar $\mathbf{t}_0$ sobre el conjunto $\mathbf{g}^{-1}(X)$, esos intervalos abiertos A forman un recubrimiento abierto de $\mathbf{g}^{-1}(X)$ y (por la compacidad) un subconjunto finito

de esos intervalos, $A^{(1)}, \ldots, A^{(p)}$, recubren $\mathbf{g}^{-1}(X)$. (Podemos también suponer que esos intervalos no tienen parte común.) En correspondencia, existe una colección finita de funciones vectoriales $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(p)}$ y $\boldsymbol{\phi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\phi}^{(p)}$ tales que

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \theta^{(k)}[\boldsymbol{\phi}^{(k)}(\mathbf{t})]$$

para cada $\mathbf{t}$ en $A^{(k)}$. Según el Teorema 7-2, tenemos la fórmula producto

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = J_{\theta^{(k)}}[\boldsymbol{\phi}^{(k)}(\mathbf{t})]J_{\boldsymbol{\phi}^{(k)}}(\mathbf{t}), \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

que relaciona los Jacobianos. Es importante observar que este producto es *independiente* de k.

Designemos por $T^{(k)} = \mathbf{g}(A^{(k)})$ la imagen del intervalo $A^{(k)}$ obtenida por $\mathbf{g}$. (Ver Fig. 10-5.) La hipótesis de que $\mathbf{g}$ es uno a uno en S implica que los conjuntos $T^{(1)}, \ldots, T^{(p)}$ no tienen parte común. Además tenemos

$$X \subset T^{(1)} \cup \cdots \cup T^{(p)} \subset \mathbf{g}(S).$$

Por consiguiente, si X es medible-Jordan, podemos escribir

$$\int_X f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{p} \int_{T^{(k)}} F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

donde $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} \in X$, y $F(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \in \mathbf{g}(S) - X$. La demostración del teorema será completa si se demuestra que la fórmula de transformación

9) $$\int_{T^{(k)}} F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(T^{(k)})} F[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$$

es válida para cada $k = 1, 2, \ldots, p$.

Prescindiendo de los superíndices, supongamos que $\mathbf{g} = \theta\boldsymbol{\phi}$ en un intervalo cerrado A y sea $B = \boldsymbol{\phi}(A)$. Entonces $T = \mathbf{g}(A) = \theta(B)$. Para cada x real, sean:

$$T(x) = \{\mathbf{t} \mid \mathbf{t} \in T, t_n = x\}, \qquad B(x) = \{\mathbf{t} \mid \mathbf{t} \in B, t_n = x\}.$$

En consecuencia $T(x) = \theta[B(x)]$. Consideremos también,

$$c = \inf\{\phi_n(\mathbf{t}) \mid \mathbf{t} \in A\}, \qquad d = \sup\{\phi_n(\mathbf{t}) \mid \mathbf{t} \in A\}.$$

Según el Teorema 10-21 podemos entonces escribir

$$\int_T F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_c^d \left[\int_{T(x_n)} F(x_1, \ldots, x_n)\,d(x_1, \ldots, x_{n-1}) \right] dx_n.$$

En la integral externa reemplazamos la variable de integración x_n por u_n. La integral interna es una integral $(n-1)$-ple a la que aplicamos la hipótesis de inducción, haciendo el cambio de variable $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u})$ (que únicamente afecta a los $n-1$ primeros componentes de $\mathbf{u}$). Esto nos da

$$10)\qquad \int_T F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_c^d \left[\int_{B(u_n)} F[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u})]\,|J_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u})|\,d(u_1, \ldots, u_{n-1}) \right] du_n.$$

Escribamos ahora $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ y $A_n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Asimismo, para cada $\mathbf{u}$ con los componentes $u_1, \ldots, u_{n-1}$ fijos pongamos $B_n^*(\mathbf{u}) = \{\phi_n(\mathbf{u}) \mid a_n \leq u_n \leq b_n\}$. Invirtiendo el orden de integración en 10), obtenemos.

$$11)\qquad \int_T F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{A_n} \left[\int_{B_n^*(\mathbf{u})} F[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u})]\,|J_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u})|\,du_n \right] d(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Hacemos ahora el cambio de variable unidimensional $u_n = \phi_n(\mathbf{t})$ en la integral interior y sustituímos las variables de integración $u_1, \ldots, u_{n-1}$ por $t_1, \ldots, t_{n-1}$ con lo que 11) se convierte en

$$\int_T F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{A_n} \left[\int_{a_n}^{b_n} F[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{t})|\,|J_{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{t})|\,dt_n \right] d(t_1, \ldots, t_{n-1})$$

$$= \int_A F[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.$$

Aplicando un razonamiento análogo a cada una de las integrales de 9) queda demostrado el teorema.

El Teorema 10-30 puede usarse para dar al Jacobiano una interpretación geométrica.

10—31 Teorema. *En las hipótesis del Teorema 10-30, tenemos*

$$c(X) = |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_0)|\,c(Y),$$

donde Y *es cualquier subregión compacta de* S *medible-Jordan,* $X = \mathbf{g}(Y)$, *e* $\mathbf{y}_0 \in Y$.

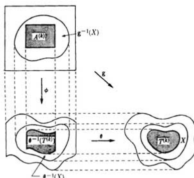


FIG. 10-5 Demostración del Teorema 10-30 cuando $n = 2$.

Demostración. Si tomamos $f(\mathbf{x}) = 1$ para todo $\mathbf{x}$ en X, del Teorema 10-30 se obtiene

$$c(X) = \int_Y |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}.$$

Ya que Y es conexo, la conclusión se deduce inmediatamente del Teorema 10-28.

NOTA. La fórmula del Teorema 10-31 demuestra que el valor absoluto del Jacobiano es, en cierto modo, un « factor de dilatación local » para el contenido Jordan.

10-10 Integrales de línea. La integral múltiple ha sido introducida como una generalización de la integral Riemann unidimensional $\int_a^b f(x) \, dx$. Existe otro modo de extender la noción de integral en el cual el intervalo $[a, b]$ se reemplaza por una curva en E_n descrita por una función vectorial $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. En esta generalización el integrando es una función vectorial $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ definida y acotada sobre esta curva y el resultado de la integral se llama *integral de línea* o *integral curvilínea*, y se designa por $\int \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ o mediante algún símbolo parecido. En este símbolo el punto se utiliza para sugerir un producto interior de dos vectores. En realidad, las integrales de línea pueden considerarse como una generalización de las integrales de Riemann-Stieltjes en las que el integrando $\mathbf{f}$ y el integrador $\boldsymbol{\alpha}$ son funciones vectoriales. Las integrales de línea se presentan de manera enteramente natural en ciertos

tipos de problemas físicos relativos a campos vectoriales. Por ejemplo, el *trabajo* realizado por un campo de fuerzas $\mathbf{f}$ al mover una partícula a lo largo de la curva definida por $\boldsymbol{\alpha}$, resulta ser el valor numérico de la integral de línea $\int \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$.

Las integrales de línea se definen así:

10—32 DEFINICIÓN. *Sea Γ una curva en E_n descrita por una función vectorial continua $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definida en $[a, b]$. Sea*

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$$

una partición de $[a, b]$ y supongamos que $v_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Si

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$$

es una función vectorial definida sobre Γ, formemos la suma de productos interiores

12)
$$S(P, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{f}[\boldsymbol{\alpha}(v_k)] \cdot [\boldsymbol{\alpha}(t_k) - \boldsymbol{\alpha}(t_{k-1})].$$

Decimos que existe la integral de línea de $\mathbf{f}$ respecto a $\boldsymbol{\alpha}$ a lo largo del camino $\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]$ si existe un número real A que tiene la propiedad siguiente: Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que para toda partición P más fina que P_ε y para toda elección de los puntos v_k en $[t_{k-1}, t_k]$, se verifica

$$|A - S(P, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})| < \varepsilon.$$

Cuando un tal número A existe, es único y se representa con el símbolo $\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$. Definimos también

$$\int_{-\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = -\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}.$$

NOTA. Si $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}(a)$ e $\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}(b)$, escribimos también $\int_{\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ en lugar de $\int_{\Gamma(\boldsymbol{\alpha})}$.

Observemos que en el caso particular $n = 1$, la Definición 10-32 coincide con la de la integral de Riemann-Stieltjes dada en el Capítulo 9. Para un n cualquiera, el siguiente teorema relaciona las integrales de línea con las de Riemann-Stieltjes.

10—33 TEOREMA. *Sea Γ una curva en E_n descrita por una función vectorial continua $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ definida en $[a, b]$, y sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ definida y acotada sobre Γ. Tenemos entonces*

13) $$\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \sum_{r=1}^{n} \int_{a}^{b} f_r[\boldsymbol{\alpha}(t)]\, d\alpha_r(t)$$

siempre que exista cada una de las integrales de Riemann-Stieltjes del segundo miembro.

Demostración. La suma 12) que define $S(P, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ puede escribirse en la forma

$$S(P, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f_r[\boldsymbol{\alpha}(v_k)][\alpha_r(t_k) - \alpha_r(t_{k-1})].$$

La demostración se obtiene observando que, para cada r, la suma interior es una suma de Riemann-Stieltjes que aproxima $\int_a^b f_r[\boldsymbol{\alpha}(t)]\, d\alpha_r(t)$.

NOTA. En la mayoría de integrales de línea que se presentan en la práctica, Γ es *rectificable* y $\mathbf{f}$ *continua* sobre Γ. En tal caso, el Teorema 9-26 garantiza la existencia de cada integral del segundo miembro de 13).

Como consecuencia del Teorema 10-33, también se usa la notación $f_1 d\alpha_1 + \dots + f_n\, d\alpha_n$ en lugar del símbolo $\mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ que aparece bajo el signo integral. Para las curvas en E_2, es corriente escribir las ecuaciones paramétricas de Γ en la forma

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b.$$

De acuerdo con esta notación, si $\boldsymbol{\alpha}$ es la función vectorial definida por

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t)),$$

la integral de línea $\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ se escribe en la forma $\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} f_1\, dx + f_2\, dy$.

NOTA. A pesar de la aparente semejanza, la integral compleja de contorno $\int_{\Gamma[z]} F(z)\, dz$ de la Definición 9-56 es conceptualmente distinta de la integral curvilínea real obtenida poniendo $n = 2$ en la Definición 10-32. No obstante, existe una conexión entre los dos tipos de integrales. (Ver el Ejercicio 10-21.)

Ya que la integral de línea se define esencialmente en la misma forma que la integral Riemann-Stieltjes, no es sorprendente que muchas propiedades de las integrales de Stieltjes subsistan para las integrales de línea. En particular, la linealidad

$$\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} (c_1\mathbf{f} + c_2\mathbf{g}) \cdot d\boldsymbol{\alpha} = c_1 \int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} + c_2 \int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$$

se deduce como en la demostración del Teorema 9-2. Tenemos también la siguiente propiedad aditiva análoga a la del Teorema 9-4:

10—34 TEOREMA. *Representemos por* Γ *una curva descrita por una función vectorial* $\boldsymbol{\alpha}$ *y supongamos que* $\Gamma[\boldsymbol{\alpha}] = \Gamma_1[\boldsymbol{\alpha}] + \Gamma_2[\boldsymbol{\alpha}]$. *Siempre que existan dos de las tres integrales* 14), *la tercera también existe y tenemos*

14) $$\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\Gamma_1[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} + \int_{\Gamma_2[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}.$$

La demostración es análoga a la del Teorema 9-4.

El efecto de sustituir el integrador $\boldsymbol{\alpha}$ por un integrador equivalente es, a lo sumo, un cambio de signo, como indica el siguiente teorema:

10—35 TEOREMA. *Sean* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *dos funciones equivalentes que describen la misma curva* Γ. *Si existe* $\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$, *también existe entonces* $\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta}$ *y tenemos*

$$\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \pm \int_{\Gamma[\boldsymbol{\beta}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta},$$

donde es válido el signo más si $\Gamma[\boldsymbol{\alpha}] = \Gamma[\boldsymbol{\beta}]$ *y el signo menos si* $\Gamma[\boldsymbol{\alpha}] = -\Gamma[\boldsymbol{\beta}]$.

La demostración se logra con un razonamiento similar al empleado en el Teorema 9-7. Los detalles se dejan al lector. (Ver Ejercicio 10-22.)

Para las curvas *rectificables* es muy útil el siguiente teorema para calcular aproximadamente el valor absoluto de una integral de línea.

10—36 TEOREMA. *Sea* Γ *una curva rectificable de longitud* $\Lambda(\Gamma)$ *descrita por una función continua* $\boldsymbol{\alpha}$ *definida en* $[a, b]$. *Si* $\mathbf{f}$ *está definida y acotada sobre* Γ, *o sea que* $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq M$ *para todo* $\mathbf{x}$ *de* Γ, *y si* $\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ *existe, tenemos*

$$\left| \int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \right| \leq M\Lambda(\Gamma).$$

Demostración. Debido a la desigualdad $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, cada suma $S(P, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ de 12) satisface la relación

$$|S(P, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})| \leq M \sum_{k=1}^{m} |\boldsymbol{\alpha}(t_k) - \boldsymbol{\alpha}(t_{k-1})| \leq M\Lambda(\Gamma).$$

Luego, $|\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}|$ no puede superar a $M\Lambda(\Gamma)$.

10-11 Integrales de línea con respecto a la longitud de arco. Sea Γ una curva *simple* rectificable, de longitud $\Lambda(\Gamma)$, descrita por una función $\boldsymbol{\alpha}$ definida en $[a, b]$. Existe una función $\boldsymbol{\beta}$, definida en $[0, \Lambda(\Gamma)]$, tal que $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}[s(t)]$, donde s es la longitud de arco, definida por $s(x) = \Lambda_{\alpha}(a, x)$ si $a < x \leq b$, $s(a) = 0$. (Ver Ejercicio 8-11.) Puesto que $\boldsymbol{\beta}$ es propiamente equivalente a $\boldsymbol{\alpha}$, podemos escribir $\int_{\Gamma[\boldsymbol{\alpha}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\Gamma[\boldsymbol{\beta}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta}$ si existe una u otra de las integrales. Por otra parte, tenemos también

$$\int_{\Gamma[\boldsymbol{\beta}]} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta} = \sum_{r=1}^{n} \int_{0}^{\Lambda(\Gamma)} f_r[\boldsymbol{\beta}(s)]\, d\beta_r(s),$$

naturalmente, siempre que exista cada una de las integrales de Riemann-Stieltjes del segundo miembro. Si la función $\boldsymbol{\beta}$ es regular a trozos, la integral puede escribirse también como una simple integral de Riemann, ya que tenemos

$$\sum_{r=1}^{n} \int_{0}^{\Lambda(\Gamma)} f_r[\boldsymbol{\beta}(s)]\beta_r'(s)\, ds = \int_{0}^{\Lambda(\Gamma)} \mathbf{f}[\boldsymbol{\beta}(s)] \cdot \boldsymbol{\beta}'(s)\, ds, \tag{15}$$

donde $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1', \ldots, \beta_n')$. La integral de Riemann del segundo miembro de 15) se representa con frecuencia por el símbolo $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\beta}' ds$ y se la cita como una «integral de línea con respecto a la longitud de arco». Así pues, la igualdad

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\beta}'\, ds = \int_{0}^{\Lambda(\Gamma)} \mathbf{f}[\boldsymbol{\beta}(s)] \cdot \boldsymbol{\beta}'(s)\, ds$$

sirve para definir el símbolo del primer miembro, siempre que exista la integral del segundo.

10-12 La integral de línea de un gradiente. El teorema fundamental del cálculo integral consiste en la fórmula

$$\int_{a}^{b} f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

La importancia de esta fórmula desde un punto de vista teórico, radica en que establece una conexión entre la diferenciación y la integración Riemann. También es útil para el cálculo, porque nos proporciona un método elegante para la evaluación de una integral de Riemann en función de una expresión que implica tan sólo los *extremos* del intervalo $[a, b]$, siempre que el integrando sea una derivada. En el próximo teorema obtenemos un resultado análogo para las integrales de línea.

10—37 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f}$ *continua en una región abierta* $S \subset E_n$, *y supongamos que existe una función real* ϕ *tal que* $\phi \in C'$ *en* S *y que*

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ de S. En estas condiciones, para todo par de puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de S y para toda curva Γ regular a trozos en S que una $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$, tenemos

$$\int_{\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})} \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x}),$$

donde $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

NOTA. Una función real ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$ se dice que es una *función potencial* de la función vectorial $\mathbf{f}$.

Demostración. Sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una función regular a trozos definida en $[a, b]$ tal que $\boldsymbol{\alpha}$ describe Γ y $\boldsymbol{\alpha}(a) = \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}(b) = \mathbf{y}$. Escribamos $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ y subdividamos $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ tales que $\boldsymbol{\alpha}'$ sea continua en cada intervalo abierto (t_{k-1}, t_k), $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. Definamos una función real F en $[a, b]$ mediante la ecuación

$$F(t) = \phi[\boldsymbol{\alpha}(t)], \qquad \text{si } t \in [a, b],$$

Según la regla de derivación de las funciones compuestas, la igualdad

$$16)\qquad F'(t) = \nabla\phi[\boldsymbol{\alpha}(t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) = \mathbf{f}[\boldsymbol{\alpha}(t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)$$

es válida en cada intervalo abierto (t_{k-1}, t_k). En virtud del Teorema 10-33, tenemos

$$17)\qquad \int_{\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \sum_{r=1}^{n} \int_a^b f_r[\boldsymbol{\alpha}(t)]\, d\alpha_r(t),$$

y, según el Teorema 9-8,

$$18)\qquad \int_a^b f_r[\boldsymbol{\alpha}(t)]\, d\alpha_r(t) = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_r[\boldsymbol{\alpha}(t)]\, \alpha'_r(t)\, dt.$$

Combinando 16), 17) y 18), obtenemos

$$19)\qquad \int_{\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} [F(t_k) - F(t_{k-1})]$$
$$= F(b) - F(a) = \phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x}).$$

NOTA. Observemos que el valor de la integral del Teorema 10-37 es *independiente* de la curva Γ utilizada para unir $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$ (con tal de que Γ sea regular a trozos). Debe hacerse notar especialmente que esta propiedad es suficiente para establecer la existencia de una función potencial ϕ, como indica el teorema que sigue:

10–38 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ *continua en una región abierta* $S \subset E_n$. *Sea* $\mathbf{x}_0$ *un punto fijo en S. Para cada* $\mathbf{x}$ *de S y para todo par de curvas poligonales* Γ_1 *y* Γ_2 *en S que unan* $\mathbf{x}_0$ *a* $\mathbf{x}$, *supongamos que se verifica*

$$\int_{\Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\Gamma_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta}$$

siempre que $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ *y* $\boldsymbol{\beta} \in \Gamma_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$. *Entonces existe una función* ϕ *tal que* $\phi \in C'$ *en S y que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$ *para todo* $\mathbf{x}$ *de S.*

Demostración. Para cada $\mathbf{x}$ de S, sea Γ una curva poligonal en S que una $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$ (una tal poligonal existe, ya que S es poligonalmente conexo) y definamos

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha},$$

donde $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$. Por hipótesis, el número $\phi(\mathbf{x})$ está completamente determinado por $\mathbf{x}$ y no depende de la poligonal utilizada para unir $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}$. Completaremos la demostración probando que existe cada una de las derivadas parciales $D_k\phi(\mathbf{x})$ y que es igual a $f_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

A tal fin tomemos un entorno $N(\mathbf{x}; \delta) \subset S$, sea λ un número real que satisfaga $0 < |\lambda| \leq \delta$, y consideremos el cociente de incrementos

$$\frac{\phi(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k) - \phi(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

(Como de costumbre, $\mathbf{u}_k$ es el k-ésimo vector coordenado unitario.) Por la aditividad de la integral, podemos escribir

$$\phi(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k) - \phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\lambda\mathbf{u}_k)} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha},$$

donde la curva Γ que une $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k$ es cualquiera con tal de que sea una poligonal contenida en S. Un tal camino puede venir dado como sigue:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (1 - t)\mathbf{x} + t(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k), \quad \text{donde} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La curva así descrita es un segmento rectilíneo que une $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u}_k$, y por lo tanto está contenida en $N(\mathbf{x}; \delta)$. Cada componente de $\boldsymbol{\alpha}$ posee una derivada continua en $(0, 1)$ dada por

$$\alpha'_i(t) = 0, \quad \text{si } i \neq k, \qquad \alpha'_k(t) = \lambda, \quad \text{si } t \in (0, 1).$$

Por consiguiente podemos escribir

$$\phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u}_k) - \phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 f_i[\boldsymbol{\alpha}(t)]\alpha'_i(t)\, dt$$
$$= \lambda \int_0^1 f_k[\boldsymbol{\alpha}(t)]\, dt = \lambda \int_0^1 g(t, \lambda)\, dt,$$

donde $g(t, \lambda) = f_k[(1 - t)\mathbf{x} + t(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u}_k)]$. Puesto que g es continua en el rectángulo cerrado

$$\{(t, \lambda) |\, 0 \le t \le 1,\ -\delta \le \lambda \le \delta\},$$

podemos aplicar el Teorema 9-35 para obtener

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_0^1 g(t, \lambda)\, dt = \int_0^1 g(t, 0)\, dt = \int_0^1 f_k(\mathbf{x})\, dt = f_k(\mathbf{x}).$$

Esto prueba que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u}_k) - \phi(\mathbf{x})}{\lambda} = f_k(\mathbf{x}), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

y por tanto $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x}$ de S.

Naturalmente, la función potencial ϕ así construida depende de la elección del punto $\mathbf{x}_0$. Si ψ es otra función tal que $\nabla\psi = \mathbf{f}$, entonces $\nabla(\phi - \psi) = \mathbf{0}$ en toda la región S y esto significa que ϕ y ψ pueden difererir a lo sumo en una constante aditiva. [¿Por qué?]

10-13 Teorema de Green para rectángulos. En el caso bidimensional existe un teorema análogo al fundamental del cálculo integral que expresa una integral doble $\int_R f(x, y) d(x, y)$ como una integral de línea tomada a lo largo de un camino cerrado determinado por la frontera de R, siempre que el integrando f sea una derivada parcial. Este resultado es atribuido corrientemente a G. GREEN (1828) y se conoce como el *teorema de Green*. [De hecho, apareció mucho antes en los trabajos de GAUSS (1813) y LAGRANGE (1760).]

La demostración del teorema de Green no ofrece dificultades especiales cuando la región R es de tipo más bien sencillo tal como un rectángulo o un disco. Finalmente, demostraremos el teorema de Green para toda región R de E_2 limitada por una curva de Jordan rectificable. Por el momento, sin embargo, nos limitaremos al caso en que R es un rectángulo.

10—39 TEOREMA. (*Teorema de Green para rectángulos*). *Sean P y Q dos funciones reales definidas y continuas en un rectángulo cerrado*

$$R = [a, b] \times [c, d].$$

Supongamos que existen las derivadas parciales D_1Q y D_2P y son acotadas en el interior de R y también que existen las dos integrales dobles $\int_R D_1Q(x, y)\, d(x, y)$ e $\int_R D_2P(x, y)\, d(x, y)$. Si $\alpha = (a_1, a_2) \in \Gamma(R)$, donde *$\Gamma(R)$ es la frontera de R orientada positivamente, existe también la integral de línea*

$$\int_{\Gamma(R)} P\, da_1 + Q\, da_2$$

y tenemos

$$20)\qquad \int_R [D_1Q(x, y) - D_2P(x, y)]\, d(x, y) = \int_{\Gamma(R)} P\, da_1 + Q\, da_2.$$

NOTA. Corrientemente esta fórmula se escribe de la manera siguiente:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\Gamma(R)} P\, dx + Q\, dy.$$

Demostración. Cuando $g = Q$ y $h = P$, las hipótesis del Teorema 10-22 quedan satisfechas. La conclusión del Teorema 10-22 es entonces

$$21)\qquad \int_R (D_1Q - D_2P)\, d(x, y) = \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)]\, dy - \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)]\, dx.$$

Por otra parte (utilizando la notación de la Definición 9-70), tenemos $\Gamma(R) = \Gamma_1(A, B) + \Gamma_2(B, C) + \Gamma_3(C, D) + \Gamma_4(D, A)$ y por lo tanto

$$22)\qquad \int_{\Gamma(R)} = \int_{\Gamma_1(A,B)} + \int_{\Gamma_2(B,C)} + \int_{\Gamma_3(C,D)} + \int_{\Gamma_4(D,A)}$$

El camino $\Gamma_1(A, B)$ es descrito por la función $\alpha = (a_1, a_2)$, donde $a_1(t) = t$, $a_2(t) = c$, $a \leq t \leq b$. (Ver Fig. 10-6.)
Así, el Teorema 10-33 da

$$\int_{\Gamma_1(A,B)} P\, da_1 + Q\, da_2 = \int_a^b P(t, c)\, dt.$$

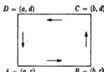


FIG. 10-6. Representación geométrica del camino Γ (R).

Del mismo modo, encontramos

$$\int_{\Gamma_2(B,C)} = \int_c^d Q(b, t)\, dt, \qquad \int_{\Gamma_3(C,D)} = -\int_a^b P(t, d)\, dt,$$

$$\int_{\Gamma_4(D,A)} = -\int_c^d Q(a, t)\, dt.$$

Combinando estas integrales como se indica en 22) y comparando con 21) encontramos inmediatamente la conclusión del teorema.

10-14 Teorema de Green para regiones limitadas por curvas rectificables de Jordan. Entenderemos por *región de Jordan*, la reunión de una curva rectificable de Jordan (en E_2) con su interior. En este párrafo probaremos que la fórmula 20) del teorema de Green es válida siempre que R es una región de Jordan. La demostración del teorema de Green para *rectángulos* fué particularmente sencilla porque pudimos expresar la integral doble y la integral de línea de 20) mediante integrales de Riemann. Es evidente que este método surtirá efecto para otras muchas regiones (por ejemplo, círculos o polígonos). Sin embargo, no disponemos de teoremas que nos permitan calcular la integral doble o la integral de línea de 20) cuando R es una región *arbitraria* limitada por una curva rectificable de Jordan. Por lo tanto, una demostración del teorema de Green con este orden de generalidad requiere un método distinto. Los tres teoremas siguientes preparan el terreno para tal demostración.

10—40 TEOREMA. *Sea Γ una curva de Jordan rectificable en E_2 descrita por una función vectorial $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Si $\Lambda(\Gamma)$ es la longitud de Γ y P es una función real definida y continua en Γ, tenemos*

$$\left| \int_{\Gamma[\alpha]} P\, d\alpha_1 \right| \leq \tfrac{1}{2}(M - m)\Lambda(\Gamma),$$

donde M y m representan, respectivamente, el máximo y el mínimo de P sobre Γ.

NOTA. Es válido un resultado parecido para la integral $\int_{\Gamma[\alpha]} P d\alpha_2$.

Demostración. Si c es una constante, tenemos $\int_{\Gamma[\alpha]} c d\alpha_1 = 0$. Luego

$$\int_{\Gamma[\alpha]} P\, d\alpha_1 = \int_{\Gamma[\alpha]} (P - c)\, d\alpha_1.$$

Tomando $c = \frac{1}{2}(M + m)$, tenemos $|P(x, y) - c| \leq \frac{1}{2}(M - m)$ para cada (x, y) sobre Γ, y aplicando el Teorema 10-36 se deduce el resultado que se da en el enunciado.

10—41 TEOREMA. *Sea Γ una curva simple rectificable en E_2 [de longitud $\Lambda(\Gamma)$. Para cada $h > 0$, designaremos con $\Gamma(h)$ el conjunto de puntos del plano cuya distancia a Γ no supera a h. Esto es,*

$$\Gamma(h) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in E_2, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq h \text{ para algún } \mathbf{y} \text{ sobre } \Gamma\}$$

Entonces $\Gamma(h)$ tiene contenido exterior de Jordan no superior a $\pi h^2 + 2h\,\Lambda(\Gamma)$.

Demostración. Si Γ es un segmento rectilíneo, la región $\Gamma(h)$ es la reunión de un rectángulo y dos semicírculos (como se ve en la Fig. 10-7), y en este caso el área de $\Gamma(h)$ es exactamente igual a $\pi h^2 + 2h\,\Lambda(\Gamma)$. Si Γ es una curva poligonal que consta de dos segmentos, el conjunto $\Gamma(h)$ es la reunión de dos rectángulos con parte común, dos semicírculos, y un sector circular (como muestra la Fig. 10-8, donde el sector está rayado.)

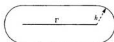


FIG. 10-7. $\Gamma(h)$ cuando Γ es un segmento.

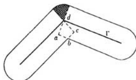


FIG. 10-8. $\Gamma(h)$ cuando Γ es una poligonal de dos lados.

Puesto que el área del sector circular no supera al área del cuadrilátero formado por la parte común de los rectángulos (*abcd* en la Fig. 10-8), se deduce en este caso que el área de $\Gamma(h)$ no supera a $\pi h^2 + 2h\,\Lambda(\Gamma)$. Puede emplearse un razonamiento parecido para demostrar la desigualdad

$$c[\Gamma(h)] \leq \pi h^2 + 2h\,\Lambda(\Gamma)$$

para todo polígono Γ utilizando el método de inducción (como es costumbre, $c(S)$ representa el contenido Jordan de S).

Para demostrar el teorema para cualquier curva rectificable Γ, consideremos un número dado δ positivo y construyamos una poligonal inscrita P con vértices $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ tal que todo punto del subarco de Γ que une $\mathbf{p}_{i-1}$ con $\mathbf{p}_i$ esté a una distancia $< \delta$ del segmento rectilíneo $L[\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i]$. (Esto puede hacerse utilizando un razonamiento análogo al seguido en la demostración del Teorema 8-33.) Si un punto está a una distancia $\leq h$ de Γ, estará a una distancia $< h + \delta$ de P. Luego, $\Gamma(h) \subset P(h + \delta)$ y tenemos

$$\bar{c}[\Gamma(h)] \leq c[P(h+\delta)] \leq \pi(h+\delta)^2 + 2(h+\delta)\Lambda(P)$$
$$\leq \pi(h+\delta)^2 + 2(h+\delta)\Lambda(\Gamma).$$

Pero, ya que δ es arbitrario, se deduce que debe ser

$$\bar{c}[\Gamma(h)] \leq \pi h^2 + 2h\Lambda(\Gamma),$$

como queríamos demostrar.

Una recta puede cortar infinitas veces a una curva rectificable de Jordan. (Ver Fig. 10-9, donde la parte «superior» de la frontera, que tiene por ecuación $y = x^2$ sen $(1/x)$, es cortada infinitas veces por el eje x.)

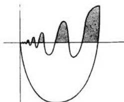


FIGURA 10-9.

Una tal recta descompone la región interior de la curva en una infinidad de subregiones. (Por ejemplo, hay una infinidad de regiones sombreadas en la Fig. 10-9.) A la vista de este hecho, puede parecer sorprendente el descubrir que por medio de segmentos rectilíneos verticales y horizontales, la región interior de una curva rectificable de Jordan siempre puede descomponerse en una colección *finita* de subregiones de diámetro arbitrariamente pequeño. Esto, en realidad, es lo que demostraremos en el próximo teorema — un resultado crucial que permite una demostración sencilla del teorema de Green en su forma general.

10—42 TEOREMA. *Dado $\delta > 0$, designemos con $S(\delta)$ el conjunto de cuadrados en el plano xy determinados por las rectas $x = m\delta$, $y = m\delta$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Sea R una región de Jordan limitada por una curva de Jordan rectificable Γ, y designemos con $\Gamma(R)$ la frontera de R orientada positivamente. Entonces R puede expresarse como la reunión de una colección finita de regiones $R_1, \dots, R_n$ sin parte común que tienen las propiedades siguientes:*

a) *Las subregiones interiores a Γ son cuadrados de la colección $S(\delta)$.*

b) *Las restantes subregiones (llamadas regiones marginales) tienen fronteras compuestas por arcos de Γ y segmentos de las rectas $x = m\delta$, $y = m\delta$ (siendo m un entero).*

c) *Cada región marginal puede incluirse en un cuadrado de lado 2δ.*

d) *Si $\Gamma(R_1), \dots, \Gamma(R_n)$ son las fronteras de $R_1, \dots, R_n$ orientadas positivamente, tenemos $\Gamma(R) = \Gamma(R_1) + \dots + \Gamma(R_n)$.*

e) *El número de cuadrados de $S(\delta)$ que tienen puntos comunes con Γ no supera a $4 + 4\,\Lambda(\Gamma)/\delta$, donde $\Lambda(\Gamma)$ es la longitud de Γ.*

Demostración. La idea de la demostración es ésta: En primer lugar, demostramos que trazando un número finito de segmentos horizontales tomados sobre las rectas $y = m\delta$ (m entero), podemos descomponer R en un número finito de subregiones, cada una de las cuales tiene una « altura » no superior a 2δ. (La *altura* de un conjunto A en E_2 es el sup de todas las diferencias $y - y'$, donde $(x, y) \in A$, $(x', y') \in A$. La *anchura* de A se define en forma análoga.) Trazando a continuación un número finito de segmentos verticales, tomados sobre las rectas $x = m\delta$ (m entero), cada una de las subregiones formadas puede aún subdividirse en un número finito de regiones cuya anchura es a lo sumo 2δ. En cada una de esas operaciones observamos que las curvas frontera satisfacen d).

Para llevar a cabo este plan, sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ una función que describa Γ, tal que $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma(R)$. Entonces α_1 y α_2 son funciones continuas de variación acotada definidas en un intervalo $[a, b]$. Designemos por y_1 e y_2 el mínimo y el máximo, respectivamente, de α_2 en $[a, b]$, y supongamos $y_1 = \alpha_2(t_1)$, $y_2 = \alpha_2(t_2)$. Sean $\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\alpha}(t_1)$, $\mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\alpha}(t_2)$ los correspondientes puntos sobre Γ. Si $y_2 - y_1 \leq 2\delta$, no es necesario trazar rectas horizontales. Por consiguiente supongamos que $y_2 - y_1 > 2\delta$. Existe entonces un entero m comprendido entre $y_1/\delta + \frac{1}{2}$ e $y_2/\delta - \frac{1}{2}$, que verificará

23) $$m\delta - y_1 > \delta/2 \quad \text{y} \quad y_2 - m\delta > \delta/2.$$

Puesto que $y_1 < m\delta < y_2$, la recta $y = m\delta$ corta a Γ (por lo menos dos veces). Queremos demostrar ahora que existe un segmento $L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ de la recta $y = m\delta$ que forma, con Γ, dos curvas de Jordan rectificables Γ_1 y Γ_2, con $\mathbf{p}_1$ sobre Γ_1 y $\mathbf{p}_2$ sobre Γ_2, de modo que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Sea C_1 un arco que une $\mathbf{p}_1$ con un punto $\mathbf{q}_1$ interior a Γ, estando $\mathbf{q}_1$ debajo de la recta $y = m\delta$ y siendo cada punto de C_1 (excepto $\mathbf{p}_1$) interior a Γ. (Esto es posible según el Teorema 8-41.) También podemos suponer que C_1 no corta la recta $y = m\delta$. Análogamente, sea C_2 un arco que une $\mathbf{p}_2$ a un punto $\mathbf{q}_2$ interior a Γ y situado por encima de la recta $y = m\delta$. Ya que $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ son ambos interiores a Γ, pueden unirse mediante una poligonal C interior a Γ y podemos suponer que ningún lado de C coincide con una parte de la recta $y = m\delta$. (Ver Fig. 10-10.) El polígono C debe cortar $y = m\delta$ por lo menos una vez (ya que $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ están en distinto semiplano respecto de la misma). Si $\mathbf{p}$ es un punto de intersección, existirá un segmento « máximo » $L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ de la recta $y = m\delta$ que contiene $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{u} \in \Gamma$, $\mathbf{v} \in \Gamma$, y además que el segmento abierto $L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sea interior a Γ. Únicamente puede existir un número finito de tales segmentos, ya que C tiene tan sólo un número finito de puntos comunes con la recta $y = m\delta$. Pero debe existir por lo menos uno de tales segmentos sobre el cual C tenga un número impar de intersecciones con $y = m\delta$. [¿Por qué?] Utilizando tal segmento, es evidente que $L[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ forma, con Γ, dos

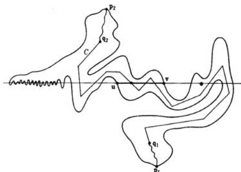


FIG. 10-10. Ilustración de la primera parte de la demostración del Teorema 10-42.

curvas de Jordan rectificables Γ_1 y Γ_2, una de las cuales contiene $\mathbf{p}_1$ (llamemos a esta Γ_1) y la otra contiene $\mathbf{p}_2$. Además estas curvas forman las fronteras de dos regiones R_1 y R_2 cuya reunión es R. Las fronteras orientadas positivamente $\Gamma(R_1)$ y $\Gamma(R_2)$ de R_1 y R_2 son tales que $\Gamma(R) = \Gamma(R_1) + \Gamma(R_2)$.

Escribamos ahora $v(\Gamma)$ para representar la variación total de α_2 en el intervalo paramétrico de Γ, y definamos los números $v(\Gamma_1)$ y $v(\Gamma_2)$ de manera análoga. Consecuencia del método seguido en la construcción de Γ_1 y Γ_2, resulta

$$v(\Gamma_1) + v(\Gamma_2) = v(\Gamma).$$

Además, haciendo uso de las desigualdades 23), obtenemos $v(\Gamma_1) > \delta$ y $v(\Gamma_2) > \delta$. Por tanto,

$$\delta < v(\Gamma_1) \leq v(\Gamma) - \delta \quad \text{y} \quad \delta < v(\Gamma_2) \leq v(\Gamma) - \delta.$$

Si la altura de una de las curvas, por ejemplo de Γ_1, es $> 2\delta$, podemos repetir la construcción anterior reemplazando Γ por Γ_1 y llegar a una nueva curva Γ_3 para la cual tengamos

$$\delta < v(\Gamma_3) \leq v(\Gamma_1) - \delta \leq v(\Gamma) - 2\delta.$$

Después de k operaciones, llegaríamos a una desigualdad de la forma

$$\delta < v(\Gamma) - k\delta, \quad \text{o} \quad (k+1)\,\delta < v(\Gamma).$$

Por lo tanto, el número k es limitado y este proceso no puede continuar indefinidamente. Esto es, tras un número finito de operaciones, todas las

curvas obtenidas mediante la construcción anterior tendrán una altura $\leq 2\delta$. Las correspondientes regiones limitadas por tales curvas (en número finito) también tendrán altura $\leq 2\delta$. De la misma manera, podemos dividir cada una de esas regiones por medio de segmentos verticales tomados sobre las rectas $x = m\delta$ (m entero) para completar la demostración de las partes a), b), c) y d) del teorema.

Para demostrar la parte *e*), consideremos $N = [\Lambda(\Gamma)/\delta]$ y descompongamos Γ en N arcos de longitud δ y (posiblemente) un arco de longitud $< \delta$. Cada arco atraviesa a lo sumo cuatro cuadrados de $S(\delta)$ y por tanto el número de cuadrados de $S(\delta)$ que tienen puntos comunes con Γ es a lo sumo $4(N + 1) < 4 + 4\Lambda(\Gamma)/\delta$.

Es ahora muy fácil probar el teorema de Green en la forma general siguiente :

10—43 TEOREMA. (*Teorema de Green para regiones limitadas por curvas de Jordan rectificables*). *Sean P y Q dos funciones reales definidas y continuas en una región de Jordan R limitada por una curva de Jordan rectificable Γ. Supongamos que las derivadas parciales D_2P y D_1Q existan y estén acotadas en el interior de R y que existan las dos integrales dobles $\int_R D_1Q\,(x, y)\,d(x, y)$ e $\int_R D_2P(x, y)\,d(x, y)$. Si $\alpha(a_1, a_2) \in \Gamma(R)$, siendo $\Gamma(R)$ la frontera de R orientada positivamente (ver Definición 9-69), existe entonces la integral de línea $\int_{\Gamma(R)} P\,da_1 + Q\,da_2$ y tenemos*

$$\int_R [D_1Q(x, y) - D_2P(x, y)]\,d(x, y) = \int_{\Gamma(R)} P\,da_1 + Q\,da_2.$$

Demostración. La fórmula del teorema de Green es equivalente a las *dos* fórmulas

$$-\int_R D_2P(x, y)\,d(x, y) = \int_{\Gamma(R)} P\,da_1$$

y

$$\int_R D_1Q(x, y)\,d(x, y) = \int_{\Gamma(R)} Q\,da_2.$$

Demostraremos la primera de estas fórmulas. (La demostración de la segunda es semejante.)

Fijado δ, consideramos el conjunto $S(\delta)$ de cuadrados determinados en el plano xy por las rectas $y = m\delta$, $x = m\delta$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), y descompongamos R en un número finito de subregiones sin parte común como se ha descrito en el Teorema 10-42. Designemos por $R_1, \ldots, R_k$ aquellas subregiones que son cuadrados de $S(\delta)$ situados enteramente dentro de la frontera Γ de R, y por $R_{k+1}, \ldots, R_n$ las regiones marginales. La reunión de las regiones marginales la llamamos T_δ.

Ya que ningún punto de una región marginal está a una distancia de Γ mayor que $2\delta\sqrt{2}$, debe ser $T_\delta \subset \Gamma(2\delta\sqrt{2})$ (en la notación del Teorema 10-41), y, por lo tanto, podemos escribir

$$c(T_\delta) \leq \bar{c}[\Gamma(2\delta\sqrt{2})] \leq \pi(2\delta\sqrt{2})^2 + 4\delta\sqrt{2}\Lambda(\Gamma),$$

donde $\Lambda(\Gamma)$ es la longitud de Γ.

Sean A una constante tal que $|D_2P(x, y)| \leq A$ para todo (x, y) de R y $B = 16 + 17\Lambda(\Gamma)$. Fijado $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta > 0$ (que depende de ε) de modo que sea $\delta < 1$ y que

$$\pi(2\delta\sqrt{2})^2 + 4\delta\sqrt{2}\Lambda(\Gamma) < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Designemos por M_p y m_p el máximo y el mínimo de P en la subregión R_p. Por la continuidad podemos también suponer que δ se elige de modo que

$$M_p - m_p < \frac{\varepsilon}{2B} \quad \text{para} \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Para este δ, tenemos

24) $$\left| \int_R D_2P(x, y)\, d(x, y) - \sum_{p=1}^{k} \int_{R_p} D_2P(x, y)\, d(x, y) \right|$$
$$= \left| \int_{T_\delta} D_2P(x, y)\, d(x, y) \right| \leq Ac(T_\delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

También, por el Teorema 10-40, tenemos

25) $$\left| \sum_{p=k+1}^{n} \int_{\Gamma(R_p)} P\, d\alpha_1 \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{p=k+1}^{n} (M_p - m_p)\Lambda(\Gamma_p) < \frac{\varepsilon}{2B} \sum_{p=k+1}^{n} \Lambda(\Gamma_p),$$

donde Γ_p es la frontera de R_p. Cada arco Γ_p se compone de porciones de Γ y porciones de los lados de cuadrados del sistema $S(\delta)$. Según el Teorema 10-42, a lo más $4 + 4\Lambda(\Gamma)/\delta$ de esos cuadrados tienen puntos comunes con Γ, y podemos, por tanto, escribir

$$\sum_{p=k+1}^{n} \Lambda(\Gamma_p) \leq \Lambda(\Gamma) + 4\delta\left(4 + \frac{4\Lambda(\Gamma)}{\delta}\right)$$
$$= 16\delta + 17\Lambda(\Gamma) < 16 + 17\Lambda(\Gamma) = B.$$

Por consiguiente, 25) implica

$$\left| \sum_{p=k+1}^{n} \int_{\Gamma(R_p)} P\, d\alpha_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como

$$\int_{\Gamma(R)} P\,da_1 = \sum_{p=1}^{k} \int_{\Gamma(R_p)} P\,da_1 + \sum_{p=k+1}^{n} \int_{\Gamma(R_p)} P\,da_1,$$

la última desigualdad implica

26)
$$\left| \int_{\Gamma(R)} P\,da_1 - \sum_{p=1}^{k} \int_{\Gamma(R_p)} P\,da_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicando el teorema de Green a cada cuadrado $R_p (p = 1, 2, \ldots, k)$, encontramos

$$\sum_{p=1}^{k} \int_{\Gamma(R_p)} P\,da_1 = -\sum_{p=1}^{k} \int_{R_p} D_2P(x, y)\,d(x, y).$$

Combinando ésta con 24) y 25), obtenemos

$$\left| \int_R D_2P(x, y)\,d(x, y) + \int_{\Gamma(R)} P\,da_1 \right| < \varepsilon.$$

Y siendo ε es arbitrario, esto prueba que $-\int_R D_2P(x, y)d(x, y) = \int_{\Gamma(R)} P da_1$.

Esta demostración del Teorema de Green fue publicada en 1951 por D. H. POTTS (*Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 26) y en parte está basada en ideas debidas a T. ESTERMANN, K. HU, J. RIDDER, y S. VERBLUNSKY.

10-15 Independencia del camino.

10—44 DEFINICIÓN. *Sea* $\mathbf{f}$ *una función continua en una región abierta* S *de* E_n *y sean* $\mathbf{p}$ *y* $\mathbf{q}$ *dos puntos de* S. *Se dice que la integral de línea* $\int_{\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ *es independiente del camino en* S *si*

$$\int_{\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\Gamma_1(\mathbf{p},\mathbf{q})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta}$$

para todos los caminos $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *que describen curvas* Γ *y* Γ_1 *tales que* $\Gamma \subset S$, $\Gamma_1 \subset S$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\boldsymbol{\beta} \in \Gamma_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. (Ver Fig. 10-11.)

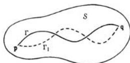


FIGURA 10-11.

Una parte importante de la teoría de las integrales de línea trata la cuestión siguiente: ¿Para qué funciones continuas $\mathbf{f}$ la integral $\int_{\Gamma(\mathbf{p},\mathbf{q})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ es independiente del camino para *toda* elección de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en S? Esto equivale a preguntar por aquellas funciones continuas $\mathbf{f}$ cuya integral de línea es cero a lo largo de

todo camino *cerrado* en S y es ésta una cuestión demasiado difícil para discutir aquí en su máxima generalidad. Sin embargo, puede ser contestada por completo si insistimos en que las curvas utilizadas en la integración sean *regulares a trozos*. Adoptaremos esta restricción en el resto de este párrafo. Se deduce entonces, del Teorema 10-37, que una condición *suficiente* para la independencia es la existencia de una función potencial ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$. Por otra parte, el Teorema 10-38 demuestra que esta condición es también *necesaria*.

En la práctica puede ser difícil determinar la independencia estableciendo la existencia de una función potencial. Vamos a considerar aquí una prueba mucho más útil para determinar la independencia (que no implica integración ni construcción de funciones potenciales). No obstante, para esta prueba exigimos que el integrando $\mathbf{f}$ sea diferenciable con continuidad en S.

Ante todo, deducimos una sencilla condición necesaria para la existencia de una función potencial.

10–45 TEOREMA. *Supongamos que* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C'$ *en una región abierta* S *de* E_n. *Si existe una función real* ϕ *tal que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$ *para cada* $\mathbf{x}$ *en* S, *las derivadas parciales de los componentes de* $\mathbf{f}$ *satisfacen las igualdades siguientes*:

$$D_i f_j(\mathbf{x}) = D_j f_i(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in S,\ i \neq j,\quad i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{27}$$

Demostración. Puesto que $\mathbf{f} = \nabla\phi$, tenemos $f_j = D_j\phi$. La hipótesis $\mathbf{f} \in C'$ implica $D_{i,j}\,\phi = D_{j,i}\,\phi$ para cada par $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$. De la relación $D_i f_j = D_{i,j}\,\phi$, obtenemos de manera inmediata la conclusión.

Naturalmente, en virtud del Teorema 10-38, las $n(n-1)/2$ igualdades de 27) proporcionan una sencilla condición necesaria para la independencia del camino. Sin embargo, lo que en realidad necesitamos en las aplicaciones es una condición *suficiente* para tal independencia. Las ecuaciones 27) ya dan una tal condición, siempre que impongamos una restricción a la «estructura» de la región S. Para ver que es necesario cierto tipo de restricción, consideremos el siguiente ejemplo en E_2.

EJEMPLO. Sea $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} < x_2 + y_2 < 2\}$ un «anillo» abierto como se muestra en la Fig. 10-12. Definamos en S dos funciones reales f_1 y f_2 como sigue:

$$f_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad f_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Con un sencillo cálculo vemos que

$$D_2 f_1(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = D_1 f_2(x, y)$$

para cada (x, y) en S.

Consideremos los dos puntos $A = (1, 0)$ y $B = (0, 1)$. Una curva Γ_1 en S que une A y B es el arco de círculo descrito por

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Como tenemos

$$f_1(x(t), y(t)) = -\operatorname{sen} t, \quad f_2(x(t), y(t)) = \cos t,$$
$$x'(t) = -\operatorname{sen} t, \quad y'(t) = \cos t,$$

resulta

$$\int_{\Gamma_1(A,B)} f_1\,dx + f_2\,dy = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Las mismas funciones x e y definidas en el intervalo $[\pi/2, 2\pi]$ describen otro arco de círculo Γ_2 en S que une B con A. La integral a lo largo de Γ_2 desde A hasta B es

$$\int_{\Gamma_2(A,B)} f_1\,dx + f_2\,dy = -\int_{\pi/2}^{2\pi} dt = -\frac{3\pi}{2}.$$

Así pues dos caminos que unen los mismos puntos A y B producen valores distintos para la integral de línea aunque las ecuaciones 27) se satisfacen en toda la región S.

Este ejemplo demuestra que el recíproco del Teorema 10-45 puede no ser cierto en general. Únicamente es válido el recíproco para una clase restringida de regiones S. En E_2 las regiones de esta clase se llaman regiones *simplemente conexas*, que pueden definirse como sigue :

10—46 DEFINICIÓN. *Se dice que una región S en E_2 es simplemente conexa si, para toda curva de Jordan Γ en S, la región interior de Γ es también un subconjunto de S.*

El anillo de la Fig. 10-12 no es simplemente conexa porque la región interior del círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$ no es un subconjunto de S. Hablando intuitivamente, la conexión simple equivale a la ausencia de « agujeros ».

El recíproco del Teorema 10-45 será ahora demostrado para regiones simplemente conexas en E_2.

10—47 TEOREMA. *Supongamos que S es una región abierta simplemente conexa en E_2. Consideremos que $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in C'$ en S y supongamos que*

$$D_1 f_2(\mathbf{x}) = D_2 f_1(\mathbf{x})$$

para cada $\mathbf{x}$ *de* S. *Existe entonces una función real* ϕ *tal que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$ *para todo* $\mathbf{x}$ *de* S.

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto fijo de S. Si $\mathbf{x}$ es un punto arbitrario de S, sean Γ_1 y Γ_2 dos *polígonos escalonados simples* en S que unen $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}$. (Tales curvas siempre existen a causa de las notas que siguen al Teorema 8-33.) Varias porciones de estos dos polígonos pueden coincidir a lo largo de ciertos segmentos rectilíneos. Las porciones restantes se cortarán a lo sumo un número finito de veces, y formarán las fronteras de un número finito de regiones, a las que podemos llamar $R_1, \ldots, R_m$. Como se ha supuesto que S es simplemente conexo, cada una de estas regiones R_k es un subconjunto de S. En

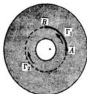


FIGURA 10-12.

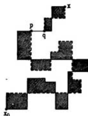


FIGURA 10-13.

la Fig. 10-13, se representa un ejemplo. La línea de trazo continuo representa Γ_1, la línea punteada representa Γ_2, y las regiones rayadas son las $R_1, \ldots, R_m$. Las dos curvas coinciden a lo largo del segmento $\mathbf{pq}$.

En lo que sigue observamos que la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo del camino *cerrado* $\Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + \Gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ es cero escribiéndola como una suma de integrales tomadas sobre los segmentos rectilíneos comunes a Γ_1 y Γ_2 más una suma de integrales tomadas alrededor de las fronteras de las regiones R_k. Las integrales sobre los segmentos comunes se anulan a pares (ya que cada segmento común es seguido dos veces en direcciones opuestas) y su suma es cero. La integral sobre la frontera de cada región R_k es nula en virtud del teorema de Green y la hipótesis $D_1f_2 = D_2f_1$. Se deduce que

$$\int_{\Gamma_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\Gamma_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta}, \tag{28}$$

donde $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ y $\boldsymbol{\beta} \in \Gamma_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$. Visto esto, podemos definir

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha},$$

donde Γ es cualquier polígono escalonado en S y $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ En virtud de 28), el número $\phi(\mathbf{x})$ así definido está completamente determinado por $\mathbf{x}$ y no depende del polígono escalonado particular usado para unir $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}$. El razonamiento empleado en la demostración del Teorema 10-38 puede usarse aquí de nuevo para probar que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Un resultado general análogo al del Teorema 10-47 no es de fácil demostración en E_n ($n > 2$). El punto crucial en la anterior demostración fue la aplicación del teorema de Green. Por lo que hace referencia a intentar el mismo tipo de razonamiento en E_n, precisamos de una generalización apropiada del teorema de Green de E_2 a E_n. Tal generalización existe y, para el caso $n = 3$, se conoce con el nombre de *teorema de Stokes*. Este se discutirá en el próximo capítulo en conexión con las integrales de superficie.

Por el momento, no obstante, podemos obtener una extensión del Teorema 10-47 a E_n, imponiendo a S la restricción de ser un *intervalo* n-dimensional.

10—48 TEOREMA. *Consideremos* $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in C'$ *en un intervalo abierto* S *en* E_n, *sea éste*

$$S = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Supongamos que

$$D_i f_j(\mathbf{x}) = D_j f_i(\mathbf{x}), \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \dots, n)$$

para cada $\mathbf{x}$ *en* S. *Existe entonces una función real* ϕ *tal que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$ *para todo* $\mathbf{x}$ *de* S.

Demostración. La idea de la demostración es ésta. Elejimos primero un punto $\mathbf{y}$ en S que se mantiene fijo. Para cada punto $\mathbf{x}$ de S consideramos la integral de línea $\phi(\mathbf{x})$ de $\mathbf{f}$ tomada desde $\mathbf{y}$ hasta $\mathbf{x}$ a lo largo de una quebrada convenientemente elegida y formada por aristas de un intervalo n-dimensional que tiene $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como vértices opuestos. Se demuestra entonces que ϕ es función potencial de $\mathbf{f}$.

El camino de integración no lo describiremos con detalle. En cambio definiremos $\phi(\mathbf{x})$ como suma de integrales de Riemann unidimensionales a las que se reduce la integral de línea considerada. Es decir, definimos

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{y_1}^{x_1} f_1(t_1, x_2, \dots, x_n)\, dt_1 + \int_{y_2}^{x_2} f_2(y_1, t_2, x_3, \dots, x_n)\, dt_2$$

$$+ \int_{y_3}^{x_3} f_3(y_1, y_2, t_3, x_4, \dots, x_n)\, dt_3 + \cdots$$

$$+ \int_{y_n}^{x_n} f_n(y_1, \dots, y_{n-1}, t_n)\, dt_n.$$

Puesto que x_1 tan sólo interviene en el límite superior de la primera integral, encontramos $D_1\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x})$. Para $j > 1$ utilizamos los Teoremas 9-37 y 9-38 al calcular $D_j\phi(\mathbf{x})$. Por ejemplo, cuando $j = 2$ tenemos

$$D_2\phi(\mathbf{x}) = \int_{y_1}^{x_1} D_2 f_1(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1 + f_2(y_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

En la primera integral podemos reemplazar $D_2 f_1$ por $D_1 f_2$ y calcularla entonces según el teorema fundamental del cálculo obteniendo

$$\begin{aligned} D_2\phi(\mathbf{x}) &= \int_{y_1}^{x_1} D_1 f_2(t_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1 + f_2(y_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= [f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_2(y_1, x_2, \ldots, x_n)] + f_2(y_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= f_2(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Para $j > 2$ el razonamiento es parecido. Para calcular $Dj\phi(\mathbf{x})$ aplicamos el Teorema 9-37 a las $j - 1$ primeras integrales y el Teorema 9-38 a la integral de lugar j. Utilizamos después las condiciones $D_j f_i = D_i f_j$ en las $j - 1$ primeras integrales que pueden calcularse por el teorema fundamental del cálculo. Hecho esto, todos los términos se destruyen unos con otros excepto uno que es $f_j(\mathbf{x})$. Esto demuestra que $D_j\phi(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x})$ para todo j, y por lo tanto que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

EJERCICIOS

Contenido Jordan.

10-1. Sea S un conjunto elemental en E_n. Supongamos que S pueda descomponerse de dos maneras como una reunión de intervalos no rampantes, por ejemplo $S = I_1 \cup \cdots \cup I_r$ y $S = J_1 \cup \cdots \cup J_p$. Demostrar que $\mu(I_1) + \cdots + \mu(I_r) = \mu(J_1) + \cdots + \mu(J_p)$. A partir de este resultado, deducir que $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$ siempre que S y T sean conjuntos elementales sin parte común.

10-2. a) Sea Γ una curva rectificable en E_n. Demostrar que Γ tiene contenido de Jordan n-dimensional nulo.

b) Sea R una región en E_2 que consiste en la reunión de una curva de Jordan rectificable con su interior. Demostrar que R es medible-Jordan.

10-3. Extender los resultados de los Ejercicios 9-25 y 9-26 a E_n.

10-4. Sea S un conjunto acotado en E_n que tiene a lo sumo un número finito de puntos de acumulación. Demostrar que $c(S) = 0$.

10-5. Sea f una función real continua definida en $[a, b]$. Designemos por S la gráfica de f, esto es, $S = \{(x, y) | y = f(x),\ a \leq x \leq b\}$. Demostrar que S tiene contenido Jordan bidimensional nulo.

10-6. Si S es un subconjunto de E_n con contenido exterior nulo, demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\bar{J}(P, S) < \varepsilon$ siempre que $|P| < \delta$.

[*Indicación:* Utilizar el método sugerido en la indicación al Ejercicio 9-4.]

Integración múltiple.

10-7. Sea f una función real definida en un conjunto S de E_n y supongamos $f(\mathbf{x}) \geq 0$ para cada $\mathbf{x}$ de S. El *conjunto ordenado* de f sobre S se define como el siguiente subconjunto de E_{n+1}:

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) | (x_1, \ldots, x_n) \in S,\ 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Si S es una región medible-Jordan en E_n y f es continua en S, demostrar que el conjunto ordenado de f sobre S tiene contenido Jordan $(n + 1)$-dimensional cuyo valor es $\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n)$. Interpretar este problema geométricamente cuando $n = 1$ y $n = 2$.

10-8. Sea f una función definida en el cuadrado unidad $R = [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 2y, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

a) Calcular la oscilación de f en cada punto interior de R.

b) Si $0 < \varepsilon \leq 1$, calcular $\bar{c}(J_\varepsilon)$. (J_ε se definió en el Teorema 10-13.)

c) Demostrar que $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y)\, dx)\, dy$ existe y encontrar su valor.

d) Demostrar que $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y)\, dy)\, dx$ existe y encontrar su valor.

e) Demostrar que $\int_R f(x, y)\, d(x, y)$ no existe.

10-9. Para cada número racional $x \neq 0$ en $[0, 1]$, $x = p/q$ (irreducible), sea $S(x)$ el siguiente subconjunto de E_2:

$$S(x) = \left\{\left(\frac{n}{q}, \frac{m}{q}\right) \middle| n = 0, 1, 2, \ldots, p, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, p\right\}.$$

Consideremos $S(0) = \{(0, 0)\}$. Si $\{x_1, x_2, \ldots\}$ representa el conjunto de los números racionales en $[0, 1]$, pongamos

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(x_k).$$

Sea f una función definida en el cuadrado unidad $R = [1, 0] \times [1, 0]$ como sigue:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \in S, \qquad f(x, y) = 1 \quad \text{si } (x, y) \in R - S.$$

Demostrar que $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dy]\, dx = \int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dx]\, dy = 1$, pero que la integral doble $\int_R f(x, y)\, d(x, y)$ no existe.

10-10. Si $f_1 \in R$ en $[a_1, b_1], \ldots, f_n \in R$ en $[a_n, b_n]$, demostrar que

$$\int_S f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n) = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\, dx_1\right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\, dx_n\right),$$

donde $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

10-11. Supongamos que $f \in R$ en S y que $\int_S f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. ($S$ es un subconjunto de E_n.) Consideremos $A = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in S,\ f(\mathbf{x}) < 0\}$ y supongamos que $c(A) = 0$. Demostrar que existe un conjunto B de contenido nulo tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x}$ en $S - B$.

10-12. Supongamos que $f \in R$ en S, siendo S una región de E_n y f continua en S. Demostrar que existe un punto $\mathbf{x}_0$ *interior* a S tal que

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)c(S).$$

10-13. Sea S una región abierta de E_n. Designemos por S_J el conjunto de subconjuntos de S medibles-Jordan. Sea F una función real definida en S_J. Decimos que F tiene una *derivada espacial* $F'(\mathbf{x})$ en un punto $\mathbf{x}$ de S siempre que se verifique lo siguiente: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo T de S_J que *contiene* $\mathbf{x}$, con contenido Jordan $c(T)$ positivo y diámetro $d(T) < \delta$, tenemos

$$\left| \frac{F(T)}{c(T)} - F'(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon.$$

Esto se escribe más brevemente así:

$$F'(\mathbf{x}) = \lim_{d(T)\to 0} \frac{F(T)}{c(T)}.$$

Si f es continua en S, definimos $F(T) = \int_T f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, si $T \in S_J$. Demostrar que F tiene una derivada espacial en cada punto de S y que

$$F'(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

(Esto puede considerarse como una extensión del Teorema 9-31 III) a las integrales múltiples.)

10-14. Sea f una función continua en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Para cada punto (x_1, x_2) interior a R, definimos

$$F(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \left(\int_c^{x_2} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Demostrar que $D_{1,2}F(x_1, x_2) = D_{2,1}F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$.

10-15. Designemos por T la siguiente región triangular en el plano:

$$T = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1 \right\}, \quad \text{donde } a > 0,\ b > 0.$$

Supongamos que f tiene una derivada parcial segunda $D_{1,2}f$ continua en T. Demostrar que existe un punto (x_0, y_0) en el segmento que une $(a, 0)$ con $(0, b)$ tal que

$$\int_T D_{1,2}f(x, y)\, d(x, y) = f(0, 0) - f(a, 0) + aD_1f(x_0, y_0).$$

Cambio de variable en una integral múltiple.

10-16. Probar que la fórmula de transformación 8) del Teorema 10-30 es válida si el Jacobiano se anula en un subconjunto de S de contenido cero.

[*Indicación*: Empleando la notación del Teorema 10-30, demostrar que $\mathbf{g}$ satisface una condición uniforme de Lipschitz sobre $\mathbf{g}^{-1}(X)$ y por lo tanto, para todo subconjunto T de $\mathbf{g}^{-1}(X)$ de contenido nulo, el conjunto $\mathbf{g}(T)$ también tiene contenido cero.]

10-17. Las siguientes fórmulas para transformar integrales dobles y triples se presentan en cálculo elemental. Obtener estas fórmulas como consecuencias del Teorema 10-30. En cada caso, describir las restricciones que deben imponerse a R y R' para su validez.

a) $$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta.$$

b) $$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{R'} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz.$$

c) $$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \iiint_{R'} f(r \cos \theta \operatorname{sen} \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \phi)\, r^2 \operatorname{sen} \phi\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

Integrales de línea.

10-18 Sea Γ una curva en E_2 descrita por α, siendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ si $t \in [0, 1]$. Calcular la integral de línea $\int_{\Gamma[\alpha]} y\, dx + (y^2 - x)\, dy$ si

a) $x(t) = y(t) = t$, b) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^2$,

c) $x(t) = t$, $y(t) = t^n$, $n > 0$, d) $x(t) = t$, $y(t) = \operatorname{sen}(\pi t/2)$.

10-19. Calcular las integrales de línea siguientes si Γ es el círculo unidad orientado positivamente con centro en el origen:

a) $\int_\Gamma (2x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy$.

b) $\int_\Gamma (2x - y)\, dx + (x + 3y)\, dy$.

c) $\int_\Gamma (x^2 - y^2)\, ds$ (s representa la longitud del arco).

10-20. Sea S una región abierta en E_2 simplemente conexa. Si u y v satisfacen en S las igualdades de Cauchy-Riemann (ver Teorema 6-24), decimos que v es conjugada de u.

a) Si v es conjugada de u, demostrar que $-u$ es conjugada de v.

b) En el supuesto de que u es armónica en S, demostrar que una función v conjugada de u podría encontrarse por medio de una integral de línea de la forma $\int_\Gamma -\partial u/\partial y\, dx + \partial u/\partial x\, dy$ tomada a lo largo de una curva conveniente Γ en S.

Representar la parte b) si $S = E_2$, y

c) $u(x, y) = e^y \cos x$

d) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

10-21. Sea Γ una curva en E_2 descrita por una función compleja z, siendo $z(t) = x(t) + iy(t)$ si $t \in [a, b]$. Sean u y v dos funciones reales definidas en Γ y consideremos $f = u + iv$. Suponiendo que exista la integral de contorno $\int_{\Gamma[z]} f(z)\, dz$, demostrar que puede expresarse por medio de integrales de línea reales como sigue:

$$\int_{\Gamma[z]} f(z)\, dz = \int_{\Gamma[z]} u\, dx - v\, dy + i \int_{\Gamma[z]} v\, dx + u\, dy.$$

10-22. Demostrar el Teorema 10-35.

Teorema de Green.

10-23. Sea S una región abierta en E_2 simplemente conexa. Supongamos que u y v tienen derivadas parciales continuas D_1u, D_2u, D_1v, D_2v en S que satisfagan las igualdades de Cauchy-Riemann. (Ver Teorema 6-24.) Si Γ es una curva de Jordan rectificable en S, hacer uso del Ejercicio 10-21 y del teorema de Green para probar que

$$\int_{\Gamma[z]} f(z)\,dz = 0, \quad \text{donde} \quad f = u + iv.$$

(Este es un resultado muy importante en la teoría de variable compleja y se conoce con el nombre de *teorema de la integral de Cauchy*. Alguna de sus consecuencias serán comentadas en el Capítulo 16.)

En los Ejercicios 10-24 y 10-25, R representa una región de Jordan en E_2 limitada por una curva de Jordan rectificable Γ, y $\Gamma(R)$ representa la frontera de R orientada positivamente, descrita por una función $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ si $t \in [a, b]$. Las funciones u y v así como sus derivadas parciales se suponen continuas en R.

10-24. Deducir las identidades siguientes:

a) $$\int_{\Gamma(R)} uv\,dx + uv\,dy = \int_R \left\{ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} d(x, y).$$

b) $$\frac{1}{2}\int_{\Gamma(R)} \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

$$= \int_R \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right) d(x, y).$$

10-25. Cuando existen las dos derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ escribimos $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. En los puntos en los que $\alpha'(t) \neq 0$, representemos por $\mathbf{n}(t)$ el vector unitario *normal exterior*, definido por la ecuación

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|}(y'(t), -x'(t)).$$

La *derivada normal* de u, representada por $\partial u/\partial n$, se define sobre Γ mediante la igualdad $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. Si s es la longitud de Γ, deducir las *identidades de Green*:

a) $$\int_{\Gamma(R)} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_R (v\nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla v)\,d(x, y).$$

b) $$\int_{\Gamma(R)} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds = \int_R (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\,d(x, y).$$

NOTA. La parte b) demuestra que

$$\int_{\Gamma(R)} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_{\Gamma(R)} u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds$$

cuando u y v son ambas armónicas en R.

CAPÍTULO 11

ANÁLISIS VECTORIAL

11-1 Introducción. En los capítulos anteriores vimos muchos ejemplos en los que complicadas fórmulas adquieren formas elegantes y sencillas cuando se expresan vectorialmente. Hasta aquí hemos utilizado los vectores, principalmente, con objeto de lograr tal simplificación. Históricamente, sin embargo, el uso generalizado de los métodos vectoriales llegó (hacia fines del siglo diecinueve) cuando se encontró que los vectores eran instrumentos idóneos para la exposición de ciertos conceptos geométricos y físicos. El estudio de tales métodos se llama ahora *análisis vectorial* y al desarrollo inicial de la teoría van asociados los nombres de HAMILTON, GRASSMANN, GIBBS, MAXWELL y HEAVISIDE. En este capítulo nos proponemos exponer los elementos de esta teoría.

11-2 Independencia lineal y bases en E_n. Todo vector $\mathbf{x}$ en E_n puede expresarse en forma única como una combinación lineal de n vectores especiales, a saber, los vectores coordenados unitarios

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{u}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Efectivamente, si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, tenemos $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$. La unicidad de la representación resulta del hecho de que

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. En este párrafo deseamos investigar la posibilidad de expresar cada $\mathbf{x}$ en E_n como una combinación lineal de otros conjuntos especiales de vectores.

11-1 DEFINICIÓN. *Sea $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ un conjunto finito de vectores en E_n. Se dice que el conjunto B engendra E_n, si todo vector en E_n puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$. El conjunto B se denomina linealmente independiente si, elegidos m escalares cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$,*

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0} \quad \textit{implica} \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

Un conjunto linealmente independiente que engendra E_n se dice que es una base de E_n.

Así pues, el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de E_n. Existen, no obstante, otras muchas bases. Por ejemplo, el conjunto $\{\mathbf{u}_1, 2\mathbf{u}_2, 3\mathbf{u}_3, \ldots, n\mathbf{u}_n\}$ es también una base de E_n. Es evidente que los vectores de un conjunto linealmente independiente, deben ser distintos y ninguno de ellos puede ser el vector nulo.

Nos referiremos brevemente a algunos hechos referentes a la independencia lineal y a las bases en E_n. (Para las demostraciones, ver § 2-4, 2-5, de Ref. 11-5.)

a) Si A es un conjunto linealmente independiente de vectores en E_n, existe una base B de E_n tal que $A \subset B$.

b) Toda base de E_n contiene exactamente n elementos.

c) Un conjunto B de n vectores en E_n forma una base de E_n si, y únicamente si, B es un conjunto linealmente independiente.

NOTA. La afirmación b) justifica el referirnos a E_n como a un espacio n-dimensional.

Si $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es una base de E_n y $\mathbf{x} \in E_n$, tenemos

1) $$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \xi_n\mathbf{b}_n,$$

donde $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son escalares (determinados con unicidad, ya que B es linealmente independiente). Los números $\xi_1, \ldots, \xi_n$ se llamaban los *componentes* de $\mathbf{x}$ *relativos a* B. Multiplicando $\mathbf{x}$ en 1) por un escalar λ se obtiene

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda\xi_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (\lambda\xi_n)\mathbf{b}_n$$

y por tanto esta operación puede ser aceptada operando sobre los componentes, como en el caso en que $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Análogamente, si

2) $$\mathbf{y} = \eta_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \eta_n\mathbf{b}_n,$$

tenemos $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)\mathbf{b}_n$. Esto significa que cualquiera que sea la base B elegida en E_n, la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ puede formarse por la adición de los componentes correspondientes.

Cuando consideramos el producto interno, la conclusión es ligeramente distinta. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vienen dados por 1) y 2), tenemos

3) $$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathbf{b}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j\mathbf{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i\eta_j(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j,$$

donde $a_{ij} = (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j)$. Así pues, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ es una «forma bilineal» de los componentes ξ_i y η_j con coeficientes a_{ij} determinados por los vectores base de B. Existe un tipo importante de bases para las que los coeficientes a_{ij} son *independientes* de B. Estas son las llamadas *bases ortonormales*.

11–2 DEFINICIÓN. *Un conjunto de vectores* $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ *se llama ortogonal si* $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$ *siempre que* $i \neq j$. *Si, además, cada* $\mathbf{b}_i$ *es de longitud unidad (esto es,* $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = 1$*), el conjunto se llama ortonormal.*

Para las bases ortonormales, la forma bilineal 3) se convierte en

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n.$$

Así pues, si nos limitamos a las bases ortonormales, podemos calcular $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ operando sobre los componentes con el mismo tipo de fórmula que la empleada en la Definición 6-12. En particular, el número $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$ será la suma de los cuadrados de los componentes de $\mathbf{x}$, prescindiendo de las bases ortonormales que usemos.

A partir de cualquier base dada, por ejemplo $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, es posible construir una base ortogonal $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ mediante el siguiente proceso (conocido por el *método de Gram-Schmidt*). Definimos $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ y para $m = 2, 3, \ldots, n$ tomamos

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{a}_m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_k)}{|\mathbf{b}_k|^2} \mathbf{b}_k.$$

Es fácil demostrar (por inducción) que el conjunto $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ así definido es realmente una base ortogonal (ver Ejercicio 11-1). Para obtener una base *ortonormal*, es necesario tan sólo reemplazar cada $\mathbf{b}_m$ por $\mathbf{b}_m/|\mathbf{b}_m|$.

11-3 Representación geométrica de vectores en E_3. En el Capítulo 3 se definieron los vectores como conjuntos de n números reales. Cuando $n = 2$ ó $n = 3$, pueden representarse geométricamente mediante el uso de segmentos de recta orientados. El segmento rectilíneo que une dos puntos distintos P y Q se llama orientado si uno de los dos, por ejemplo P, se llama el *origen*, y el otro, Q, el *extremo*. Designaremos entonces el segmento por $\overrightarrow{PQ}$ y lo representamos por una flecha como en la figura 11-1.

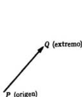


Fig. 11-1. Segmento rectilíneo orientado.

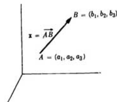


Fig. 11-2. Representación geométrica de un vector.

Para representar geométricamente los vectores en E_3, se introduce un sistema coordenado cartesiano rectangular con origen O. Sean A y B dos puntos en el espacio de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) respectivamente. El segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ se toma como una representación geométrica del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ si

$$x_1 = b_1 - a_1, \qquad x_2 = b_2 - a_2, \qquad x_3 = b_1 - a_3,$$

en cuyo caso escribimos $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ para expresar esta relación. (Ver Fig. 11-2.) Sabemos por la geometría analítica que el segmento $\overrightarrow{AB}$ tiene como longitud $|\mathbf{x}|$ y cosenos directores iguales a $x_1/|\mathbf{x}|$, $x_2/|\mathbf{x}|$ $x_3/|\mathbf{x}|$. En consecuencia, todo segmento orientado que tenga la misma longitud y los mismos cosenos directores que $\overrightarrow{AB}$ será una representación geométrica del mismo vector $\mathbf{x}$. Recíprocamente, dado un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \mathbf{0}$ en E_3, el segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ que une el origen O al punto P de coordenadas (x_1, x_2, x_3) será una representación geométrica de $\mathbf{x}$. El vector nulo $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ corresponde a un segmento «degenerado» en el que el origen y el extremo coinciden. A un tal «segmento» se le atribuye longitud 0 pero no tiene cosenos directores. Por comodidad, usaremos las palabras «vector» y «segmento de recta orientado», indistintamente, entendiendo que no hacemos distinción entre los segmentos que tienen la misma longitud y los mismos cosenos directores.

Las operaciones algébricas con vectores tienen interpretaciones geométricas sencillas cuando $n = 2$ ó $n = 3$. La suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ de dos vectores sigue *la regla del paralelogramo* como se representa en la figura 11-3. La diferencia $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ se interpreta en forma parecida. La multiplicación de $\mathbf{x}$ por un escalar λ tiene como efecto multiplicar la longitud de $\mathbf{x}$ por $|\lambda|$ y los cosenos directores de $\mathbf{x}$ por $\lambda/|\lambda|$ (si $\lambda \neq 0$). La discusión del párrafo anterior hace patente que las operaciones de adición, multiplicación por escalares, y el producto interior son «geométricamente invariantes». Esto es, no dependen en absoluto del sistema de coordenadas rectangulares que introduzcamos.

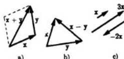


FIG. 11-3. Interpretación geométrica de operaciones algébricas con vectores: a) suma, b) diferencia, c) multiplicación por escalares.

Indudablemente, el lector está familiarizado con el hecho de que varias magnitudes físicas (por ejemplo, fuerzas, velocidades, aceleraciones) pueden representarse mediante segmentos de recta orientados. Si, por ejemplo, en la figura 11-3, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ representan fuerzas que actúan sobre una partícula, la resultante de estas dos fuerzas se representa por $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Debido a que tantas magnitudes físicas se combinan con la regla del paralelogramo, el análisis vectorial ha llegado a ser un instrumento importante en física.

11-4 Representación geométrica del producto interior en E_3. El producto interior $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ en E_3 es el número real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. En particular, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$. En la figura 11-4 se representa geométricamente el producto interior. El teorema del coseno de la trigonometría da

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo $(0 \leq \theta \leq 180^0)$ comprendido entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Por otra parte, tenemos

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y},$$

y, comparando las dos últimas igualdades, encontramos

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}| \cos \theta.$$

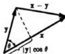


FIGURA. 11-4.

Esta fórmula interpreta geométricamente $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, y demuestra que tal producto no varía con una rotación de los ejes (esto es, cuando pasamos de una base ortonormal a otra).

11-5 El producto exterior de vectores en E_3. Además del producto interior $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dos vectores (en el cual el resultado es un escalar), existe otra manera de multiplicar vectores en E_3 que es especialmente útil en las aplicaciones de análisis vectorial. Este es el *producto exterior*, representado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, en el que el resultado es un nuevo vector en E_3.

11—3 DEFINICIÓN. *Sean dos vectores* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *en* E_3. *El producto exterior* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *se define como el vector*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1).$$

NOTA. Para recordar fácilmente la definición, se escribe el producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como un determinante:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

donde $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ son los vectores coordenados unitarios de costumbre.

A diferencia del producto interior, el exterior es *no conmutativo*. En efecto, tenemos $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$. (Esto resulta inmediatamente de la definición.) En particular, esto implica $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por otra parte, un sencillo cálculo demuestra que el producto exterior satisface la ley distributiva:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Además, tenemos evidentemente $(\lambda\mathbf{a}) \times (\mu\mathbf{b}) = (\lambda\mu)(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ para todas los escalares λ y μ.

La longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se determina fácilmente mediante el siguiente teorema:

11—4 TEOREMA. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

Demostración.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

Comparando estas igualdades se obtiene el resultado. (Ver también el Ejercicio 1-15.)

Ya que $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta$, siendo θ el ángulo $(0 \leq \theta, \leq 180^0)$ que forman **a** y **b**, el resultado del Teorema 11-4 implica

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta.$$

Geométricamente, el producto $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$ representa el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**. (Ver Fig. 11-5.)

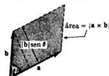


FIGURA 11-5.

11-6 Producto escalar triple. Antes de considerar ulteriores propiedades del producto exterior, es conveniente estudiar el *producto escalar triple* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ [cuyo significado no puede ser otro que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$].

11—5 TEOREMA. *Consideremos* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. *Entonces*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Demostración. Si escribimos $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3$, los números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los adjuntos de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ obtenidos al desarrollar el determinante

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

por los elementos de la primera fila. Por otra parte, el producto interior de **a** por $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es $\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \lambda_3a_3$. Como $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son también los adjuntos de a_1, a_2, a_3 en el determinante que aparece en 5), el teorema resulta inmediato.

El teorema que sigue nos dice que podemos intercambiar el punto y el aspa en un producto escalar triple sin que varie su valor.

11—6 TEOREMA. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.

Demostración.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

Podemos utilizar el Teorema 11-6 para demostrar que el producto exterior $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es un vector ortogonal a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

11—7 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. *Entonces* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=0$.

Demostración. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{b}=0$. Análogamente, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=0$.

Geométricamente : $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es perpendicular al plano determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

11—8 TEOREMA. *Sea* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ *un conjunto ortonormal de vectores en* E_3. *Entonces*

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3=\pm 1.$$

Demostración. Escribimos $\mathbf{a}_i=a_{i1}\mathbf{u}_1+a_{i2}\mathbf{u}_2+a_{i3}\mathbf{u}_3$ $(i=1, 2, 3,)$ El determinante de $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3$ no varía cuando se cambian las filas por las columnas. El producto del determinante por sí mismo es por tanto igual a

$$(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)^2=\det\,[a_{ij}]\det\,[a_{ji}]=\det\left[\sum_{k=1}^{3}a_{ik}a_{jk}\right]$$

$$=\det\,[\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j]=1.$$

11—9 TEOREMA. *Sea* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *una base ortonormal de* E_3. *Si* $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3=1$, *tenemos*

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_3,\quad \mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1,\quad \mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2.$$

Por otra parte, si $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3=-1$, *tenemos*

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=-\mathbf{v}_3,\quad \mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3=-\mathbf{v}_1,\quad \mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1=-\mathbf{v}_2.$$

Demostración. Escribamos $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3$. Entonces, si $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3=1$, tenemos

$$\lambda_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0, \qquad \lambda_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0,$$
$$\lambda_3 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = 1.$$

Luego, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$. Por el mismo procedimiento se demuestran las otras relaciones.

Estamos ahora en condiciones de estudiar el comportamiento del producto exterior respecto de un cambio de base.

11—10 Teorema. *Sea* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *una base ortonormal para* E_3. *Sean* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *dos vectores de* E_3 *y escribamos*

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3,$$
$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3.$$

Se tiene entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Demostración. Según la ley distributiva, tenemos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\mathbf{v}_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_i\beta_j(\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j).$$

Si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = +1$, del Teorema 11-9 resulta

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{v}_3 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{v}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{v}_2$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = -1$, el producto exterior $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el valor negativo de este determinante.

11—11 Teorema. *Un conjunto de vectores* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *en* E_3 *es linealmente independiente si, y tan sólo si,*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0.$$

Demostración. Supongamos que existen tres escalares λ_1, λ_2, λ_3 (no todos nulos), tales que

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Para fijar ideas, sea $\lambda_1 \neq 0$. Entonces, podemos escribir $\mathbf{a} = \mu_1\mathbf{b} + \mu_2\mathbf{c}$, siendo μ_1 y μ_2 escalares, y tenemos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mu_1\mathbf{b} + \mu_2\mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mu_2(\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mu_2(\mathbf{c} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = -\mu_2(\mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = -\mu_2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{c}) = 0.$$

Luego, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$, el conjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ debe ser linealmente independiente.

Recíprocamente, supongamos que $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ es linealmente independiente. Queremos demostrar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$. Por ser $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linealmente independiente, podemos hacer uso del método de Gram-Schmidt para construir una base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, y se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{v}_3 = \mathbf{c} - \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} - \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{v}_2|^2}\mathbf{v}_2.$$

Luego, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \times \mathbf{a})/|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Análogamente encontramos

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

ya que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0$. Pero, en virtud del Teorema 11-8, tenemos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \times \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} \cdot \frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|}\right) |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|\,|\mathbf{v}_3| = \pm\, |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|\,|\mathbf{v}_3| \neq 0.$$

11—12 DEFINICIÓN. *Sea $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ un conjunto de vectores en E_3 linealmente independiente. La terna ordenada de vectores $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ se llama una terna positiva si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} > 0$ y negativa si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} < 0$.*

NOTA. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son no colineales, la terna $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ es siempre positiva, ya que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$.

Al representar geométricamente vectores, es costumbre trazar los ejes coordenados de modo que los vectores que representan $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ formen un «sistema orientado en sentido directo» como se indica en la figura 11-6. Una vez hecho esto, la «dirección» del producto exterior $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ puede determinarse por la «regla de la mano derecha». A saber, cuando $\mathbf{a}$ se hace girar hacia $\mathbf{b}$ de tal manera que los dedos de la mano derecha indiquen la dirección del giro, entonces el pulgar señalará la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (En la figura 11—6 se representa un ejemplo.)

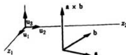


FIG. 11-6. Posiciones relativas de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en un sistema coordenado orientado según la regla de la mano derecha.

En términos geométricos, el Teorema 11-11 nos dice que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$ si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son vectores coplanarios y recíprocamente. Cuando no son coplanarios,

el valor absoluto de $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ coincide con el volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Es fácil ver esto empleando la fórmula

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\cos\phi = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta\,|\mathbf{c}|\cos\phi$$

y con auxilio de la figura 11-7. El área de la base es $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$ y la altura es $|\mathbf{c}|\cos\phi$. (En la figura 11-7, $\cos\phi > 0$ ya que $\phi < 90°$.)

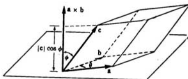


FIG. 11-7. Interpretación geométrica del producto escalar triple.

11-7 Derivadas de las funciones vectoriales.

11—13 DEFINICIÓN. *Sea $\mathbf{f}$ una función vectorial definida en un intervalo $[a, b]$ de E_1. La función vectorial $\mathbf{f}'$, definida por la igualdad*

$$\mathbf{f}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)], \quad \text{si } t \in [a, b],$$

se llama la derivada de $\mathbf{f}$. (En los extremos a y b, se consideran los límites por la izquierda y por la derecha respectivamente).

NOTA. Si $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, es evidente que $\mathbf{f}'$ existe si existen las tres derivadas f_1', f_2', f_3', en cuyo caso tenemos $\mathbf{f}' = (f_1', f_2', f_3')$, y recíprocamente.

En lo que sigue tendremos a menudo ocasión de calcular derivadas de funciones vectoriales y es conveniente conocer las siguientes reglas de diferenciación.

11—14 TEOREMA. *Sean λ una función real y $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ funciones vectoriales definidas en un intervalo $[a, b]$. Supuesta la existencia de las derivadas λ', $\mathbf{f}'$, y $\mathbf{g}'$, tenemos*

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}', \qquad (\lambda\mathbf{f})' = \lambda\mathbf{f}' + \lambda'\mathbf{f},$$
$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})' = \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}' + \mathbf{f}'\cdot\mathbf{g}, \qquad (\mathbf{f}\times\mathbf{g})' = \mathbf{f}\times\mathbf{g}' + \mathbf{f}'\times\mathbf{g}.$$

Estas fórmulas se demuestran de la misma manera que en el caso real. (Ver Ejercicio 11-9.) El teorema siguiente, no obstante, carece de teorema análogo en el caso de funciones reales.

11—15 TEOREMA. *Si existe $\mathbf{f}'$ y $|\mathbf{f}|$ es constante en $[a, b]$, entonces*

$$\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t) = 0 \quad \textit{para cada } t \textit{ en } [a, b].$$

Demostración. Ya que $\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}$ es constante, tenemos $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})' = 0$. Pero $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})' = 2\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}'$.

Geométricamente, esto significa que la derivada $\mathbf{f}'(t)$ de una función vectorial de módulo constante es perpendicular a $\mathbf{f}(t)$, con tal de que $\mathbf{f}'(t) \neq 0$.

11-8 Geometría diferencial elemental de curvas alabeadas. Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ una función vectorial continua definida en un intervalo $[a, b]$. La imagen de $[a, b]$ a través de $\mathbf{x}$ es una curva Γ en E_3. En el Capítulo 8 observamos que una tal función $\mathbf{x}$ puede ser considerada como la descripción del *movimiento* de una partícula a lo largo de la curva Γ. El intervalo paramétrico $[a, b]$ es interpretado entonces como un « intervalo tiempo », y la posición de la partícula viene dada en el tiempo t por el vector $\mathbf{x}(t)$. Si representamos geométricamente cada vector $\mathbf{x}(t)$ como en la figura 11-8, el extremo de $\mathbf{x}(t)$ recorre la curva Γ cuando t varía de a a b.

En el Capítulo 8 encontramos que una curva Γ es rectificable si los componentes de $\mathbf{x}$ son de variación acotada en $[a, b]$, y recíprocamente. En este capítulo trataremos ciertos aspectos de la teoría de curvas que utilizan las propiedades de diferenciabilidad de $\mathbf{x}$. Los correspondientes teoremas proporcionan una introducción a lo que se llama *geometría diferencial de curvas alabeadas.*

11-9 Vector tangente a una curva. En todo este párrafo y en el próximo, Γ representará una curva descrita por una función vectorial continua $\mathbf{x}$ definida en un intervalo $[a, b]$.

11—16 Definición. *Un punto $\mathbf{x}(t)$ se llama punto regular de Γ, si existe y no es nula la derivada $\mathbf{x}'(t)$, en cuyo caso $\mathbf{x}'(t)$ se denomina el vector tangente en este punto. Aquellos puntos en los que no existe $\mathbf{x}'(t)$ o en los que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$ se llaman puntos singulares de Γ.*

Observando la figura 11-9, es fácil ver que esta definición está de acuerdo con nuestra idea intuitiva de tangencia. Es conveniente también emplear terminología física cuando hacemos alusión a conceptos asociados con las curvas en E_3. Por ejemplo, el vector $\mathbf{x}(t)$ se cita como *vector posición* y $\mathbf{x}'(t)$ se llama el *vector velocidad*, también representado por $\mathbf{v}(t)$. El escalar $|\mathbf{v}(t)|$ se llama simplemente *velocidad*, o magnitud de la velocidad y se representa por $v(t)$.

11—17 Definición. *Definimos el vector tangente unitario* $\mathbf{T}$ *en los puntos regulares de* Γ, *del modo siguiente*:

6) $$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|}.$$

En función de la velocidad, la ecuación 6) se transforma en

7) $$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t).$$

Geométricamente, $\mathbf{T}(t)$ es un vector de longitud unidad que indica la « dirección » del movimiento en el instante t. El escalar $v(t)$ nos da la velocidad

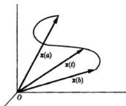


FIG. 11-8. Representación vectorial de una curva.

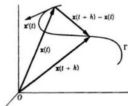


FIG. 11-9. Vector tangente.

en aquel instante. Evidentemente, Γ es una línea recta, si $\mathbf{T}$ es constante y recíprocamente.

11-10 Vectores normales, curvatura, torsión. Suponemos en este párrafo que la curva carece de puntos singulares y que existen las derivadas $\mathbf{x}''(t)$ y $\mathbf{x}'''(t)$ (cuando son necesarias). La existencia de $\mathbf{x}''(t)$ implica la de $\mathbf{T}'(t)$ [en virtud de 6)]. Ya que la longitud de $\mathbf{T}(t)$ es constante, la derivada $\mathbf{T}'(t)$ nos da un medio para medir la tendencia de $\mathbf{T}(t)$ a cambiar su « dirección ».

11—18 DEFINICIÓN. *La función no negativa* $\varkappa$ *definida por la ecuación*

8) $$\varkappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{x}'(t)|}$$

se llama la curvatura de la curva.

Si Γ es una recta, $\varkappa(t)$ es nula para todo t, ya que $\mathbf{T}'(t) = \mathbf{0}$. En los puntos en los que $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, el Teorema 11-15 nos dice que $\mathbf{T}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{T}(t)$. Esto justifica la terminología que se usa en la siguiente definición:

11—19 DEFINICIÓN. *En aquellos puntos de* Γ *en los que* $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, *definimos el vector normal principal unitario* $\mathbf{N}$ *mediante la ecuación*

9) $$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}.$$

Introduciendo la longitud de arco $s(t) = \int_a^t |\mathbf{x}'(u)|du$ y utilizando la ecuación 8), la 9) se convierte en

10) $$\mathbf{T}'(t) = \varkappa(t)s'(t)\mathbf{N}(t).$$

Para cada valor de t los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ determinan un plano llamado *plano osculador* a la curva. Si la curva es *plana*, el plano osculador coincide

con el plano de la curva. En general, sin embargo, el plano osculador cambia al variar t y, para estudiar este cambio, introducimos el vector binormal.

11—20 Definición. *El vector unitario* $\mathbf{B}$ *definido por la ecuación*

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \tag{11}$$

se llama el vector binormal.

La binormal es perpendicular al plano osculador ya que es perpendicular a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{N}$. Además, $\mathbf{B}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{T}$ forman un conjunto ortonormal (Ver Fig. 11-10.)

11—21 Teorema. $\mathbf{B}'(t)$ *es un múltiplo escalar de* $\mathbf{N}(t)$.

Demostración. Podemos escribir $\mathbf{B}' = \lambda_1\mathbf{N} + \lambda_2\mathbf{T} + \lambda_3\mathbf{B}$, donde $\lambda_1 = \mathbf{B}'\cdot\mathbf{N}$, $\lambda_2 = \mathbf{B}'\cdot\mathbf{T}$, $\lambda_3 = \mathbf{B}'\cdot\mathbf{B}$. Aquí $\lambda_3 = 0$, ya que $|\mathbf{B}| = 1$. Demostramos a continuación que $\lambda_2 = 0$. La diferenciación de 11) nos da

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}' \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}' = \mathbf{T} \times \mathbf{N}',$$

puesto que $\mathbf{T}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ [en virtud de 10)]. Por lo tanto,

$$\lambda_2 = \mathbf{B}'\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}'\cdot\mathbf{T} = 0.$$

Luego, $\mathbf{B}' = \lambda_1\mathbf{N}$, como se dijo.

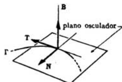


Figura 11-10.

11—22 Definición. *La función real* τ *definida por la ecuación*

$$\mathbf{B}'(t) = -\tau(t)s'(t)\mathbf{N}(t) \tag{12}$$

se llama la torsión de la curva.

Nota. Comparando la fórmula 12) con la 10), vemos que la torsión desempeña un papel semejante a la curvatura $\varkappa$. En realidad, algunas veces se cita la torsión como la «segunda curvatura» de la curva. Nos da una manera de medir la tendencia de la curva a «alabearse» al salir del plano osculador.

Aunque la curvatura $\varkappa(t)$ (tal como se ha definido) nunca es negativa, la torsión puede ser positiva o negativa. Para una curva plana, $\mathbf{B}$ es constante y $\tau = 0$.

Las fórmulas 10) y 12) expresan $\mathbf{T}'$ y $\mathbf{B}'$ en función del conjunto ortonormal $\{\mathbf{N}, \mathbf{T}, \mathbf{B}\}$. Para $\mathbf{N}'$ existe una fórmula parecida.

11—23 Teorema. $\mathbf{N}'(t) = -\varkappa(t)\,s'(t)\,\mathbf{T}(t) + \tau(t)\,s'(t)\,\mathbf{B}(t)$.

Demostración. La diferenciación de la ecuación $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ nos da

$$\mathbf{N}' = \mathbf{B}' \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \mathbf{T}' = -\tau s'\mathbf{N} \times \mathbf{T} + \varkappa s'\mathbf{B} \times \mathbf{N}.$$

Ya que $\mathbf{N} \times \mathbf{T} = -\mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \times \mathbf{N} = -\mathbf{T}$, el teorema queda demostrado.

Todas las fórmulas de los dos últimos párrafos se simplifican considerablemente cuando la velocidad $s'(t) = 1$ cualquiera que sea t. En este caso, obtenemos $\mathbf{v} = \mathbf{T}$, $\varkappa = |\mathbf{T}'|$, y

13) $$\mathbf{T}' = \varkappa\mathbf{N}, \quad \mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N} \quad \mathbf{N}' = -\varkappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}.$$

Estas tres fórmulas se conocen con el nombre de *fórmulas de Frenet*. Desempeñan un papel fundamental en la geometría diferencial de las curvas alabeadas. (Ver Ref. 11-6.)

NOTA. El haber supuesto que $|\mathbf{x}'(t)|$ nunca es cero implica que s es una función estrictamente creciente. Por lo tanto, siempre podemos obtener una representación de Γ con la longitud del arco como parámetro. (Ver Ejercicio 8-11.) Hecho esto, obtenemos la simplificación que acabamos de mencionar.

11-11 Campos vectoriales. En las aplicaciones de las matemáticas a la física y a ciertas ramas de la ingeniería (por ejemplo, en mecánica de fluidos), manejamos con frecuencia el concepto de *campo vectorial*. Matemáticamente, un campo vectorial no es otra cosa que una función vectorial definida en un cierto conjunto. Por ejemplo, si a cada punto $\mathbf{x}$ de la atmósfera asignamos un vector $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ que representa la velocidad del viento, queda definido un campo vectorial. Si $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ se expresa en función de sus componentes con relación a una cierta base, por ejemplo $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, podemos escribir

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_1(\mathbf{x})\mathbf{u}_1 + v_2(\mathbf{x})\mathbf{u}_2 + v_3(\mathbf{x})\mathbf{u}_3.$$

Los componentes v_1, v_2, v_3 son tres funciones reales y un estudio de los campos vectoriales equivale, en cierto sentido, al de «ternas» de funciones reales. Para distinguir entre campos vectoriales y funciones reales, a estas últimas se les suele llamar *campos escalares*. Por ejemplo, la temperatura en cada punto de la atmósfera define un campo escalar.

Uno de los modelos físicos más útiles de campo vectorial se presenta al considerar el movimiento de un fluido. A cada punto $\mathbf{x}$ (o partícula) del fluido atribuimos un vector $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ qu representa la velocidad de aquella partícula. Naturalmente, el campo puede o no cambiar con el tiempo. En un *flujo estacionario*, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ está completamente determinado por $\mathbf{x}$ y no depende del tiempo. Limitaremos nuestras consideraciones a los campos vectoriales estacionarios.

En problemas físicos que incluyen campos vectoriales es importante conocer no solamente el vector $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ en cada punto $\mathbf{x}$, sino también cómo varía dicho vector al pasar de un punto a otro. Para estudiar este cambio, disponemos del mecanismo de la diferenciación parcial que puede aplicarse a los componentes de $\mathbf{v}$. En general, las derivadas parciales de esos componentes dependerán de la elección de la base con relación a la que los componentes han

sido determinados. Por eso, las derivadas parciales son un tanto insatisfactorias para describir ciertas magnitudes físicas, en especial las que tienen una significación independiente por completo de la base. Mientras que, ciertas combinaciones de derivadas parciales, la *divergencia* y el *rotacional*, se usan para describir el comportamiento de los campos vectoriales. La divergencia y el rotacional son *independientes* de la base (si la base es ortonormal) y tienen un significado físico preciso. La divergencia de un campo vectorial es un *campo escalar* que, en el caso de una corriente de fluido, mide la proporción en la que el fluido fluye del entorno inmediato a cada punto. En un fluido incompresible desprovisto de «fuentes» o «sumideros», la divergencia es nula en cada punto. El rotacional de un campo vectorial es, por otra parte, otro campo vectorial que en cierto sentido mide la tendencia del fluido a girar en cada punto. Estos conceptos, divergencia y rotacional, serán definidos con precisión más tarde y sus propiedades serán estudiadas con detalle.

11-12 El campo gradiente en E_n. Hemos encontrado ya un ejemplo de un campo vectorial en conexión con el estudio de la derivación parcial. Si ϕ es una función real (un campo escalar) definida en un conjunto abierto S de E_n, el gradiente de ϕ, designado por $\nabla\phi$ o por grad ϕ, es una función vectorial definida por

14) $$\operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x}) = (D_1\phi(\mathbf{x}), \ldots, D_n\phi(\mathbf{x}))$$

en cada punto $\mathbf{x}$ de S en que existan las derivadas parciales. Las siguientes propiedades del gradiente son consecuencias inmediatas de la definición:

11—24 TEOREMA. *Sean ϕ y ψ dos funciones reales tales que existan $\nabla\phi$ y $\nabla\psi$ en un conjunto S de E_n. Entonces tenemos*

a) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$,
b) $\nabla(\phi\cdot\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$,
c) $\nabla(\phi/\psi) = (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)/\psi^2$ (en los puntos $\mathbf{x}$ en que $\psi(\mathbf{x}) \neq 0$).

En el caso $n = 3$, el gradiente posee una interesante interpretación geométrica. Sea c una constante y consideremos el conjunto S_c de puntos $\mathbf{x}$ de S donde $\phi(\mathbf{x}) = c$. En muchos casos, S_c es una superficie.† Si S_c tiene plano tangente en $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, sabemos desde el cálculo elemental que la ecuación de este plano es

$$D_1\phi(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + D_2\phi(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + D_3\phi(\mathbf{a})(x_3 - a_3) = 0.$$

Esto significa qu el vector $\nabla\phi(\mathbf{a})$ es *normal* al plano (y por esto normal a S_c) en el punto $\mathbf{a}$. El plano tangente existe siempre que $\nabla\phi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.)

† En la Definición 11-32 se da una definición precisa de superficie.

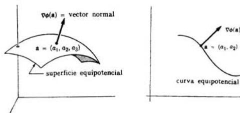


FIG. 11-11. Interpretación geométrica del vector gradiente.

El campo escalar ϕ cuyo gradiente es $\nabla\phi$ se llama *función potencial* del campo vectorial $\nabla\phi$. Las correspondientes superficies S_c se llaman *superficies equipotenciales* (o *superficies de nivel*). Si se trata de campos bidimensionales, cada conjunto S_c es una curva plana que se llama *curva equipotencial* (o de *nivel*). Las superficies (curvas) de nivel son ortogonales al vector gradiente en cada punto $\mathbf{a}$ en el que $\nabla\phi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. (Ver Fig. 11-11.)

En el Teorema 10-45 demostrábamos que si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C'$ en un conjunto abierto S de E_n y $\mathbf{f}$ tiene una función potencial ϕ, en cada punto $\mathbf{x}$ de S debe ser

15) $$D_i f_j(\mathbf{x}) = D_j f_i(\mathbf{x}), \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Observábamos también que la condición 15) *no es suficiente* para establecer la existencia del potencial a menos que S esté sometido a convenientes restricciones. Por ejemplo, el Teorema 10-48 nos dice que 15) es suficiente si S es un intervalo abierto en E_n. En el caso particular $n = 2$, podemos conseguir la suficiencia con una condición menos restrictiva para S, a saber, la conexión simple. (Ver Definición 10-46 y Teorema 10-47.)

11-13 El rotacional de un campo vectorial en E_3.

11—25 DEFINICIÓN. *Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ definida en un conjunto abierto S de E_3. Representamos con el símbolo* rot $\mathbf{f}$ *(que leemos rotacional de $\mathbf{f}$) a la función vectorial definida por*

16) $$\text{rot } \mathbf{f} = (D_2 f_3 - D_3 f_2,\ D_3 f_1 - D_1 f_3,\ D_1 f_2 - D_2 f_1),$$

siempre que existan las derivadas parciales del segundo miembro.

NOTA. La expresión de rot $\mathbf{f}$ se recuerda fácilmente introduciendo el artificio siguiente: Tratemos el operador ∇ como si fuera un « vector » simbólico, es decir, $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$, y formemos el producto exterior $\nabla \times \mathbf{f}$ de manera

puramente formal (utilizando la Definición 11-3). Encontramos entonces que $\nabla \times \mathbf{f}$ tiene los mismos «componentes» que rot $\mathbf{f}$ y convenimos en escribir rot $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$. Este artificio de notación permite recordar fácilmente ciertas fórmulas. Expresando $\nabla \times \mathbf{f}$ como un determinante, tenemos

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

sin olvidar que su desarrollo tiene un carácter puramente simbólico.

El teorema que sigue es una sencilla consecuencia de la Definición 11-25:

11—26 TEOREMA. *Sean* $\mathbf{f}$ *y* $\mathbf{g}$ *dos campos vectoriales tales que* rot $\mathbf{f}$ *y* rot $\mathbf{g}$ *existan en un conjunto abierto* S *de* E_3, *y sea* ϕ *un campo escalar tal que* $\nabla\phi$ *exista en* S. *Entonces tenemos*

a) $\text{rot } (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \text{rot } \mathbf{f} + \text{rot } \mathbf{g}$,

b) $\text{rot } (\phi\mathbf{f}) = \phi \text{ rot } \mathbf{f} + \nabla\phi \times \mathbf{f}$

Puede darse una interpretación física del rotacional: supongamos un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo con velocidad angular ω constante. Puede elegirse la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de manera que el vector velocidad $\mathbf{x}'$ de un punto cualquiera P del cuerpo venga dado por

$$\mathbf{x}' = (\omega\mathbf{u}_3) \times \mathbf{x} = -\omega x_2\mathbf{u}_1 + \omega x_1\mathbf{u}_2,$$

siendo $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3$ el vector posición $\overrightarrow{OP}$. (Ver Ejercicio 11-14.) El vector $\omega = \omega\mathbf{u}_3$ se llama vector *velocidad angular* del cuerpo. El rotacional de $\mathbf{x}'$ es

$$\text{rot } \mathbf{x}' = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ -\omega x_2 & \omega x_1 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\mathbf{u}_3 = 2\omega.$$

Esto es, el rotacional del vector velocidad de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular ω es 2ω.

NOTA. Los campos vectoriales $\mathbf{f}$ para los que rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ se llaman *irrotacionales*.

Utilizando 15) poniendo $n = 3$, obtenemos la importante fórmula

17) $$\text{rot}\,(\text{grad}\ \phi) = \mathbf{0},$$

con tal de que grad $\phi \in C'$ en un conjunto abierto de E_3. El Teorema 10-48, que proporciona un recíproco parcial de esa afirmación, puede ahora combinarse con 17) para dar:

11—27 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *un campo vectorial tal que* $\mathbf{f} \in C'$ *en un intervalo abierto de* E_3. *Entonces* $\mathbf{f}$ *es el gradiente de un potencial si* rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, *y recíprocamente.*

11-14 La divergencia de un campo vectorial en E_n. Hemos discutido la posibilidad de resolver la ecuación $\nabla\phi = \mathbf{f}$ si $\mathbf{f}$ es un campo vectorial dado. Ahora nos planteamos una cuestión parecida respecto a la ecuación $\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{f}$. Esto es, ¿cuándo un campo vectorial dado $\mathbf{f}$ es el rotacional de otro campo vectorial $\mathbf{g}$? Puede establecerse una condición necesaria y suficiente para resolver tal ecuación en función de un campo escalar: la *divergencia*, cuyas propiedades vamos a estudiar.

11—28 DEFINICIÓN. *Sea* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ *un campo vectorial definido en un conjunto abierto S de* E_n. *Designamos por* div $\mathbf{f}$ *el campo escalar definido por*

$$\text{div}\,\mathbf{f} = D_1 f_1 + D_2 f_2 + \cdots + D_n f_n,$$

siempre que existan las derivadas parciales del segundo miembro.

NOTA. También escribimos div $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

La divergencia goza de las propiedades elementales siguientes, análogas a las del rotacional:

11—29 TEOREMA. *Si* $\mathbf{f}$ *y* $\mathbf{g}$ *son dos campos vectoriales tales que* div $\mathbf{f}$ *y* div $\mathbf{g}$ *existen en un conjunto abierto de* E_n *y* ϕ *es un campo escalar tal que* $\nabla\phi$ *existe en S, tenemos*

a) $\text{div}\,(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \text{div}\,\mathbf{f} + \text{div}\,\mathbf{g}$,
b) $\text{div}\,(\phi\mathbf{f}) = \phi\,\text{div}\,\mathbf{f} + \nabla\phi \cdot \mathbf{f}$.

La demostración la dejamos como ejercicio. Para los campos vectoriales de tres dimensiones tenemos además la siguiente propiedad:

11—30 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *un campo vectorial cuyos componentes tienen derivadas parciales mixtas de segundo orden continuas en un conjunto abierto S de* E_3. *Entonces*

$$\text{div}\,(\text{rot}\ \mathbf{f}) = 0.$$

Demostración.

$$\text{div}\,(\text{rot}\ \mathbf{f}) = D_1(D_2 f_3 - D_3 f_2) + D_2(D_3 f_1 - D_1 f_3) + D_3(D_1 f_2 - D_2 f_1) = 0$$

El teorema anterior nos da pie para contestar la pregunta que nos formulamos al empezar este párrafo, a saber : ¿Qué campos vectoriales son rotacionales?

11—31 TEOREMA. *Sea* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *un campo vectorial dado cuyos componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un intervalo abierto* S *de* E_3. *Si* $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ *para cada* $\mathbf{x}$ *de* S, *existe entonces un campo vectorial* $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ *tal que* $\operatorname{rot} \mathbf{g} = \mathbf{f}$.

Demostración. Construiremos $\mathbf{g}$ como sigue : Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ un punto fijo de S. Para cada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de S, definamos

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = \int_{y_3}^{x_3} f_2(x_1, y_2, t_3)\, dt_3 - \int_{y_2}^{x_2} f_3(x_1, t_2, y_3)\, dt_2.$$

Por diferenciación encontramos, entonces

18) $$D_3 g_1(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, y_2, x_3), \qquad D_2 g_1(x_1, x_2, x_3) = - f_3(x_1, x_2, y_3).$$

Pongamos ahora

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = \int_{y_3}^{x_3} \left[\int_{y_1}^{x_1} D_3 f_3(t_1, x_2, t_3)\, dt_1 \right] dt_3.$$

La diferenciación da

19) $$D_3 g_2(x_1, x_2, x_3) = \int_{y_1}^{x_1} D_3 f_3(t_1, x_2, x_3)\, dt_1,$$

20) $$D_1 g_2(x_1, x_2, x_3) = \int_{y_3}^{x_3} D_3 f_3(x_1, x_2, t_3)\, dt_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) - f_3(x_1, x_2, y_3).$$

Definamos, después

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = - \int_{y_2}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{x_1} D_2 f_2(t_1, t_2, x_3)\, dt_1 \right] dt_2 + \int_{y_2}^{x_2} \left\{ f_1(x_1, t_2, x_3) + \int_{y_1}^{x_1} [D_2 f_2(t_1, t_2, x_3) + D_3 f_3(t_1, t_2, x_3)]\, dt_1 \right\} dt_2.$$

La diferenciación nos da

21) $$D_2 g_3(x_1, x_2, x_3) = - \int_{y_1}^{x_1} D_2 f_2(t_1, x_2, x_3)\, dt_1 + f_1(\mathbf{x}) + \int_{y_1}^{x_1} [D_2 f_2(t_1, x_2, x_3) + D_3 f_3(t_1, x_2, x_3)]\, dt_1$$

$$= f_1(\mathbf{x}) + \int_{y_1}^{x_1} D_3 f_3(t_1, x_2, x_3)\, dt_1,$$

$$D_1 g_3(x_1, x_2, x_3) = -\int_{y_2}^{x_2} D_2 f_2(x_1, t_2, x_3)\, dt_2 + \int_{x_2}^{y_2} \operatorname{div} f(x_1, t_2, x_3)\, dt_2$$

22) $$= -\int_{y_2}^{x_2} D_2 f_2(x_1, t_2, x_3)\, dt_2 = -f_2(\mathbf{x}) + f_2(x_1, y_2, x_3).$$

De 21) y 19) obtenemos $D_2 g_3(\mathbf{x}) - D_3 g_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$, en tanto que 18) y 22) dan $D_3 g_1(\mathbf{x}) - D_1 g_3(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$. Análogamente, 20) y 18) nos dan $D_1 g_2(\mathbf{x}) - D_2 g_1(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x})$. Por consiguiente, rot $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ como queríamos demostrar.

NOTA. Los campos vectoriales para los que div $\mathbf{f} = 0$ se llaman *solenoidales*.

El Teorema 11-30 establece que una condición necesaria para que un campo vectorial $\mathbf{f}$ sea el rotacional de otro campo vectorial es que div $\mathbf{f} = 0$. Es importante darse cuenta que esta condición *no siempre es suficiente*. Si div $\mathbf{f} = 0$ en un cierto conjunto S, puede o no existir un campo vectorial $\mathbf{g}$ tal que rot $\mathbf{g} = \mathbf{f}$. Un contraejemplo lo da el Ejercicio 11-34. Hemos demostrado en el Teorema 11-31 que un tal $\mathbf{g}$ *existe* si S es un *intervalo* tridimensional. El resultado es también válido para algunos otros conjuntos de E_3 (por ejemplo, esferas y, en general, conjuntos abiertos convexos, pero el contraejemplo demuestra que no es válido sin alguna restricción en la «estructura» de S. Hablando intuitivamente, S debe tener la propiedad de que toda *superficie cerrada* en S sea la frontera de un sólido enteramente contenido en S. Esto equivale a la noción de conexión simple en E_2. Una formulación precisa de esta propiedad requiere una discusión de ciertos conceptos de topología combinatoria que no queremos introducir aquí.

11-15 El operador laplaciana. Sea ϕ un campo escalar definido en un conjunto abierto S de E_n. La definición de divergencia da origen a la fórmula

23) $$\operatorname{div} \nabla(\phi) = D_{1,1}\phi + D_{2,2}\phi + \cdots + D_{n,n}\phi,$$

siempre que existan las derivadas parciales del segundo miembro.

La divergencia de un gradiente se expresa simbólicamente como $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{f})$ y también se escribe más brevemente $\nabla^2\phi$. El «operador» ∇^2 se llama el *operador laplaciana* y cuando se aplica a un campo escalar el resultado viene dado por la fórmula 23). La ecuación diferencial en derivadas parciales $\nabla^2\phi = 0$ se conoce con el nombre de *ecuación de Laplace*. Se dice que una función ϕ es *armónica* en S si satisface la ecuación de Laplace en S.

El operador ∇^2 se aplica también a un campo vectorial $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ definiendo

$$\nabla^2\mathbf{f} = (\nabla^2 f_1, \ldots, \nabla^2 f_n).$$

Los cuatro operadores—gradiente, rotacional, divergencia, laplaciana—están relacionados por la siguiente identidad (cuyà demostración se deja como ejercicio) :

24) $$\text{rot}\,(\text{rot}\,\mathbf{f}) = \text{grad}\,(\text{div}\,\mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f}.$$

En los ejercicios del final del capítulo se dan otras propiedades del rotacional y de la divergencia.

11-16 Superficies. Un estudio más profundo de los campos vectoriales en E_3 requiere el uso de las *integrales de superficie*. Una integral de superficie puede considerarse como un concepto análogo a una integral de línea en la que el «camino» de integración no es una curva sino una *superficie*. Antes de tratar las integrales de superficie, debemos precisar lo que entenderemos por superficie.

Hablando en forma poco precisa, una superficie es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el espacio con «dos grados de libertad». Existen varias maneras de describir tal lugar por medio de fórmulas matemáticas. Si fijamos el sistema usual de coordenadas cartesianas xyz de la geometría analítica, obtenemos una superficie imponiendo una restricción a un punto variable (x, y, z). Esta restricción puede expresarse por medio de una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0.$$

Una ecuación de este tipo se llama la *representación implícita* de la superficie, y los ejemplos nos son familiares en la geometría analítica del espacio de tres dimensiones. Si tenemos la suficiente suerte de ser capaces de resolver esta ecuación explícitamente en una de las variables en función de las otras dos, por ejemplo z en función de x e y, llegamos a una ecuación de la forma

$$z = f(x, y),$$

que se llama la *representación explícita* de la superficie. Cada ecuación explícita, naturalmente, da origen a una implícita de la forma

$$f(x, y) - z = 0.$$

Si bien estas dos maneras de representar una superficie son muy útiles y corrientes, ocurre que para fines teóricos es más útil otro método de representación de una superficie : Este es la *representación paramétrica* o *vectorial*. En lugar de tener *una* ecuación que incluye x, y, y z, tenemos *tres* ecuaciones en las que x, y, y z se expresan como funciones de dos parámetros, u y v :

25) $$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Aquí, el punto (u, v) puede variar en cierta región bidimensional R en el plano uv, y los puntos correspondientes (x, y, z) describen una porción de una superficie en el espacio xyz. Esto es parecido a la representación de una curva alabeada mediante tres ecuaciones paramétricas que incluyen *un solo* parámetro. La presencia de dos parámetros hace posible transmitir dos grados de libertad al punto variable (x, y, z), como se sugiere en la figura 11-12.

Hasta ahora, no hemos dicho nada referente a la clase de restricciones que deben imponerse a las funciones definidas por 25) y a la región plana R. Cualquier intento de amplia generalización a este respecto introduce dificultades que no pueden tratarse con propiedad en un libro como éste. Por consiguiente, para eludir complicaciones en la teoría, impondremos un buen número de restricciones a los tipos de superficie que aquí serán consideradas. Afortunadamente, no obstante, gran parte de las superficies corrientes de la geometría analítica quedan incluidas en las definiciones que siguen.

NOTA. Para hacer uso de la notación vectorial, escribiremos (x_1, x_2, x_3) en lugar de (x, y, z), y (t_1, t_2) en lugar de (u, v).

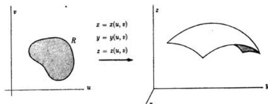


FIGURA 11-12.

11—32 DEFINICIÓN. *Sea Γ una curva de Jordan rectificable en E_2 y designemos por R la reunión de Γ con su interior. Supongamos que existen un conjunto abierto R' que contiene a R y una función vectorial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tal que $\mathbf{x} \in C'$ en R'. Entonces se dice que la imagen de R por medio de $\mathbf{x}$, que representamos por $S = \mathbf{x}(R)$, es una superficie paramétrica descrita por $\mathbf{x}$. Si, además, $\mathbf{x}$ es uno a uno en R, entonces se dice que S es una superficie paramétrica simple. En este caso la imagen de Γ será una curva de Jordan rectificable llamada el borde de S.*

NOTA. Esta definición es aún demasiado general para nuestro objetivo y por ello impondremos además las restricciones siguientes a la función $\mathbf{x}$. Definamos los vectores $D_1\mathbf{x}$ y $D_2\mathbf{x}$ como sigue:

$$D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) = D_1x_1(\mathbf{t})\mathbf{u}_1 + D_1x_2(\mathbf{t})\mathbf{u}_2 + D_1x_3(\mathbf{t})\mathbf{u}_3,$$

26) $$D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) = D_2x_1(\mathbf{t})\mathbf{u}_1 + D_2x_2(\mathbf{t})\mathbf{u}_2 + D_2x_3(\mathbf{t})\mathbf{u}_3,$$

si $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R$. Los puntos $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ de S en los que el producto exterior

$$D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{0}$$

se llaman *puntos regulares* de $\mathbf{x}$, y los puntos en los que $D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$ se llaman *puntos singulares* de $\mathbf{x}$. Supondremos, en lo que sigue, que todos los puntos de S excepto, posiblemente, un número finito de ellos son puntos regulares de $\mathbf{x}$. El significado geométrico de esta restricción será desarrollado a continuación.

Consideremos un segmento rectilíneo horizontal en R. Su imagen mediante $\mathbf{x}$ es una curva (llamada curva-t_1) contenida en la superficie S. El vector $D_1\mathbf{x}$ representa el vector velocidad de esta curva. De la misma manera $D_2\mathbf{x}$ es el vector velocidad de una curva-t_2, obtenida haciendo $t_1 =$ constante. Existen una curva -t_1 y una curva -t_2 que pasan por cada punto de la superficie. La restricción $D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{0}$ significa que los vectores velocidad $D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})$ y $D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})$ no son colineales en este punto. Luego, en cada punto regular, $D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})$ y $D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})$ determinan un plano llamado *plano tangente* a la superficie en el punto $\mathbf{x}(\mathbf{t})$. El vector $D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})$ es *normal* a este plano.

La figura 11-13 ilustra estas ideas para un hemisferio. Una función $\mathbf{x}$ que describe este hemisferio se define en una región rectangular $R = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ mediante la ecuación

27) $$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \operatorname{sen} t_1 \cos t_2 \mathbf{u}_1 + \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 \mathbf{u}_2 + \cos t_1 \mathbf{u}_3.$$

En este caso, los parámetros t_1 y t_2 son las coordenadas esféricas corrientes (representadas en la Fig. 11-13). Un sencillo cálculo conduce a

$$D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \cos t_1 \cos t_2 \mathbf{u}_1 + \cos t_1 \operatorname{sen} t_2 \mathbf{u}_2 - \operatorname{sen} t_1 \mathbf{u}_3,$$
$$D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) = -\operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 \mathbf{u}_1 + \operatorname{sen} t_1 \cos t_2 \mathbf{u}_2,$$
$$D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \operatorname{sen} t_1 \mathbf{x}(\mathbf{t}).$$

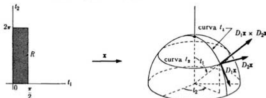


FIGURA 11-13.

En este caso la imagen de R no es una superficie paramétrica simple debido a que $\mathbf{x}$ no es uno a uno en R. Efectivamente, todo punto del segmento $t_1 = 0$, $0 \leq t_2 \leq 2\pi$ es representado sobre el mismo punto $(0, 0, 1)$ (el polo

Norte). El polo Norte es un punto singular de $\mathbf{x}$, ya que sen $t_1 = 0$. No obstante, la imagen $\mathbf{x}(R_0)$ de cualquier rectángulo cerrado R_0 contenido en el interior de R será una superficie paramétrica simple.

El producto exterior $D_1\mathbf{x} \times D_2\mathbf{x}$ desempeña un papel importante en la teoría de las superficies. Sus componentes pueden expresarse como Jacobianos por medio del teorema siguiente:

11—33 TEOREMA. *Si $D_1\mathbf{x}$ y $D_2\mathbf{x}$ son definidos por 26), tenemos*

$$28)\qquad D_1\mathbf{x} \times D_2\mathbf{x} = \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)}\mathbf{u}_1 + \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)}\mathbf{u}_2 + \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}\mathbf{u}_3.$$

Demostración. Tenemos

$$D_1\mathbf{x} \times D_2\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ D_1x_1 & D_1x_2 & D_1x_3 \\ D_2x_1 & D_2x_2 & D_2x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D_1x_2 & D_1x_3 \\ D_2x_2 & D_2x_3 \end{vmatrix}\mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} D_1x_3 & D_1x_1 \\ D_2x_3 & D_2x_1 \end{vmatrix}\mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} D_1x_1 & D_1x_2 \\ D_2x_1 & D_2x_2 \end{vmatrix}\mathbf{u}_3.$$

11-17 Representación explícita de una superficie paramétrica. Escribamos 28) en la forma

$$D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) = J_1(\mathbf{t})\mathbf{u}_1 + J_2(\mathbf{t})\mathbf{u}_2 + J_3(\mathbf{t})\mathbf{u}_3, \qquad \text{si } \mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R,$$

donde J_1, J_2, J_3 representan los Jacobianos correspondientes. En un punto regular no pueden anularse simultáneamente los tres Jacobianos. Supongamos, para fijar ideas, $J_3(\mathbf{t}_0) \neq 0$ en un punto interior de R. Escribamos la ecuación vectorial de S en forma de tres ecuaciones escalares,

$$29)\qquad x_1 - x_1(t_1, t_2) = 0, \qquad x_2 - x_2(t_1, t_2) = 0, \qquad x_3 - x_3(t_1, t_2) = 0.$$

Ya que $J_3(\mathbf{t}_0) \neq 0$, podemos aplicar el teorema de la función implícita para resolver las dos primeras ecuaciones de 29) respecto a t_1 y t_2 en función de x_1 y x_2. Es decir, si $y_1 = x_1(\mathbf{t}_0)$ e $y_2 = x_2(\mathbf{t}_0)$, existen un entorno bidimensional $N(y_1, y_2)$ y una función vectorial $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ tales que las ecuaciones

$$30)\qquad t_1 = g_1(x_1, x_2), \qquad t_2 = g_2(x_1, x_2)$$

son válidas siempre que $(x_1, x_2) \in N(y_1, y_2)$ y, cuando sustituimos 30) en 29) las dos primeras ecuaciones de 29) se satisfacen idénticamente. La tercera ecuación 29) se convierte en

$$31)\qquad x_3 = x_3[g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)] = \phi(x_1, x_2),$$

Esto significa que siempre tenemos una *representación explícita* de S, por lo menos *localmente*, en un entorno de cada punto regular.

Naturalmente, puede ocurrir que la ecuación 31) describa la *totalidad* de S. En este caso, podemos «identificar» el plano-t_1t_2 y el plano-x_1x_2 y la ecuación vectorial de S puede escribirse como sigue:

32) $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \phi(t_1, t_2)\mathbf{u}_3$, si $\mathbf{t} \in R$.

Cuando una superficie paramétrica S es descrita por una ecuación de la forma 32), el conjunto R se llama la *proyección* de S sobre el plano — x_1x_2. (Ver figura 11-14.) Cuando 32) es válida, es fácil ver que el producto vectorial fundamental se convierte en

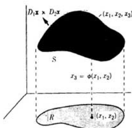


FIG. 11-14. Representación explícita de una superficie paramétrica.

$$D_1\mathbf{x} \times D_2\mathbf{x} = - D_1\phi\mathbf{u}_1 - D_2\phi\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3.$$

Así el vector $D_1\mathbf{x} \times D_2\mathbf{x}$ siempre tiene un componente positivo en la dirección $\mathbf{u}_3$. Naturalmente, son válidas relaciones parecidas que se obtienen al intercambiar los papeles de x_2 y x_3 o los de x_1 y x_3.

11-18 Área de una superficie paramétrica. Consideremos una superficie paramétrica S descrita por una función vectorial $\mathbf{x}$ definida en una región R de E_2. Escribamos $\mathbf{V}_1 = D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})$ y $\mathbf{V}_2 = D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})$ si $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R$. Si imaginamos que t_1 y t_2 representan «tiempo», entonces, cuando t_1 se incrementa en Δt_1, un punto originariamente en $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ se desplaza a lo largo de una curva-t_1 a una distancia aproximadamente igual a $|\mathbf{V}_1|\,\Delta t_1$ (ya que $|\mathbf{V}_1|$ representa la «velocidad» a lo largo de la curva-t_1). De la misma manera, en el tiempo Δt_2 un punto de una curva -t_2 se desplaza a una distancia aproximadamente igual a $|\mathbf{V}_2|\,\Delta t_2$. Luego un rectángulo en R que tenga por área $\Delta t_1\,\Delta t_2$ es transformado sobre una porción de S que es «aproximadamente» un paralelogramo cuyos lados son los vectores $\mathbf{V}_1\,\Delta t_1$ y $\mathbf{V}_2\,\Delta t_2$. (Ver Fig. 11-15.) El área del paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{V}_1\,\Delta t_1$ y $\mathbf{V}_2\,\Delta t_2$ es la longitud de su producto exterior, que es

$$|(\mathbf{V}_1\,\Delta t_1) \times (\mathbf{V}_2\,\Delta t_2)| = |\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2|\,\Delta t_1\,\Delta t_2 = |D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|\,\Delta t_1\,\Delta t_2.$$

Por consiguiente, el número $|D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|$ representa un factor de «ampliación» local para el área. Esta observación sugiere la siguiente definición para el área de una superficie:

11—34 DEFINICIÓN. *Sea S una superficie paramétrica descrita por una función vectorial $\mathbf{x}$ definida en una región R de E_2. El área de S se define como el valor de la integral doble siguiente:*

33)
$$\int_R |D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|\, d(t_1, t_2).$$

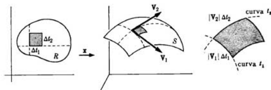


FIGURA 11-15.

El lector debería observar la semejanza entre la 33) y la integral $\int_a^b |\mathbf{x}'(t)|dt$ para calcular la longitud de una curva descrita por $\mathbf{x}$. El integrando en 33) puede expresarse como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los Jacobianos que aparecen en 28). Si escribimos $\mathbf{V}_1 = D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})$ y $\mathbf{V}_2 = D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})$, el Teorema 11-4 nos da una nueva fórmula para calcular $|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2|$, a saber,

34)
$$|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2|^2 = |\mathbf{V}_1|^2|\mathbf{V}_2|^2 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)^2.$$

En geometría diferencial es costumbre introducir la notación

$$E = |\mathbf{V}_1|^2, \qquad F = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2, \qquad G = |\mathbf{V}_2|^2,$$

con la cual la 34) da $|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2| = \sqrt{EG - F^2}$.

11-19 Suma de superficies paramétricas. Representemos con R_1 y R_2 dos regiones *cerradas* en E_2 cuyas fronteras Γ_1 y Γ_2 son curvas de Jordan rectificables. Supongamos que la región interior de Γ_2 es externa a Γ_1 y que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ es un arco que une dos puntos distintos, como representa la figura 11-16 a). Sean S_1 y S_2 dos superficies paramétricas descritas por las funciones vectoriales $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ definidas en R_1 y R_2, respectivamente. Supongamos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ representan $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ sobre el mismo arco, esto es, supongamos que $\mathbf{x}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \mathbf{y}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. Representemos por $C_1 = \mathbf{x}(\Gamma_1)$ y $C_2 = \mathbf{y}(\Gamma_2)$ los bordes de S_1 y S_2 y supongamos que $S_1 \cap S_2 = C_1 \cap C_2$. En otras palabras, S_1 y S_2 deben cortarse por lo menos a lo largo de una parte de un borde, pero no en otros puntos que los de $C_1 \cap C_2$. La reunión $S_1 \cup S_2$ se llama entonces la *suma* de las superficies S_1 y S_2 y se escribe $S_1 + S_2$. Algunas de las posibilidades que pueden presentarse se ven en la figura 11-16, donde R_1 y R_2 son tomadas como rectángulos.

Si $C_1 \cap C_2 = C_1 = C_2$, la suma $S_1 + S_2$ se llama una *superficie cerrada.* Asimismo, la adherencia de $(C_1 \cup C_2) - (C_1 \cap C_2)$ se llama el *borde* de $S_1 + S_2$. Nos limitaremos a aquellas superficies $S_1 + S_2$ cuyos bordes son la reunión a lo sumo de un número finito de curvas cerradas simples. Por ejemplo, en la figura 11-16 b) y d), el borde de $S_1 + S_2$ es una curva cerrada simple, pero en c) consta de dos curvas. En e) consiste en tres curvas, mientras que la superficie de f) no tiene borde y es, por tanto, una superficie cerrada.

Si la suma $S_1 + S_2$ no es una superficie cerrada, tiene un borde (llamémosle C) y podemos proceder a definir $(S_1 + S_2) + S_3$, si S_3 es una superficie paramétrica adecuada. Debemos suponer que las regiones R_2 y R_3 asociadas a S_2 y S_3 tienen exactamente un arco común. Las funciones que describen S_2 y S_3 deben representar $R_2 \cap R_3$ sobre el mismo conjunto y debemos tener $(S_1 + S_2) \cap S_3 = C \cap C_3$. Cuando esas condiciones se satisfacen, la reunión $(S_1 + S_2) \cup S_3$ se llama la *suma* $(S_1 + S_2) + S_3$. Un sencillo ejercicio de álgebra de conjuntos demuestra que siempre que podemos formar $(S_1 + S_2) + S_3$

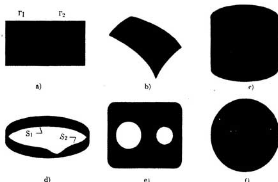


FIG. 11-16. La suma de dos superficies paramétricas.

y $S_2 + S_3$, también podemos formar entonces $S_1 + (S_2 + S_3)$ y tenemos $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$, de manera que esta adición es asociativa. El proceso se extiende a un número finito de sumandos en la misma forma, con el convenio de que la adición no está definida si uno de los sumandos

es una superficie cerrada. En lo que sigue nos limitaremos a las superficies que están formadas de esta manera mediante la adición de un número finito de superficies paramétricas. También, suponemos siempre que el borde (si hay alguno) es la reunión de un número finito de curvas cerradas simples. El área de una suma de superficies paramétricas se define como la suma de las áreas de los sumandos.

11-20 Integrales de superficie. Sea S una superficie descrita por una función vectorial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ definida en una región R de E_2. En los puntos regulares podemos definir dos funciones vectoriales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ como sigue:

35) $$\mathbf{n}_1(\mathbf{t}) = \frac{D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})}{|D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|}, \qquad \mathbf{n}_2(\mathbf{t}) = -\,\mathbf{n}_1(\mathbf{t}), \quad \text{si } \mathbf{t} \in R.$$

Para cada $\mathbf{t}$, ambos vectores $\mathbf{n}_1(\mathbf{t})$ y $\mathbf{n}_2(\mathbf{t})$ son vectores unitarios *normales* a la superficie.

11–35 DEFINICIÓN. *Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ una función vectorial definida en la superficie paramétrica S antes citada. Definamos*

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\mathbf{t})], \qquad si\ \mathbf{t} \in R,$$

y designemos con $\mathbf{n}$ cualquiera de las normales $\mathbf{n}_1$ o $\mathbf{n}_2$ definidas en 35). La integral de superficie de $\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}$ sobre S, representada por el símbolo $\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$, se define con la ecuación siguiente:

36) $$\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_R \mathbf{F}(\mathbf{t})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{t})|D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|\, d(t_1, t_2),$$

siempre que exista la integral doble del segundo miembro.

NOTA. Por el Teorema 11-33, la integral doble de 36) puede expresarse como una suma de tres integrales dobles, a saber,

$$\pm\left\{\int_R F_1 \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)}\, d(t_1, t_2) + \int_R F_2 \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)}\, d(t_1, t_2) + \int_R F_3 \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}\, d(t_1, t_2)\right\},$$

donde se toma el signo + o − según sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ o $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$. Estas integrales dobles también se escriben más brevemente como sigue:

37) $$\pm\left\{\iint_S f_1\, dx_2\, dx_3 + \iint_S f_2\, dx_3\, dx_1 + \iint_S f_3\, dx_1\, dx_2\right\}$$

o

38) $$\pm\iint_S f_1\, dx_2\, dx_3 + f_2\, dx_3\, dx_1 + f_3\, dx_1\, dx_2.$$

Las integrales de 37) y 38) son asimismo citadas como *integrales de superficie*. Así, por ejemplo, la integral de superficie $\iint_S f_3 dx_1\, dx_2$ se *define* por la ecuación

39) $$\iint_S f_3\, dx_1\, dx_2 = \int_R f_3[\mathbf{x}(t)]\, \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}\, d(t_1, t_2).$$

Esta notación está sugerida por la fórmula del cambio de variables en una integral doble. Notemos que el orden en que aparecen los símbolos dx_1 y dx_2 en 39) es importante ya que

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} = -\frac{\partial(x_2, x_1)}{\partial(t_1, t_2)}$$

y por consiguiente tenemos

$$\iint_S f_3\, dx_1\, dx_2 = -\iint_S f_3\, dx_2\, dx_1.$$

El vector unitario normal $\mathbf{n}$ puede expresarse en la forma

$$\mathbf{n} = \cos\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cos\alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cos\alpha_3 \mathbf{u}_3$$

y por tanto $\mathbf{f}\cdot\mathbf{n} = f_1 \cos\alpha_1 + f_2 \cos\alpha_2 + f_3 \cos\alpha_3$. Por este motivo, la fórmula 36) algunas veces se escribe como sigue:

$$\iint_S (f_1 \cos\alpha_1 + f_2 \cos\alpha_2 + f_3 \cos\alpha_3)\, d\sigma$$

$$= \pm \iint_S f_1\, dx_2\, dx_3 + f_2\, dx_3\, dx_1 + f_3\, dx_1\, dx_2,$$

determinando la elección de la normal el signo + o el signo −.

Observemos que si S es descrita *explícitamente* mediante una ecuación de la forma

$$\mathbf{x}(t) = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \phi(t_1, t_2)\mathbf{u}_3,$$

tenemos

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \pm \int_R (-F_1 D_1\phi - F_2 D_2\phi + F_3)\, d(t_1, t_2).$$

11-21 Teorema de Stokes. Recordemos que el teorema de Green expresa una relación entre una cierta integral doble extendida a una región plana y una integral de línea tomada a lo largo de su frontera. Existen dos caminos para generalizar aquel resultado en E_3. Una de esas extensiones, conocida como el teorema de Stokes, relaciona una integral de superficie tomada sobre una superficie paramétrica S con una integral de línea calculada sobre su

borde C. Más adelante se discutirá una segunda generalización del teorema de Green conocida con el nombre de *teorema de la divergencia*.

Con objeto de obtener el teorema de Stokes supondremos que S es una superficie paramétrica simple descrita por una función vectorial $\mathbf{x}$ definida en una región R de E_2, siendo la frontera de R una curva de Jordan Γ *regular a trozos*. También supondremos que los componentes de $\mathbf{x}$ poseen derivadas mixtas de segundo orden continuas en R. Representamos por $\Gamma(R)$ la frontera de R orientada positivamente y suponemos que es descrita por una $\alpha = (a_1, a_2)$ regular a trozos y definida en $[a, b]$. En estas condiciones el borde de S será una curva cerrada simple C (ver Fig. 11-17) descrita por una función γ definida por

$$\gamma(t) = \mathbf{x}[\alpha(t)], \qquad si\ t \in [a, b]$$

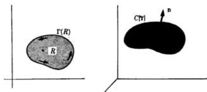


FIG. 11-17. Teorema de Stokes.

11—36 TEOREMA (*Stokes*). *En las hipótesis precedentes, sea* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *una función vectorial definida en S tal que exista en S* rot $\mathbf{f}$. *Consideremos*

$$\mathbf{n}(t) = \frac{D_1\mathbf{x}(t) \times D_2\mathbf{x}(t)}{|D_1\mathbf{x}(t) \times D_2\mathbf{x}(t)|}.$$

Tenemos entonces

40) $$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{C[\gamma]} \mathbf{f} \cdot d\gamma,$$

o lo que es lo mismo

$$\iint_S (D_2f_3 - D_3f_2)\, dx_2\, dx_3 + (D_3f_1 - D_1f_3)\, dx_3\, dx_1 + (D_1f_2 - D_2f_1)\, dx_1\, dx_2 = \int_{C[\gamma]} f_1\, d\gamma_1 + f_2\, d\gamma_2 + f_3\, d\gamma_3.$$

Demostración. El proceso demostrativo es bien sencillo. En primer lugar, expresamos la integral de línea de 40) como una integral de línea tomada a

lo largo de la frontera $\Gamma(R)$. Entonces aplicamos el teorema de Green para expresar esta integral de línea como una integral doble sobre R, la cual tiene el mismo valor que la integral de superficie de 40).

Para seguir este plan, escribimos la integral de línea de 40) como una integral de Riemann (empleando el Teorema 10-33) y encontramos

$$\int_{C[\gamma]} \mathbf{f}\cdot d\gamma = \sum_{k=1}^{3} \int_a^b f_k[\gamma(t)]\gamma'_k(t)\, dt.$$

Calculando $\gamma'_k(t)$ mediante la regla de derivación de funciones compuestas, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{C[\gamma]} \mathbf{f}\cdot d\gamma &= \sum_{k=1}^{3} \int_a^b f_k(\mathbf{x}[\alpha(t)])\, D_1x_k[\alpha(t)]\alpha'_1(t)\, dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{3} \int_a^b f_k(\mathbf{x}[\alpha(t)])\, D_2x_k[\alpha(t)]\alpha'_2(t)\, dt \\ &= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}[\alpha(t)])\cdot D_1\mathbf{x}[\alpha(t)]\, d\alpha_1(t) \\ &\quad + \int_b^a \mathbf{f}(\mathbf{x}[\alpha(t)])\cdot D_2\mathbf{x}[\alpha(t)]\, d\alpha_2(t) = \int_{\Gamma(R)} g_1\, d\alpha_1 + g_2\, d\alpha_2,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ está definida en R como sigue:

41) $$g_1(\mathbf{t}) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\mathbf{t})]\cdot D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \quad \text{y} \quad g_2(\mathbf{t}) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\mathbf{t})]\cdot D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}),$$
$$\text{si} \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R.$$

Aplicando el teorema de Green, logramos

$$\int_{C[\gamma]} \mathbf{f}\cdot d\gamma = \int_R (D_1g_2 - D_2g_1)\, d(t_1, t_2).$$

Por otra parte, la integral de superficie de 40) puede expresarse también como una integral doble, a saber,

42) $$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma &= \\ &= \int_R \left\{ (D_2F_3 - D_3F_2)\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)} + (D_3F_1 - D_1F_3)\frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)} \right. \\ &\quad \left. + (D_1F_2 - D_2F_1)\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right\} d(t_1, t_2),\end{aligned}$$

siendo $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ la función definida en R mediante la ecuación $\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\mathbf{t})]$. Por lo tanto la demostración será completa si establecemos

que el integrando del segundo miembro de 42) es igual a $D_1g_2 - D_2g_1$. En virtud de 41), vemos que $\mathbf{g}$ y $\mathbf{F}$ están relacionados como sigue:

$$g_1(t) = \mathbf{F}(t)\cdot D_1\mathbf{x}(t) \quad y \quad g_2(t) = \mathbf{F}(t)\cdot D_2\mathbf{x}(t),$$

Mediante la regla de derivación de funciones compuestas, encontramos

$$D_1g_2 = (D_1\mathbf{F}\, D_1x_1 + D_2\mathbf{F}\, D_1x_2 + D_3\mathbf{F}\, D_1x_3)\cdot D_2\mathbf{x} + \mathbf{F}\cdot D_{1,2}\mathbf{x},$$

donde

$$D_k\mathbf{F} = (D_kF_1, D_kF_2, D_kF_3)$$

y

$$D_{1,2}\mathbf{x} = (D_{1,2}x_1, D_{1,2}x_2, D_{1,2}x_3).$$

Análogamente,

$$D_2g_1 = (D_1\mathbf{F}\, D_2x_1 + D_2\mathbf{F}\, D_2x_2 + D_3\mathbf{F}\, D_2x_3)\cdot D_1\mathbf{x} + \mathbf{F}\cdot D_{2,1}\mathbf{x}.$$

Cuando formamos $D_1g_2 - D_2g_1$, el término que contiene $\mathbf{F}$ desaparece y obtenemos

$$43)\quad D_1g_2 - D_2g_1 = D_1\mathbf{F}\cdot\begin{vmatrix} D_1x_1 & D_2x_1 \\ D_1\mathbf{x} & D_2\mathbf{x}\end{vmatrix} + D_2\mathbf{F}\cdot\begin{vmatrix} D_1x_2 & D_2x_2 \\ D_1\mathbf{x} & D_2\mathbf{x}\end{vmatrix} + D_3\mathbf{F}\cdot\begin{vmatrix} D_1x_3 & D_2x_3 \\ D_1\mathbf{x} & D_2\mathbf{x}\end{vmatrix}.$$

Pero se tiene

$$D_1\mathbf{F}\cdot\begin{vmatrix} D_1x_1 & D_2x_1 \\ D_1\mathbf{x} & D_2\mathbf{x}\end{vmatrix} = D_1F_2\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} + D_1F_3\frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(t_1, t_2)},$$

$$D_2\mathbf{F}\cdot\begin{vmatrix} D_1x_2 & D_2x_2 \\ D_1\mathbf{x} & D_2\mathbf{x}\end{vmatrix} = D_2F_1\frac{\partial(x_2, x_1)}{\partial(t_1, t_2)} + D_2F_3\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)},$$

$$D_3\mathbf{F}\cdot\begin{vmatrix} D_1x_3 & D_2x_3 \\ D_1\mathbf{x} & D_2\mathbf{x}\end{vmatrix} = D_3F_1\frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)} + D_3F_2\frac{\partial(x_3, x_2)}{\partial(t_1, t_2)},$$

y por consiguiente el segundo miembro de 43) coincide con el integrando de 42), como deseábamos demostrar.

11-22 Orientación de superficies. Sea S_1 una superficie paramétrica simple descrita por una función vectorial $\mathbf{x}$ definida en una región cerrada R_1. Sea $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2)$ una función vectorial definida en un intervalo $[a, b]$ de E_1 tal que $\boldsymbol{\alpha}$ describe la frontera de R_1 orientada positivamente. (Ver Definición 9-69.) Entonces la curva cerrada simple C_1 que constituye el borde de S_1 puede ser descrita por la función compuesta γ dada por

$$44)\qquad \gamma(t) = \mathbf{x}[\boldsymbol{\alpha}(t)], \quad \text{si } t \in [a, b].$$

Análogamente, sea S_2 otra superficie paramétrica descrita por una función $\mathbf{y}$ definida en una región cerrada R_2 tal que podamos formar la suma $S_1 + S_2$. Si $\boldsymbol{\beta}$ es una función que describe la frontera de R_2 orientada positivamente, entonces la función $\boldsymbol{\delta}$ definida por la ecuación

$$45)\qquad \boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{y}[\boldsymbol{\beta}(t)]$$

describe la curva cerrada simple C_2 que constituye el borde de S_2. La superficie $S_1 + S_2$ se llama *orientable* si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pueden ser elegidas de manera que los caminos dirigidos determinados por $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ sean *opuestos* en cada una de las curvas frontera que contienen $C_1 \cap C_2$. Es decir, si Γ es un arco de $C_1 \cap C_2$ que une dos puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\delta}$ describe el camino dirigido de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ a lo largo de Γ, entonces $\boldsymbol{\gamma}$ debe describirlo de $\mathbf{q}$ a $\mathbf{p}$ igualmente a lo largo de Γ. Naturalmente, puede ocurrir que no sea posible elegir $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de manera que esto ocurra, en cuyo caso decimos que $S_1 + S_2$ *no es orientable*. Por ejemplo, la superficie representada en la figura 11-18 e) es una superficie no orientable que

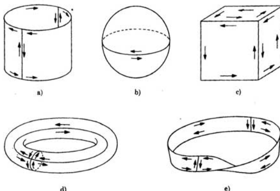


FIG. 11-18. Superficies orientables y una superficie no orientable.

se conoce con el nombre de *banda de Möbius*. Por otra parte, en la figura 11-18 a), b) y d), tenemos ejemplos de superficies orientables de la forma $S_1 + S_2$.

Como es natural, se aplica terminología parecida a la suma de cualquier número finito de superficies paramétricas. La figura 11-18 c) representa la superficie orientada de un cubo, la suma de seis superficies paramétricas (sus caras).

El teorema de Stokes puede extenderse inmediatamente a las superficies orientadas de la forma $S_1 + S_2$. Habiendo elegido $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de manera que las funciones δ y γ definidas por 44) y 45) sean opuestas sobre cada una de las curvas que componen $C_1 \cap C_2$, escribamos

$$\mathbf{n}_1(t) = \frac{D_1\mathbf{x}(t) \times D_2\mathbf{x}(t)}{|D_1\mathbf{x}(t) \times D_2\mathbf{x}(t)|}, \qquad \mathbf{n}_2(t) = \frac{D_1\mathbf{y}(t) \times D_2\mathbf{y}(t)}{|D_1\mathbf{y}(t) \times D_2\mathbf{y}(t)|}$$

y definamos $\iint_{S_1+S_2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ para significar $\iint_{S_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}_1 d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}_2 d\sigma$. Entonces, si las hipótesis del teorema de Stokes se satisfacen en $S_1 + S_2$, podemos escribir

46)
$$\iint_{S_1+S_2} \operatorname{rot} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_{C_1[\gamma]} \mathbf{f}\cdot d\gamma + \int_{C_2[\delta]} \mathbf{f}\cdot d\delta.$$

Las dos integrales del segundo miembro de 46) pueden reemplazarse por una suma de integrales de línea tomadas sobre aquellas curvas que componen el *borde* de $S_1 + S_2$, debido a que las integrales a lo largo de los arcos de $C_1 \cap C_2$ se destruyen mutuamente ya que ésos son recorridos en direcciones opuestas. (Aquí es donde la orientabilidad de $S_1 + S_2$ interviene.) Si $S_1 + S_2$ es una superficie *cerrada*, no existe borde y todas las integrales de línea del segundo miembro se destruyen, y nos quedamos, en este caso, con la fórmula

$$\iint_{S_1+S_2} \operatorname{rot} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0.$$

11-23 Teorema de Gauss (teorema de la divergencia). Hay otro camino para extender el teorema de Green de E_2 a E_3. En esta extensión consideramos un «sólido» V cuya frontera es una superficie cerrada orientable S y el correspondiente teorema, conocido como el teorema de Gauss, establece una relación que existe entre una cierta integral triple extendida al sólido V y una integral de superficie sobre la frontera S. Únicamente nos ocuparemos de un caso muy especial en el que V y S pueden ser descritos como sigue:

Llamemos R a una región de E_2 cuya frontera es una curva de Jordan rectificable Γ y consideremos

$$V = \{(t_1, t_2, t_3) | \psi(t_1, t_2) \le t_3 \le \phi(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in R\},$$

donde $\phi \in C'$ y $\psi \in C'$ en R. Supongamos que $\psi(t_1, t_2) < \phi(t_1, t_2)$ si (t_1, t_2) es interior a R, y que $\psi(t_1, t_2) = \phi(t_1, t_2)$ si $(t_1, t_2) \in \Gamma$. Sean S_1 y S_2 dos superficies paramétricas descritas, respectivamente, por las funciones $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dadas por

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \phi(t_1, t_2)\mathbf{u}_3,$$
$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \psi(t_1, t_2)\mathbf{u}_3,$$

si $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R$, y consideremos $S = S_1 \cup S_2$. La figura 11-19 representa un ejemplo de un sólido de tal naturaleza. El teorema de Gauss para una tal región puede establecerse como sigue:

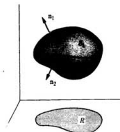


FIG. 11-19. El teorema de la divergencia.

11—37 TEOREMA (*Gauss*). *En las hipótesis anteriormente citadas, sea f_3 una función real continua en S y además $f_3 \in C'$ en el interior de V. Tenemos entonces*

$$\int_V D_3 f_3\, d(t_1, t_2, t_3) = \iint_{S_1} f_3\, dx_1\, dx_2 - \iint_{S_2} f_3\, dy_1\, dy_2. \tag{47}$$

Demostración. Aplicando el análogo del Teorema 10-26 para las integrales triples, obtenemos

$$\int_V D_3 f_3\, d(t_1, t_2, t_3) = \int_R \left[\int_{\psi(t_1,t_2)}^{\phi(t_1,t_2)} D_3 f_3\, dt_3\right] d(t_1, t_2)$$
$$= \int_R \{f_3[t_1, t_2, \phi(t_1, t_2)] - f_3[t_1, t_2, \psi(t_1, t_2)]\}\, d(t_1, t_2)$$
$$= \int_R f_3[\mathbf{x}(\mathbf{t})] \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}\, d(t_1, t_2)$$
$$- \int_R f_3[\mathbf{y}(\mathbf{t})] \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(t_1, t_2)}\, d(t_1, t_2)$$
$$= \iint_{S_1} f_3\, dx_1\, dx_2 - \iint_{S_2} f_3\, dy_1\, dy_2.$$

NOTA. Si introducimos la función vectorial $\mathbf{f} = (0, 0, f_3)$ y definimos $\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ mediante la ecuación

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2\, d\sigma,$$

donde

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{t}) = \frac{D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})}{|D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_2(\mathbf{t}) = -\frac{D_1\mathbf{y}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{y}(\mathbf{t})}{|D_1\mathbf{y}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{y}(\mathbf{t})|},$$

entonces la fórmula 47) puede expresarse como sigue:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f}\, d(t_1, t_2, t_3) = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Debido a la presencia de div $\mathbf{f}$, el teorema Gauss se llama algunas veces el *teorema de la divergencia*.

11-24 Transformaciones de coordenadas.

11—38 DEFINICIÓN. *Sea* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *una función vectorial definida en una región* T *de* E_3. *La función* $\mathbf{x}$ *se llama una transformación de coordenadas si satisface las condiciones siguientes:*

I) $\mathbf{x} \in C'$ *en un conjunto abierto que contiene* T.

II) *El Jacobiano* $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \neq 0$ *para cada punto* $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ *de* T.

III) $\mathbf{x}$ *es uno a uno en* T.

En lo que sigue en este párrafo suponemos que $\mathbf{x}$ es una función que satisface esas condiciones, y adoptamos las notaciones siguientes:

48) $$D_i\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (D_ix_1(\mathbf{t}), D_ix_2(\mathbf{t}), D_ix_3(\mathbf{t})) \quad (i = 1, 2, 3).$$

49) $$h_1(\mathbf{t}) = |D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})|, \quad h_2(\mathbf{t}) = |D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|, \quad h_3(\mathbf{t}) = |D_3\mathbf{x}(\mathbf{t})|.$$

En virtud de II), cada uno de los vectores $D_i\mathbf{x}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{0}$ para cada valor de $\mathbf{t}$ en T, y, por lo tanto, podemos definir los vectores unitarios:

50) $$\mathbf{v}_1(\mathbf{t}) = \frac{D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})}{h_1(\mathbf{t})}, \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{t}) = \frac{D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})}{h_2(\mathbf{t})}, \quad \mathbf{v}_3(\mathbf{t}) = \frac{D_3\mathbf{x}(\mathbf{t})}{h_3(\mathbf{t})}.$$

11—39 TEOREMA. *Los vectores de 50) constituyen un conjunto linealmente independiente. Además, tenemos*

$$J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = h_1(\mathbf{t})h_2(\mathbf{t})h_3(\mathbf{t})\mathbf{v}_1(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}_2(\mathbf{t}) \times \mathbf{v}_3(\mathbf{t}).$$

Demostración.

$$J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \cdot D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_3\mathbf{x}(\mathbf{t}).$$

NOTA. La terna $(\mathbf{v}_1(\mathbf{t}), \mathbf{v}_2(\mathbf{t}), \mathbf{v}_3(\mathbf{t}))$ es una terna positiva o negativa según que $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ sea positivo o negativo. Ordinariamente el conjunto $\{\mathbf{v}_1(\mathbf{t}), \mathbf{v}_2(\mathbf{t}),$

$\mathbf{v}_3(\mathbf{t})\}$ se dice que es una *base curvilínea* asociada al punto $\mathbf{x}(\mathbf{t})$. Debido al Teorema 11-39, todo vector $\mathbf{a}$ en E_3 puede expresarse como una combinación lineal de esos vectores, así pues:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{v}_1(\mathbf{t}) + a_2\mathbf{v}_2(\mathbf{t}) + a_3\mathbf{v}_3(\mathbf{t}).$$

Los escalares a_1, a_2, a_3 (que dependen de $\mathbf{t}$) se llaman las *coordenadas curvilíneas* de $\mathbf{a}$. En los siguientes ejemplos se exponen dos casos particulares muy conocidos:

EJEMPLO 1 (*Coordenadas cilíndricas*). En este caso, $\mathbf{x}$ viene dado por

$$x_1(\mathbf{t}) = t_1 \cos t_2, \quad x_2(\mathbf{t}) = t_1 \operatorname{sen} t_2, \quad x_3(\mathbf{t}) = t_3.$$

Mediante un sencillo cálculo resulta

$$h_1(\mathbf{t}) = 1, \quad h_2(\mathbf{t}) = t_1, \quad h_3(\mathbf{t}) = 1,$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{t}) = \cos t_2\mathbf{u}_1 + \operatorname{sen} t_2\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{t}) = -\operatorname{sen} t_2\mathbf{u}_1 + \cos t_2\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_3(\mathbf{t}) = \mathbf{u}_3,$$

$$J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = t_1, \quad \mathbf{v}_1(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}_2(\mathbf{t}) \times \mathbf{v}_3(\mathbf{t}) = 1.$$

Luego, $\mathbf{x}$ es una transformación de coordenadas definida en el conjunto siguiente:

$$T = \{(t_1, t_2, t_3) | t_1 > 0, \quad 0 \leq t_2 < 2\pi, \quad -\infty < t_3 < +\infty\}.$$

La imagen $\mathbf{x}(T)$ es $E_3 - \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = 0\}$.

EJEMPLO 2 (*Coordenadas esféricas*). En este caso, tenemos

$$x_1(t) = t_1 \operatorname{sen} t_2 \cos t_3, \quad x_2(t) = t_1 \operatorname{sen} t_2 \operatorname{sen} t_3, \quad x_3(t) = t_1 \cos t_2,$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{t}) = \operatorname{sen} t_2 \cos t_3\mathbf{u}_1 + \operatorname{sen} t_2 \operatorname{sen} t_3\mathbf{u}_2 + \cos t_2\mathbf{u}_3, \quad h_1(t) = 1,$$

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{t}) = \cos t_2 \cos t_3\mathbf{u}_1 + \cos t_2 \operatorname{sen} t_3\mathbf{u}_2 - \operatorname{sen} t_2\mathbf{u}_3, \quad h_2(t) = t_1,$$

$$\mathbf{v}_3(\mathbf{t}) = -\operatorname{sen} t_3\mathbf{u}_1 + \cos t_3\mathbf{u}_2, \quad h_3(t) = t_1 \operatorname{sen} t_2,$$

$$J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = t_1^2 \operatorname{sen} t_2, \quad \mathbf{v}_1(t)\cdot\mathbf{v}_2(t) \times \mathbf{v}_3(t) = 1.$$

La transformación de coordenadas $\mathbf{x}$ está definida en el siguiente conjunto:

$$T = \{(t_1, t_2, t_3) | t_1 > 0, 0 < t_2 < \pi, 0 < t_3 \leq 2\pi\},$$

cuya imagen $\mathbf{x}(T)$ es $E_3 - \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 = 0\}$.

Si t_3 permanece fijo y t_1 y t_2 varían sobre un rectángulo, el punto $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ engendra una superficie paramétrica llamada una superficie-t_1t_2. Análogamente definimos las superficies-t_1t_3 y las superficies-t_2t_3. Cada superficie-t_1t_2 corta una superficie-t_1t_3 según una curva-t_1, esto es, una curva engendrada por $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ cuando t_2 y t_3 se mantienen fijos y t_1 varía en un intervalo. El vector $\mathbf{v}_1(\mathbf{t})$ es un vector unitario tangente a la curva-t_1 y el escalar $h_1(\mathbf{t})$ representa la «velocidad» con la que se engendra la curva-t_1. Las mismas observaciones se

aplican, naturalmente a las curvas-t_2 y a las curvas-t_3. Para variaciones pequeñas de «tiempos» Δt_1, Δt_2, Δt_3 un paralelepípedo rectangular de volumen $\Delta t_1\,\Delta t_2\,\Delta t_3$ es transformado por $\mathbf{x}$ en un sólido que es aproximadamente otro paralelepípedo que tiene las aristas determinadas por los vectores $D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})\Delta t_1$, $D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})\Delta t_2$, $D_3\mathbf{x}(\mathbf{t})\Delta t_3$. (Ver Fig. 11-20.) El volumen de tal paralelepípedo viene dado por el producto escalar triple

$$|D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \cdot D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_3\mathbf{x}(\mathbf{t})|\,\Delta t_1\,\Delta t_2\,\Delta t_3 = |J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})|\Delta t_1\,\Delta t_2\,\Delta t_3.$$

Esto significa que $|J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})|$ puede interpretarse como un «factor de ampliación» local para los volúmenes. (Comparar con el Teorema 10-31.)

Sea $\mathbf{x}$ una transformación de coordenadas como se ha descrito en la Definición 11-38 y consideremos $S = \mathbf{x}(T)$. Sea $\mathbf{f}$ un campo vectorial definido en S. Si expresamos $\mathbf{f}$ en función de la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, podemos escribir

51) $$\mathbf{f} = f_1\mathbf{u}_1 + f_2\mathbf{u}_2 + f_3\mathbf{u}_3.$$

Formemos ahora la función compuesta $\mathbf{F}$ definida en T por la ecuación $\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\mathbf{t})]$ y expresemos $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ por medio de la base curvilínea $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, a saber,

52) $$\mathbf{F}(\mathbf{t}) = F_1(\mathbf{t})\mathbf{v}_1(\mathbf{t}) + F_2(\mathbf{t})\mathbf{v}_2(\mathbf{t}) + F_3(\mathbf{t})\mathbf{v}_3(\mathbf{t}).$$

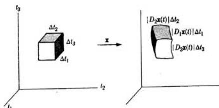


FIGURA 11-20.

El siguiente teorema nos dice cómo están relacionadas las coordenadas curvilíneas F_1, F_2, F_3 con las coordenadas «rectangulares» f_1, f_2, f_3, en el supuesto de que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sea un conjunto ortonormal. (Este es siempre el caso para las transformaciones de coordenadas más corrientes.)

11—40 TEOREMA. *Supongamos que* $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = 1$. *Si* $\mathbf{f}$ *viene dado por* 51) *y* $\mathbf{F}$ *por* 52), *entonces, para cada* $i = 1, 2, 3$, *tenemos*

53) $$f_i[\mathbf{x}(\mathbf{t})] = \frac{F_1(\mathbf{t})}{h_1(\mathbf{t})} D_1x_i(\mathbf{t}) + \frac{F_2(\mathbf{t})}{h_2(\mathbf{t})} D_2x_i(\mathbf{t}) + \frac{F_3(\mathbf{t})}{h_3(\mathbf{t})} D_3x_i(\mathbf{t})$$

y

54) $$F_i(\mathbf{t}) = \frac{1}{h_i(\mathbf{t})}(D_ix_1(\mathbf{t})f_1[\mathbf{x}(\mathbf{t})] + D_ix_2(\mathbf{t})f_2[\mathbf{x}(\mathbf{t})] + D_ix_3(\mathbf{t})f_3[\mathbf{x}(\mathbf{t})]).$$

Demostración. Escribiendo $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$, tenemos

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{p}) &= \mathbf{f}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}_i \\ &= F_1(\mathbf{t})(\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{v}_1(\mathbf{t})) + F_2(\mathbf{t})(\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{v}_2(\mathbf{t})) + F_3(\mathbf{t})(\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{v}_3(\mathbf{t})). \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{v}_j(\mathbf{t}) = D_jx_i(\mathbf{t})/h_j(\mathbf{t})$, se obtiene 53) inmediatamente. Análogamente se demuestra la Fórmula 54).

Para ilustrar el uso del Teorema 11-40, consideremos el caso especial en el cual $\mathbf{f}$ es el gradiente de un potencial: $\mathbf{f} = \nabla\phi$. Entonces $f_i = D_i\phi$ y 54) se convierte en

55) $$F_i(\mathbf{t}) = \frac{1}{h_i(\mathbf{t})}\sum_{k=1}^{3} D_k\phi[\mathbf{x}(\mathbf{t})]\, D_ix_k(\mathbf{t}).$$

Si escribimos $\Phi(\mathbf{t}) = \phi[\mathbf{x}(\mathbf{t})]$, la regla de derivación de funciones compuestas (Teorema 6-14) puede aplicarse en 55) para obtener $F_i(\mathbf{t}) = D_i\Phi(\mathbf{t})/h_i(\mathbf{t})$. Por lo tanto, tenemos la siguiente expresión para el gradiente $\nabla\phi[\mathbf{x}(\mathbf{t})]$ en coordenadas curvilíneas ortogonales:

56) $$\nabla\phi[\mathbf{x}(\mathbf{t})] = \frac{1}{h_1(\mathbf{t})}D_1\Phi(\mathbf{t})\mathbf{v}_1(\mathbf{t}) + \frac{1}{h_2(\mathbf{t})}D_2\Phi(\mathbf{t})\mathbf{v}_2(\mathbf{t}) + \frac{1}{h_3(\mathbf{t})}D_3\Phi(\mathbf{t})\mathbf{v}_3(\mathbf{t}),$$

donde $\Phi(\mathbf{t}) = \phi[\mathbf{x}(\mathbf{t})]$.

En los Ejercicios desde el 11-38 al 11-40 se desarrollan fórmulas para el rotacional, la divergencia, y la laplaciana.

EJERCICIOS

Algebra vectorial.

11-1. Sea $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ una base para E_n. Hagamos $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ y definamos

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{a}_m - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{(\mathbf{a}_m\cdot\mathbf{b}_k)}{|\mathbf{b}_k|^2}\mathbf{b}_k, \qquad \text{si } m = 2, 3, \ldots, n.$$

Demostrar que $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es una base ortogonal para E_n.

11-2. Demostrar que $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

11-3. Sean $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ y $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ dos ternas ordenadas de vectores en E_3 que satisfacen las nueve ecuaciones:

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j = \delta_{i,j} \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

(A y B se llaman conjuntos *recíprocos* de vectores.)

a) Consideremos $\alpha = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3$. Demostrar que $\alpha \neq 0$ y deducir las fórmulas

$a\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \qquad a\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \qquad a\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2,$

$\mathbf{a}_1 = a(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3), \qquad \mathbf{a}_2 = a(\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1), \qquad \mathbf{a}_3 = a(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2).$

b) Demostrar que $(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = 1$.
c) Probar que A y B son bases ambos para E_3.
d) Probar que A es un conjunto ortogonal si B es ortogonal y recíprocamente.
e) Demostrar que $A = B$ si A es un conjunto ortonormal y recíprocamente.

11-4. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$ dos vectores dados en E_3 tales que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, y λ un escalar dado. Encontrar un vector $\mathbf{b}$ que satisfaga simultáneamente las dos ecuaciones $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda$. Demostrar que un tal $\mathbf{b}$ no existe si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \neq 0$.

11-5. Probar que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$. Hacer uso de esto para deducir

a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}$.
b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$.
c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.
d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ si $\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, y recíprocamente.

11-6. Probar que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^2$.

11-7. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$, demostrar que para un vector cualquiera $\mathbf{v}$ en E_3 tenemos

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

11-8. Probar si es verdadera o falsa la fórmula

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \cdot \mathbf{c} = -|\mathbf{a}|^2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

11-9. Probar el Teorema 11-14.

Curvas alabeadas. (En los Ejercicios del 11-10 al 11-15, la notación es la del párrafo 11-10.)

11-10. Una partícula se mueve sobre una curva alabeada con velocidad $\mathbf{x}'$, de magnitud constante 1, y curvatura constante 1. Llamemos $\theta(t)$ el ángulo $(0 \leq \theta(t) \leq 180°)$ entre los vectores $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{x}'''(t)$ en el instante t. Demostrar que $|\tau(t)| = |\mathbf{x}'''(t)| \operatorname{sen} \theta(t)$.

11-11. Consideremos $R = s'\tau\mathbf{T} + s'\varkappa\mathbf{B}$. Demostrar que las fórmulas de Frenet se convierten en

$$\mathbf{T}' = \mathbf{R} \times \mathbf{T}, \qquad \mathbf{N}' = \mathbf{R} \times \mathbf{N}, \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{R} \times \mathbf{B}.$$

11-12. Deducir las fórmulas siguientes:

a) $\tau s' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{N}'$,
b) $\tau\varkappa(s')^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{T}''$,
c) $\tau\varkappa^2(s')^3 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' \times \mathbf{T}''$,
d) $\varkappa(s')^3 = |\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|$,
e) $\tau|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2 = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' \times \mathbf{x}'''$.

11-13. Una porción de una hélice circular está descrita por la función $\mathbf{x}$ dada por

$$\mathbf{x}(t) = a \cos t\mathbf{u}_1 + a \operatorname{sen} t\mathbf{u}_2 + bt\mathbf{u}_3, \qquad 0 \leq t \leq t_1.$$

Calcular los vectores $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$. Comprobar que $\varkappa^2 = a^2/c^4$ y $\tau = b/c^2$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

11-14. Supongamos una partícula en rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el origen en E_3. Llamemos $\mathbf{x}(t)$ a la posición del vector en el tiempo t. Demostrar que existe un vector $\omega(t)$ paralelo a aquel eje tal que

$$\mathbf{x}'(t) = \omega(t) \times \mathbf{x}(t).$$

NOTA. El vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ se llama *vector velocidad angular* y $\omega(t) = |\boldsymbol{\omega}(t)|$ se llama *magnitud de la velocidad angular*.

11-15. Se dice que un cuerpo está sometido a un *movimiento rígido* si, para todo par de partículas $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ del cuerpo, la distancia $|\mathbf{x_p}(t) - \mathbf{x_q}(t)|$ es independiente de t, donde $\mathbf{x_p}(t)$ y $\mathbf{x_q}(t)$ designan la posición de los vectores de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en el instante t. Probar que para un movimiento rígido en el cual cada partícula $\mathbf{p}$ gira en torno al mismo eje que pasa por el origen tenemos

$$\mathbf{x}_\mathbf{p}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x_p}(t),$$

donde $\boldsymbol{\omega}(t)$ es el mismo para cada partícula.

Gradiente, rotacional, divergencia.

11-16. Si $\mathbf{x} \in E_3$, definimos $\phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$.

a) Demostrar que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
b) Calcular $\nabla\psi(\mathbf{x})$, siendo $\psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})^n$.
c) Encontrar un campo escalar λ tal que $\nabla\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

11-17. Encontrar (si es posible) un campo escalar ϕ tal que $\nabla\phi = \mathbf{f}$, sabiendo que

a) $\mathbf{f}(x_1, x_2) = \operatorname{sen} x_2 - x_2 \operatorname{sen} x_1 + x_1)\mathbf{u}_1 + (\cos x_1 + x_1 \cos x_2 + x_2)\mathbf{u}_2$.
b) $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (2x_1 e^{x_2} + x_2)\mathbf{u}_1 + (x_1^2 e^{x_2} + x_1 - 2x_2)\mathbf{u}_2$.
c) $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)\mathbf{u}_1 - (x_2 + x_3)\mathbf{u}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{u}_3$.

11-18. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores dados de E_3 y definamos $\phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{b})$. Demostrar que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{b})$.

11-19. Sea F una función real tal que $F \in C'$ en E_1. Definamos $\phi(\mathbf{x}) = F(|\mathbf{x}|)$ si $\mathbf{x} \in E_3$. Demostrar que existe un campo escalar λ tal que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{x}$ si $\mathbf{x} \neq 0$.

11-20. Dados dos campos escalares λ y ϕ tales que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en E_3, siendo $\phi \in C'$ en E_3. Demostrar que existe una función real F definida en E_1 tal que $\phi(\mathbf{x}) = F(|\mathbf{x}|)$.

11-21. Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ dos campos vectoriales tridimensionales tales que en un conjunto abierto S de E_3 existan div $\mathbf{f}$, rot $\mathbf{f}$ y rot $\mathbf{g}$. Deducir las siguientes fórmulas en las que $D_i\mathbf{f} = (D_i f_1, D_i f_2, D_i f_3)$, $i = 1, 2, 3$:

a) $\operatorname{div} \mathbf{f} = \mathbf{u}_1 \cdot D_1\mathbf{f} + \mathbf{u}_2 \cdot D_2\mathbf{f} + \mathbf{u}_3 \cdot D_3\mathbf{f}$.
b) $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{u}_1 \times D_1\mathbf{f} + \mathbf{u}_2 \times D_2\mathbf{f} + \mathbf{u}_3 \times D_3\mathbf{f}$.
c) Utilizar a) y b) y las propiedades del producto escalar triple para obtener la fórmula: $\operatorname{div} (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g}$.

11-22. Sea F una función real tal que en todo E_1 exista y sea continua F'. Dado un vector fijo $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ en E_3, definamos

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

siendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2x_1x_2x_3\mathbf{u}_1 + x_1^2x_3\mathbf{u}_2 + x_1^2x_2\mathbf{u}_3$ si $\mathbf{x} \in E_3$. Demostrar que rot $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es ortogonal a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{a}$.

11-23. Sea $\mathbf{a}$ un vector fijo en E_3. Definamos $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^n \, \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ si $\mathbf{x} \in E_3$.

a) Encontrar campos escalares λ y μ de modo que se verifique $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mu(\mathbf{x})\mathbf{x}$.
b) Probar si es falsa o verdadera la fórmula

$$\nabla\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right).$$

11-24. Encontrar un campo vectorial tridimensional $\mathbf{f}$ tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_3.$$

11-25. Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ un campo vectorial y consideremos $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) = \operatorname{rot} \mathbf{f}$, $\phi = \operatorname{div} \mathbf{f}$. Si cada f_i tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, demostrar que

$$\nabla^2 f_1 = D_1\phi - D_2 g_3 + D_3 g_2$$

y encontrar fórmulas análogas para $\nabla^2 f_2$ y $\nabla^2 f_3$.

11-26. Sean f_1, f_2, f_3 tres funciones reales que tengan derivadas de segundo orden en E_1. Definamos $g(\mathbf{x}) = f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)$ si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E_3$. Demostrar que siempre que $g(\mathbf{x}) \neq 0$ tenemos

$$\frac{\nabla^2 g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{f_1''(x_1)}{f_1(x_1)} + \frac{f_2''(x_2)}{f_2(x_2)} + \frac{f_3''(x_3)}{f_3(x_3)}.$$

11-27. Sea F una función real que admita derivada segunda continua F'' en E_1. Si $\mathbf{x} \in E_3$, definamos $\phi(\mathbf{x}) = F(|\mathbf{x}|)$. Demostrar que para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tenemos

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = F''(|\mathbf{x}|) + \frac{2F'(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}.$$

¿Qué se puede concluir en relación a F si $\nabla^2\phi = 0$?

Superficies e integrales de superficie.

11-28. Encontrar en cada caso una región rectangular R cuya imagen $\mathbf{x}(R)$ sea una superficie paramétrica.:

a) Paraboloide elíptico:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = at_1 \cos t_2\mathbf{u}_1 + bt_1 \operatorname{sen} t_2\mathbf{u}_2 + t_1^2\mathbf{u}_3.$$

b) Cono:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (\cos a)t_1 \cos t_2\mathbf{u}_1 + (\cos a)t_1 \operatorname{sen} t_2\mathbf{u}_2 + (\operatorname{sen} a)t_1\mathbf{u}_3.$$

¿Qué representa a en el cono?

11-29. Encontrar en cada caso dos regiones rectangulares R_1 y R_2 que tengan un lado común de manera que la suma $S_1 + S_2$ sea una superficie cerrada, siendo $S_1 = \mathbf{x}(R_1)$ y $S_2 = \mathbf{x}(R_2)$:

a) Elipsoide:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = a \operatorname{sen} t_1 \cos t_2\mathbf{u}_1 + b \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2\mathbf{u}_2 + c \cos t_1\,\mathbf{u}_3.$$

b) Toro:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (a + b\cos t_1) \operatorname{sen} t_2\mathbf{u}_1 + (a + b\cos t_1)\cos t_2\mathbf{u}_2 + b \operatorname{sen} t_1\mathbf{u}_3,$$

donde $0 < b < a$. ¿Cuál es el significado geométrico de a y b en el toro?

11-30. Si una superficie paramétrica S puede representarse explícitamente mediante una ecuación de la forma $z = f(x, y)$ y R es la proyección de S sobre el plano xy, demostrar que el área de S viene dada por la integral

$$\int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, d(x, y).$$

11-31. Designemos con S la superficie paramétrica (un hemisferio) representada por

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \operatorname{sen} t_1 \cos t_2 \mathbf{u}_1 + \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 \mathbf{u}_2 + \cos t_1 \mathbf{u}_3,$$

donde $(t_1, t_2) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Consideremos

$$\mathbf{n}(\mathbf{t}) = D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) / |D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|.$$

a) Si $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$, calcular la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

b) Calcular $\iint_S x_1 x_3 \, dx_2 \, dx_3 + x_2 x_3 \, dx_3 \, dx_1 + x_1^2 \, dx_1 \, dx_2$.

c) Considerar $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_1 x_2 - x_3^2)\mathbf{u}_3$ y calcular $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$.

11-32. Sea S una superficie paramétrica representada por una ecuación de la forma $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \phi(t_1, t_2)\mathbf{u}_3$, si $(t_1, t_2) \in R$. Sea f una función real definida en S y definamos $F(\mathbf{t}) = f[\mathbf{x}(\mathbf{t})]$ si $\mathbf{t} \in R$. Demostrar que

$$\iint_S f \, dx_1 \, dx_2 = \int_R F \, d(t_1, t_2),$$

$$\iint_S f \, dx_2 \, dx_3 = -\int_R F \, D_1\phi \, d(t_1, t_2),$$

$$\iint_S f \, dx_3 \, dx_1 = -\int_R F \, D_2\phi \, d(t_1, t_2).$$

11-33. Consideremos $R = \{(t_1, t_2) | t_1^2 + t_2^2 \leq r\}$, siendo $r > 0$. Definamos

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \sqrt{r^2 - t_1^2 - t_2^2}\, \mathbf{u}_3,$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{u}_1 - t_2\mathbf{u}_2 - \sqrt{r^2 - t_1^2 - t_2^2}\, \mathbf{u}_3,$$

si $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R$.

Sean

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{t}) = D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) / |D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})|$$

y

$$\mathbf{n}_2(\mathbf{t}) = D_1\mathbf{y}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{y}(\mathbf{t}) / |D_1\mathbf{y}(\mathbf{t}) \times D_2\mathbf{y}(\mathbf{t})|.$$

Tomemos $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}/|\mathbf{t}|^3$ si $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

a) Si $S_1 = \mathbf{x}(R)$, $S_2 = \mathbf{y}(R)$ demostrar que

$$\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma = \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma = 2\pi.$$

b) La función $\alpha = (a_1, a_2)$ definida por $a_1(t) = r \cos t$, $a_2(t) = r \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, describe la frontera de R orientada positivamente. Consideremos $\gamma(t) = \mathbf{x}[\alpha(t)]$, $\delta(t) = \mathbf{y}[\alpha(t)]$ si $t \in [0, 2\pi]$. Sea $C = S_1 \cap S_2$. Demostrar que

$$\int_{C[\gamma]} \mathbf{f}\cdot d\gamma = -\int_{C[\delta]} \mathbf{f}\cdot d\delta.$$

11-34. Si $0 < a < b$, consideremos $V = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in E_3,\ 0 < a < |\mathbf{x}| < b\}$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

a) Demostrar que div $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x}$ en V.

b) Utilizar el Ejercicio 11-33 y el teorema de Stokes para demostrar que no existe un campo vectorial $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{g}(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x}$ en V.

11-35. Sea $\mathbf{a}$ un vector fijo en E_3, definamos $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ si $\mathbf{x} \in E_3$. Empleando la notación del Teorema 11-36, demostrar que

$$2\iint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_{C[\gamma]} \mathbf{f}\cdot d\gamma.$$

11-36. Con la notación del Ejercicio 11—33, calcular

$$\iint_{S_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}_2\, d\sigma$$

cuando $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x_1^2\mathbf{u}_1 + x_2^2\mathbf{u}_2 + x_3^2\mathbf{u}_3$.

Transformaciones de coordenadas.

11-37. Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ una transformación de coordenadas definida en una región T de E_3 y sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = \mathbf{x}^{-1}$ la función inversa, definida en la imagen $S = \mathbf{x}(T)$. Supongamos que $\mathbf{y} \in C'$ en un conjunto abierto que contenga S, demostrar las siguientes afirmaciones:

a) El Jacobiano $J_{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) = \nabla y_1(\mathbf{s})\cdot\nabla y_2(\mathbf{s}) \times \nabla y_3(\mathbf{s})$ si $\mathbf{s} \in S$.

b) Si $\mathbf{t} \in T$ y $\mathbf{s} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$, las dos ternas $(D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}), D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}), D_3\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ y $(\nabla y_1(\mathbf{s}), \nabla y_2(\mathbf{s}), \nabla y_3(\mathbf{s}))$ son conjuntos recíprocos de vectores (En el sentido del Ejercicio 11-3).

c) Deducir la identidad

$$D_1\mathbf{x}(\mathbf{t}) = J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})(\nabla y_2(\mathbf{s}) \times \nabla y_3(\mathbf{s}))$$

y obtener fórmulas análogas para $D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})$ y $D_3\mathbf{x}(\mathbf{t})$.

d) Demostrar que

$$\nabla y_1(\mathbf{s}) = J_{\mathbf{y}}(\mathbf{s})(D_2\mathbf{x}(\mathbf{t}) \times D_3\mathbf{x}(\mathbf{t}))$$

y obtener fórmulas análogas para $\nabla y_2(\mathbf{s})$ y $\nabla y_3(\mathbf{s})$.

e) A partir de c) deducir que

$$\frac{D_1\mathbf{x}(\mathbf{t})}{J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})} = \text{rot } (y_2(\mathbf{s})\ \nabla y_3(\mathbf{s}))$$

y obtener fórmulas análogas para $D_2\mathbf{x}(\mathbf{t})/J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ y $D_3\mathbf{x}(\mathbf{t})/J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$.

f) Emplear e) para demostrar que div $(D_i\mathbf{x}(\mathbf{t})/J_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})) = 0$ para $i = 1, 2, 3$.

En los Ejercicios 11-38 y 11-39 la base curvilínea $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ se supone ortonormal.

11-38. a) Demostrar que la fórmula 52) puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{F} = (F_1 h_2 h_3) \frac{D_1 \mathbf{x}}{J_\mathbf{x}} + (F_2 h_3 h_1) \frac{D_2 \mathbf{x}}{J_\mathbf{x}} + (F_3 h_1 h_2) \frac{D_3 \mathbf{x}}{J_\mathbf{x}}.$$

b) Utilizar el Teoream 11-29 b) y el Ejercicio 11-37 f) para probar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{J_\mathbf{x}} [\nabla(F_1 h_2 h_3) \cdot D_1 \mathbf{x} + \nabla(F_2 h_3 h_1) \cdot D_2 \mathbf{x} + \nabla(F_3 h_1 h_2) \cdot D_3 \mathbf{x}].$$

c) Aplicar la regla de derivación de las funciones compuestas en b) para lograr

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [D_1(F_1 h_2 h_3) + D_2(F_2 h_3 h_1) + D_3(F_3 h_1 h_2)].$$

11-39. a) Emplear el Teorema 11-26 b) y la fórmula 52) para obtener

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla(h_1 F_1) \times \binom{\mathbf{v}_1}{h_1} + \nabla(h_2 F_2) \times \binom{\mathbf{v}_2}{h_2} + \nabla(h_3 F_3) \times \binom{\mathbf{v}_3}{h_3}.$$

b) A partir de a), deducir

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{h_2 h_3} [D_2(h_3 F_3) - D_3(h_2 F_2)] \mathbf{v}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} [D_3(h_1 F_1) - D_1(h_3 F_3)] \mathbf{v}_2$$
$$+ \frac{1}{h_1 h_2} [D_1(h_2 F_2) - D_2(h_1 F_1)] \mathbf{v}_3.$$

11-40. Emplear la fórmula 56) y el Ejercicio 11-38 c) para obtener la siguiente fórmula de la laplaciana en coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$\nabla^2 \phi[\mathbf{x}(\mathbf{t})] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[D_1 \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} D_1 \Phi \right) + D_2 \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} D_2 \Phi \right) + D_3 \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} D_3 \Phi \right) \right],$$

donde $\Phi(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{x}(\mathbf{t})]$.

Referencias

11-1. Brand, L., *Vector and Tensor Analysis*. New York: Wiley, 1947.

11-2. Craig, H. V., *Vector and Tensor Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1943.

11-3. Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*. New York: Springer, Berlin, 1929.

11-4. Lamb, H., *Hydrodynamics*. 6.ª ed. Cambridge: University Press, 1932.

11-5. Perlis, S., *Theory of Matrices*. Reading: Addison-Wesley, 1952.

11-6. Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*. Reading: Addison-Wesley, 1950.

CAPÍTULO 12

SERIES Y PRODUCTOS INFINITOS

12-1 Introducción. En este capítulo intentamos hacer una breve exposición de la teoría de las series y productos infinitos. En el fondo se trata de sucesiones indefinidas especiales cuyos términos son números complejos, y por esto empezaremos desarrollando algunas propiedades de tales sucesiones. El lector debería recordar las definiciones de *sucesión indefinida* (Definición 2-13), *límite de una sucesión* (Definición 4-2), y *condición de Cauchy para sucesiones* (Teorema 4-6). Las sucesiones que satisfacen la condición de Cauchy se llamarán *sucesiones de Cauchy*. Si no se especifica lo contrario, todas las sucesiones de este capítulo se supondrá que tienen términos complejos.

12-2 Sucesiones convergentes y divergentes.

12—1 DEFINICIÓN. *Una sucesión $\{a_n\}$ se llama convergente si existe en E_2 un punto a tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, en cuyo caso decimos también que la sucesión converge hacia a. Una sucesión se llama divergente si no es convergente.*

El Teorema 4-6 nos dice que una sucesión es convergente si es una sucesión de Cauchy, y recíprocamente. La condición de Cauchy es especialmente útil para establecer la convergencia cuando no conocemos el valor hacia el que la sucesión converge. Toda sucesión de Cauchy está acotada (ver la demostración del Teorema 4-6), y por consiguiente, una sucesión no acotada necesariamente diverge.

Utilizando la condición de Cauchy, podemos ver fácilmente que si una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia a, toda sucesión $\{a_{k_n}\}$ contenido en aquélla también converge hacia a. (Ver el Ejercicio 12-1.)

Una sucesión $\{a_n\}$ cuyos términos son números reales tiende a $+\infty$ si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, y tiende a $-\infty$ si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Naturalmente, existen sucesiones reales divergentes que no tienden a $+\infty$ o a $-\infty$. Por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n(1 + 1/n)\}$.

12-3 Límite superior y límite inferior de una sucesión real.

12—2 DEFINICIÓN. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existe un número real U que satisface las dos condiciones siguientes :*

I) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica*

$$a_n < U + \varepsilon.$$

II) *Dados* $\varepsilon > 0$ *y* $m > 0$, *existe un entero* $n > m$ *tal que*

$$a_n > U - \varepsilon.$$

Entonces U *se llama el límite superior de* $\{a_n\}$ *y escribimos*

$$U = \lim_{n\to\infty} \sup a_n.$$

La condición I) *implica que el conjunto* $\{a_1, a_2, \ldots\}$ *está acotado superiormente. Si ese conjunto no está acotado superiormente, definimos* lím $\sup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Si el conjunto está acotado superiormente y si* $\{a_n\}$ *carece de límite superior finito, decimos* $\lim \sup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. *El límite inferior de* $\{a_n\}$ *se define como sigue*:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = -\lim_{n\to\infty} \sup b_n, \qquad \text{donde } b_n = -a_n \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

NOTA. La condición I) significa que *todos* los términos de la sucesión a partir de uno de ellos quedan a la izquierda de $U + \varepsilon$. La condición II) significa que *infinitos* términos quedan a la derecha de $U - \varepsilon$. Es evidente que no puede existir más que un número U que satisfaga I) y II) simultáneamente.

El lector deberá demostrar los teoremas siguientes:

12–3 TEOREMA. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales. Tenemos*:

a) $\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n$.

b) *La sucesión converge si, y únicamente si,* $\lim \sup_{n\to\infty} a_n$ *y* $\lim \inf_{n\to\infty} a_n$ *son ambos finitos e iguales en cuyo caso* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \inf_{n\to\infty} a_n = \lim \sup_{n\to\infty} a_n$.

c) *La sucesión diverge hacia* $+\infty$ *si, y únicamente si,* $\lim \inf_{n\to\infty} a_n = \lim \sup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

d) *La sucesión diverge hacia* $-\infty$ *si, y únicamente si,* $\lim \inf_{n\to\infty} a_n = \lim \sup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

NOTA. Una sucesión para la cual $\lim \inf_{n\to\infty} a_n \neq \lim \sup_{n\to\infty} a_n$ se llama oscilante.

12–4 TEOREMA. *Supongamos que* $a_n \leq b_n$ *para cada* $n = 1, 2, \ldots$ *Tenemos entonces*:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf b_n \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \sup a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup b_n.$$

EJEMPLOS.

1. $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$, $\quad \lim \inf_{n\to\infty} a_n = -1$, $\quad \lim \sup a_n = +1$.
2. $a_n = (-1)^n$, $\quad \lim \inf_{n\to\infty} a_n = -1$, $\quad \lim \sup_{n\to\infty} a_n = +1$.
3. $a_n = (-1)^n n$, $\quad \lim \inf_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\quad \lim \sup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
4. $a_n = n^2 \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}n\pi)$, $\quad \lim \inf_{n\to\infty} a_n = 0$, $\quad \lim \sup a_n = +\infty$.

12-4 Sucesiones monótonas de números reales.

12—5 Definición. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Decimos que la sucesión es creciente y escribimos $a_n \nearrow$ si $a_n \leq a_{n+1}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n, decimos que la sucesión es decreciente y escribimos $a_n \searrow$. Una sucesión se llama monótona si es creciente o es decreciente.*

La convergencia o divergencia de una sucesión monótona es fácil de determinar. En efecto, tenemos

12—6 Teorema. *Una sucesión monótona converge si está acotada y recíprocamente.*

Demostración. Si $a_n \nearrow$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Si $a_n \searrow$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf \{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$.

12-5 Series.

12—7 Definición. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión dada de números reales o complejos. Formemos una nueva sucesión $\{s_n\}$ como sigue:*

1) $$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Una sucesión $\{s_n\}$ formada de esta manera se llama serie. El número s_n es la suma parcial n-ésima de la serie y a_n es el término n-ésimo de la serie. Se dice que la serie es convergente o divergente según que $\{s_n\}$ sea convergente o divergente respectivamente. Para designar la serie definida por 1) se usan los siguientes símbolos:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Nota. La letra k usada en $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una «variable ficticia» y puede ser reemplazada por cualquier otro símbolo conveniente. Si p es un entero ≥ 0, un símbolo de la forma $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ puede interpretarse que significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $b_n = a_{n-p+1}$. Cuando no hay peligro de confusión, escribimos $\sum b_n$ en lugar de $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$.

Si la serie $\{s_n\}$ definida por 1) converge hacia s, el número s se llama la *suma* de la serie v escribimos

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Así pues, para las series convergentes se usa el mismo símbolo para designar la serie y su suma.

12–8 TEOREMA. *Sean $a = \sum a_n$ y $b = \sum b_n$ dos series convergentes. Entonces, para todo par de constantes α y β, la serie $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge hacia la suma $\alpha a + \beta b$. Esto es,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. $\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$.

12–9 TEOREMA. *Supongamos que $a_n \geq 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ La serie $\sum a_n$ converge si la sucesión de sumas está acotada superiormente, y recíprocamente.*

Demostración. Consideremos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Entonces será $s_n \nearrow$ y podemos aplicar el Teorema 12-6.

12–10 TEOREMA. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n = b_{n+1} - b_n$ para $n = 2, 3, \ldots$ La serie $\sum a_n$ converge si, y únicamente si, el $\lim_{n\to\infty} b_n$ existe, en cuyo caso tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

Demostración. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$.

12–11 TEOREMA. (*Condición de Cauchy para series.*) *La serie $\sum a_n$ converge si, y únicamente si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica*

2) $$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \textit{para cada } p = 1, 2, \ldots.$$

Demostración. Consideramos $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, escribimos $s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$, y aplicamos el Teorema 4-6.

Tomando en 2) $p = 1$, encontramos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es una condición *necesaria* para la convergencia de $\sum a_n$. Esta condición *no es suficiente* lo cual se ve considerando el ejemplo en el cual $a_n = 1/n$. Cuando $n = 2^m$ y $p = 2^m$ en 2), encontramos

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = \frac{1}{2^m + 1} + \cdots + \frac{1}{2^m + 2^m} \geq \frac{2^m}{2^m + 2^m} = \frac{1}{2}$$

y, por tanto, la condición de Cauchy no puede satisfacerse cuando $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. Esta serie se llama *serie armónica*.

12-6 Introducción y supresión de paréntesis.

12–12 DEFINICIÓN. *Sea p una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y cuyo recorrido es un subconjunto de los enteros positivos de manera que*

I) $p(n) < p(m)$, si $n < m$.

sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series entre las que existe la relación siguiente*

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p(1)},$$

II)

$$b_{n+1} = a_{p(n)+1} + a_{p(n)+2} + \cdots + a_{p(n+1)}, \quad si\ n = 1, 2, \ldots$$

Decimos entonces que $\sum b_n$ *se obtiene de* $\sum a_n$ *mediante la introducción de paréntesis, y que* $\sum a_n$ *se obtiene de* $\sum b_n$ *por la supresión de paréntesis.*

12–13 TEOREMA. *Si* $\sum a_n$ *converge hacia s, toda serie* $\sum b_n$ *obtenida de* $\sum a_n$ *por la introducción de paréntesis converge también hacia s.*

Demostración. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series relacionadas por II) y escribamos $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. La sucesión $\{t_n\}$ está contenida en $\{s_n\}$. En realidad, $t_n = s_{p(n)}$. Por consiguiente, la convergencia de $\{s_n\}$ hacia s implica la de $\{t_n\}$ hacia s.

La supresión de paréntesis puede destruir la convergencia. Para verlo, consideremos la serie $\sum b_n$ en la que cada término es 0 (claramente convergente). Tomemos $p(n) = 2n$ y $a_n = (-1)^n$. Entonces I) y II) subsisten pero $\sum a_n$ diverge.

Los paréntesis *pueden* suprimirse si imponemos restricciones adicionales a $\sum a_n$ y a p.

12–14 TEOREMA. *Sean dos series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *relacionadas como en la Definición 12-12. Supongamos que existe una constante* $M > 0$ *tal que* $p(n + 1) - p(n) < M$ *para todo n, y que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *En estas condiciones,* $\sum a_n$ *converge si* $\sum b_n$ *converge, y recíprocamente; y entonces tienen la misma suma.*

Demostración. Si $\sum a_n$ converge, el resultado se desprende del Teorema 12-13. Toda la dificultad estriba en la deducción del recíproco. Consideremos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. Fijado $\varepsilon > 0$, elijamos N de modo que $n > N$ implique

$$|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Si $n > p(N)$, podemos encontrar $m \geq N$ de manera que $N \leq p(m) \leq n < p(m + 1)$. [¿Por qué?] Para tal valor de n, tenemos

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_{p(m+1)} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}) \\ &= t_{m+1} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}), \end{aligned}$$

y, por lo tanto

$$|s_n - t| \leq |t_{m+1} - t| + |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}|$$
$$\leq |t_{m+1} - t| + |a_{p(m)+1}| + |a_{p(m)+2}| + \cdots + |a_{p(m+1)}|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + (p(m+1) - p(m)) \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} s_n = t$.

12-7 Series alternadas.

12—15 DEFINICIÓN. *Si $a_n > 0$ para cada n, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ se llama una serie alternada.*

12—16 TEOREMA. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente convergente hacia 0, la serie alternada $\sum(-1)^{n+1} a_n$ converge. Si s representa su suma y s_n su suma parcial n-ésima, tenemos la desigualdad*

3) $$0 < (-1)^n (s - s_n) < a_{n+1}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots .$$

NOTA. La desigualdad 3) nos dice que cuando « aproximamos » s mediante s_n, el error cometido tiene el mismo signo que el primer término despreciado y es menor que el valor absoluto de ese término.

Demostración. $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$. También, $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$. Por consiguiente, $\{s_{2n}\}$ es una sucesión creciente acotada y debe ser convergente (Teorema 12-6). Análogamente, siendo $\{s_{2n-1}\}$ una sucesión decreciente acotada, converge. Estas dos sucesiones convergen hacia el mismo límite ya que $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$ y $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. La convergencia de $\{s_n\}$ se deduce ahora fácilmente observando que para cada n existe un m tal que $s_{2m} \leq s_n \leq s_{2m+1}$.

La desigualdad 3) es consecuencia de las relaciones siguientes:

$$(-1)^n (s - s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) > 0,$$

y

$$(-1)^n (s - s_n) = a_{n+1} - \sum_{k=2}^{\infty} (a_{n+k+1} - a_{n+2k+1}) < a_{n+1}.$$

12-8 Convergencia absoluta y condicional.

12—17 DEFINICIÓN. *Una serie $\sum a_n$ se llama absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ converge. Es condicionalmente convergente si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.*

12—18 TEOREMA. *La convergencia absoluta de $\sum a_n$ implica la convergencia.*

Demostración. Basta aplicar la condición de Cauchy a la desigualdad

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|.$$

Para ver que el recíproco no es cierto, consideremos el ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Esta serie alternada converge, en virtud del Teorema 12-16, pero no converge absolutamente

12—19 TEOREMA. *Sea $\sum a_n$ una serie dada de términos reales y definamos*

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

entonces:

I) *Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son ambas divergentes.*

II) *Si $\sum |a_n|$ converge, $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son ambas convergentes y tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

NOTA. $p_n = a_n$ y $q_n = 0$ si $a_n \geq 0$, mientras que $q_n = -a_n$ y $p_n = 0$ si $a_n \leq 0$.

Demostración. Tenemos $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$. Para demostrar I), supongamos que $\sum a_n$ converge y $\sum |a_n|$ diverge. Si $\sum q_n$ converge, entonces $\sum p_n$ también converge (por el Teorema 12-8), ya que $p_n = a_n + q_n$. De la misma manera, si $\sum p_n$ converge, es $\sum q_n$ también convergente. Por lo tanto, si una u otra de las series $\sum p_n$ o $\sum q_n$ converge, *ambas* deben converger y deducimos que $\sum |a_n|$ converge, ya que $|a_n| = p_n + q_n$. Esta contradicción demuestra I).
Para probar II), utilizamos 4) en unión del Teorema 12-8.

12-9 Parte real y parte imaginaria de una serie compleja. Sea $\sum c_n$ una serie con términos complejos y escribamos $c_n = a_n + ib_n$, siendo a_n y b_n reales. Las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ se llaman, respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de $\sum c_n$. Al considerar series complejas, conviene con frecuencia tratar separadamente las partes real e imaginaria. Naturalmente, la convergencia de las dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ implica la de $\sum c_n$. Recíprocamente, la convergencia de $\sum c_n$ implica la convergencia de las dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$. Las mismas observaciones subsisten para la convergencia *absoluta*. No obstante,

cuando $\sum c_n$ es *condicionalmente* convergente, una (pero no ambas) de las series $\sum a_n$ o $\sum b_n$ puede ser absolutamente convergente. (Ver Ejercicio 12-19.)

Si $\sum c_n$ converge absolutamente, podemos aplicar la parte II) del Teorema 12-19 a las partes real e imaginaria separadamente para obtener la descomposición

$$\sum c_n = \sum (p_n + iu_n) - \sum (q_n + iv_n),$$

donde $\sum p_n$, $\sum q_n$, $\sum u_n$, $\sum v_n$ son series convergentes de términos no negativos.

12-10 Criterios de convergencia para series de términos positivos.

12—20 TEOREMA. (*Criterio de comparación*). *Si $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, y existen dos constantes positivas c y N tales que*

$$a_n < cb_n \quad \text{para } n \geq N,$$

la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Demostración. Las sumas parciales de $\sum a_n$ están acotadas si lo están las de $\sum b_n$. Recordando el Teorema 12-9, queda demostrado el teorema.

12—21 TEOREMA. (*Criterio de comparación por paso al límite.*) *Supongamos que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, y que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

En estas condiciones, $\sum a_n$ converge si converge $\sum b_n$, y recíprocamente.

Demostración. Existe un N tal que $n \geq N$ implica $\frac{1}{2} < a_n/b_n < \frac{3}{2}$. El teorema queda demostrado aplicando dos veces el Teorema 12-20.

NOTA. Subsiste también el Teorema 12-21 si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$, con tal de que $c \neq 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$, tan sólo podemos concluir que la convergencia de $\sum b_n$ implica la de $\sum a_n$.

Para poner en práctica los criterios de comparación, debemos tener a nuestra disposición algunos ejemplos de series de comportamiento conocido. Uno de los tipos de series más importantes para este objeto es el de las *series geométricas.*

12—22 TEOREMA. *Si $|x| < 1$, la serie $1 + x + x^2 + \cdots$ converge y tiene por suma $1/(1 - x)$. Si $|x| \geq 1$, la serie diverge.*

Demostración. $(1 - x) \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}$. Cuando $|x| < 1$, encontramos $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Si $|x| \geq 1$, el término general no tiende a cero y la serie no puede ser convergente.

Otros ejemplos de series de comportamiento conocido pueden obtenerse fácilmente aplicando el *criterio integral.*

12—23 TEOREMA. (*Criterio integral*). *Sea f una función positiva decreciente definida en* $[1, +\infty]$ *tal que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Para* $n = 1, 2, \ldots,$ *definamos*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f(x)\,dx; \qquad d_n = s_n - t_n.$$

Tenemos entonces:

I) $0 < f(n + 1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$, *para* $n = 1, 2, \ldots$.

II) $\lim_{n\to\infty} d_n$ *existe.*

III) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge si la sucesión* $\{t_n\}$ *converge, y recíprocamente.*

IV) $0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k)$, *para* $k = 1, 2, \ldots$.

Demostración. Para demostrar I), escribamos

$$t_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(k)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n.$$

Esto implica $f(n + 1) = s_{n+1} - s_n \leq s_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1}$, y obtenemos

$$0 < f(n + 1) \leq d_{n+1}.$$

Pero también tenemos

$$d_n - d_{n+1} = t_{n+1} - t_n - (s_{n+1} - s_n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n + 1) \tag{5}$$

$$\geq \int_n^{n+1} f(n + 1)\,dx - f(n + 1) = 0,$$

y, por tanto, $d_{n+1} \leq d_n \leq d_1 = f(1)$. Esto demuestra I). Pero ahora es evidente que I) implica II) y que II) implica III).

Para demostrar la parte IV), utilicemos otra vez 5) y escribamos

$$0 \leq d_n - d_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx - f(n + 1) = f(n) - f(n + 1).$$

Sumando respecto de n, logramos

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)), \quad \text{si } k \geq 1.$$

Y al calcular las sumas de estas series, obtenemos IV).

NOTA. Consideremos $D = \lim_{n\to\infty} d_n$. Entonces I) implica $0 \leq D \leq f(1)$, mientras que IV) nos da

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx - D \leq f(n). \tag{6}$$

Esta desigualdad es de gran utilidad para aproximar ciertas sumas finitas por medio de integrales.

12—24 DEFINICIÓN. *Dadas dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *de manera que* $b_n \geq 0$ *para todo* n. *Escribimos*

$$a_n = O(b_n)$$

si existe una constante $M > 0$ *tal que* $|a_n| \leq M b_n$ *para todo* n. *Escribimos*

$$a_n = o(b_n) \quad \textit{cuando } n \to \infty$$

si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$.

NOTA. Una ecuación de la forma $a_n = c_n + O(b_n)$ significa, $a_n - c_n = O(b_n)$. Análogamente, $a_n = c_n + o(b_n)$ significa $a_n - c_n = o(b_n)$.

La ventaja de esta notación consiste en que nos permite reemplazar ciertas desigualdades por igualdades. Por ejemplo 6) implica

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + D + O(f(n)). \tag{7}$$

EJEMPLOS.

1. Consideremos $f(x) = 1/x$ en el Teorema 12-23. Encontramos $t_n = \log n$ y por tanto $\sum 1/n$ diverge. No obstante, II) establece la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right),$$

un famoso número llamado la *constante de Euler*, designada corrientemente por C (o por γ). La ecuación 7) se convierte en

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{8}$$

2. Consideremos $f(x) = x^{-s}$, $s \neq 1$, en el Teorema 12-23. Encontramos que $\sum n^{-s}$ converge si $s > 1$ y diverge si $s < 1$. Para $s > 1$, esta serie define una función muy importante en análisis que se llama la *función ζ de Riemann*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s > 1).$$

Para $s > 0$, $s \neq 1$, podemos aplicar 7) para escribir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s} - 1}{1 - s} + C(s) + O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

donde $C(s) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} k^{-s} - (n^{1-s} - 1)/(1 - s))$.

12-11 Criterios del cociente y de la raíz.

12—25 TEOREMA. (*Criterio del cociente.*) *Dada una serie de términos complejos no nulos, consideremos*

$$r = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad R = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

a) *La serie $\sum a_n$ converge absolutamente si $R < 1$*

b) *La serie $\sum a_n$ diverge si $r > 1$*

c) *El criterio no conduce a ninguna conclusión si $r \leq 1 \leq R$.*

Demostración. Supongamos que $R < 1$ y elijamos x tal que $R < x \leq 1$. La definición de R implica la existencia de un N tal que $|a_{n-1}/a_n| < x$ si $n \geq N$. Ya que $x = x^{n-1}/x^n$, esto significa que

$$\frac{|a_{n+1}|}{x^{n+1}} < \frac{|a_n|}{x^n} \leq \frac{|a_N|}{x^N}, \qquad \text{si } n \geq N,$$

y, por lo tanto, $|a_n| \leq cx^n$ si $n \geq N$, donde $c = |a_N|x^{-N}$. La afirmación a) se deduce ahora aplicando el criterio de comparación.

Para demostrar b), observemos simplemente que $r > 1$ implica $|a_{n+1}| > |a_n|$ y, por tanto, no se cumple la condición necesaria para la convergencia $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Para demostrar c), consideremos los dos ejemplos $\sum n^{-1}$ y $\sum n^{-2}$. En ambos casos, $r = R = 1$ pero $\sum n^{-1}$ diverge, mientras que $\sum n^{-2}$ converge.

12—26 TEOREMA. (*Criterio de la raíz.*) *Dada una serie $\sum a_n$ de términos complejos, consideremos*

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

a) *La serie* $\sum a_n$ *converge absolutamente si* $\rho < 1$.

b) *La serie* $\sum a_n$ *diverge si* $\rho > 1$.

c) *Nada puede afirmarse si* $\rho = 1$.

Demostración. Supongamos que $\rho < 1$ y elijamos x de modo que $\rho < x < 1$. La definición de ρ implica la existencia de un N tal que $|a_n| < x^n$ para $n \geq N$. Luego, $\sum |a_n|$ converge en virtud del criterio de comparación. Esto demuestra a).

Para demostrar b), observemos que $\rho < 1$ implica $|a_n| > 1$ y por tanto no puede ser $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Finalmente, c) se demuestra utilizando los mismos ejemplos que en el Teorema 12-25.

NOTA. El criterio de la raíz es más «potente» que el del cociente. Esto es, siempre que el criterio de la raíz no da origen a conclusión, el del cociente tampoco. Pero existen ejemplos en los cuales el criterio del cociente cae en el caso dudoso y en cambio con el de la raíz se decide la cuestión. (Ver Ejercicio 12-4.)

12-12 Criterios de Dirichlet y Abel. Todos los criterios del párrafo anterior nos sirven para determinar la convergencia *absoluta* de una serie de términos complejos. Es importante también disponer de criterios para determinar la convergencia cuando la serie no fuera absolutamente convergente. Los criterios que se dan en este párrafo son especialmente útiles para esta finalidad. Todos dependen de una *fórmula de sumación parcial* de Abel (igualdad 9 del próximo teorema).

12—27 TEOREMA. *Si* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son dos sucesiones de números complejos, definamos*

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Tenemos entonces la identidad

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k). \tag{9}$$

Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *converge, si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1} - b_k)$ *y la sucesión* $\{A_n b_{n+1}\}$ *son ambas convergentes.*

Demostración. Escribiendo $A_0 = 0$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1}.$$

La segunda afirmación del teorema resulta inmediatamente de esta identidad.

NOTA. La fórmula 9) es análoga a la de la integración por partes de una integral de Riemann-Stieltjes. En realidad, puede ser considerada como un caso particular del Teorema 9-6. (Ver Ejercicio 9-6.)

12—28 TEOREMA. (*Criterio de Dirichlet.*) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos complejos cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada. Sea $\{b_n\}$ una sucesión decreciente que converge hacia* 0. *La serie $\sum a_n b_n$ es entonces convergente.*

Demostración. Consideremos $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ y supongamos que $|A_n| \leq M$ para todo n. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0.$$

Por consiguiente, para establecer la convergencia de $\sum a_n b_n$ necesitamos tan sólo demostrar que $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$ es convergente. Puesto que $b_n \searrow$, tenemos

$$|A_k(b_{k+1} - b_k)| \leq M(b_k - b_{k+1}).$$

Pero la serie $\sum(b_{k+1} - b_k)$ es convergente (ver Teorema 12-10). Luego el criterio de comparación implica la convergencia *absoluta* de $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$.

12—29 TEOREMA. (*Criterio de Abel.*) *La serie $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ converge y $\{b_n\}$ es una sucesión monótona convergente.*

Demostración. La convergencia de $\sum a_n$ y de $\{b_n\}$ establece la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, donde $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. También, $\{A_n\}$ es una sucesión acotada. El resto de la demostración es parecida a la del Teorema 12-28. (En el Ejercicio 12-27, se dan dos criterios más, parecidos a los anteriores.)

Para utilizar prácticamente el criterio de Dirichlet, debemos conocer algunas series que tengan sumas parciales acotadas. Naturalmente, todas las series *convergentes* gozan de esta propiedad. En el teorema que sigue damos un ejemplo de una serie divergente cuyas sumas parciales están acotadas. La fórmula para las sumas parciales de la serie en este ejemplo particular es de importancia fundamental en la teoría de las series de Fourier.

12—30 TEOREMA. *Para todo número real $x \neq 2m\pi$ (m entero), tenemos*

10) $$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\operatorname{sen}(nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)} e^{i(n+1)x/2}.$$

NOTA. Esta identidad da origen a la siguiente fórmula de aproximación:

11) $$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}(x/2)|}.$$

Demostración. $(1 - e^{ix}) \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{ikx} - e^{i(k+1)x}) = e^{ix} - e^{i(n+1)x}$.
Esto establece la primera igualdad de 10). La segunda se deduce de la identidad

$$e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\, e^{i(n+1)x/2}.$$

NOTA. Considerando las partes real e imaginaria de 10), obtenemos

12) $$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos (n+1)\frac{x}{2}\Big/\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2n+1)\frac{x}{2}\Big/\operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

13) $$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}\Big/\operatorname{sen}\frac{x}{2}.$$

Utilizando 10), podemos también escribir

14) $$\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x} = e^{-ix}\sum_{k=1}^{n} e^{ik(2x)} = \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\, e^{inx},$$

identidad válida para todo $x \neq m\pi$ (m entero). Tomando las partes real e imaginaria de 14) resulta

15) $$\sum_{k=1}^{n} \cos (2k-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x},$$

16) $$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} (2k-1)x = \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{\operatorname{sen} x}.$$

Las fórmulas 12) y 16) se presentan en la teoría de las series de Fourier.

12-13 Reordenación de series. En este párrafo, P representa el conjunto de los enteros positivos, $P = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

12–31 DEFINICIÓN. *Sea f una función cuyo dominio es P y cuyo recorrido es P, y supongamos que f es uno a uno en P. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series tales que*

17) $$a_n = b_{f(n)} \quad \textit{para } n = 1, 2, \ldots.$$

Entonces $\sum b_n$ se llama una reordenación de $\sum a_n$.

NOTA. La igualdad 17) implica $b_n = a_{f^{-1}(n)}$ y, por tanto, $\sum a_n$ es también una reordenación de $\sum b_n$.

12—32 TEOREMA. *Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente que tiene por suma s. Toda reordenación de $\sum a_n$ también converge absolutamente y tiene suma s.*

Demostración. Sea $\{b_n\}$ una sucesión definida por 17). Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N de modo que $n \geq N$ implique

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } p = 1, 2, \ldots .$$

Se deduce que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| \leq \varepsilon/2$. Consideremos $g = f^{-1}$ y elijamos M de modo que $\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{g(1), g(2), \ldots, g(M)\}$. Entonces $n > M$ implica $g(n) > N$, y por lo tanto para ese valor n tenemos

$$|b_{n+1}| + \cdots + |b_{n+p}|$$
$$= |a_{g(n+1)}| + \cdots + |a_{g(n+p)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\sum b_n$ converge absolutamente.

Para demostrar que $\sum b_n = s$, consideremos $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N de modo que $|s_N - s| < \varepsilon/2$ y que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| \leq \varepsilon/2$. Entonces

$$|t_n - s| \leq |t_n - s_N| + |s_N - s| < |t_n - s_N| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ahora elegimos M como en la primera parte de la demostración, $n > M$ implica

$$|t_n - s_N| = |b_1 + \cdots + b_n - (a_1 + \cdots + a_N)|$$
$$= |a_{g(1)} + \cdots + a_{g(n)} - (a_1 + \ldots + a_N)|$$
$$\leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ya que todos los términos $a_1, \ldots, a_N$ se destruyen unos con otros en la sustracción. Luego, $n > M$ implica $|t_n - s| < \varepsilon$ y esto significa que $\sum b_n = s$.

La hipótesis de la convergencia absoluta es esencial en el Teorema 12-32. RIEMANN descubrió que cualquier serie *condicionalmente* convergente de términos reales puede ser reordenada para dar origen a una serie que converja hacia una suma prefijada. Este hecho notable es una consecuencia del teorema siguiente:

12—33 TEOREMA. *Sean $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente de términos reales. Sean x e y números dados en el intervalo cerrado $[-\infty, +\infty]$, siendo $x \leq y$. Existe entonces una reordenación $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = x \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} t_n = y,$$

donde $t_n = b_1 + \cdots + b_n$.

Demostración. Prescindiendo en una serie de aquellos términos que son nulos, no se altera su convergencia o divergencia. Por tanto, podríamos muy bien suponer que ningún término de $\sum a_n$ es cero. Designemos por p_n el n-ésimo término positivo de $\sum a_n$ y por $-q_n$ el n-ésimo término negativo. Entonces $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son dos series de términos positivos divergentes. [¿Por qué?] Construyamos luego dos sucesiones de números reales, por ejemplo, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $x_n < y_n$, $y_1 > 0$. La idea de la demostración es ahora muy sencilla. Tomamos un número de términos positivos (por ejemplo k_1) estrictamente necesarios para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} > y_1,$$

seguidos de los términos negativos (por ejemplo r_1) precisos para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} < x_1.$$

A continuación, incorporamos otro bloque de términos posteriores positivos precisos para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} > y_2,$$

seguidos de los términos negativos siguientes indispensables para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} < x_2.$$

Estos pasos son posibles ya que $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son series de términos positivos ambas divergentes. Si este proceso se va repitiendo, obtenemos evidentemente una reordenación de $\sum a_n$. Dejamos al lector la demostración de que las sumas parciales de esta reordenación tienen como límite superior y y como límite inferior x.

12–34 DEFINICIÓN. *Sea f una función cuyo dominio sea P y cuyo recorrido es un subconjunto infinito Q de P, y supongamos que f es uno a uno en P. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series dadas tales que*

$$b_n = a_{f(n)}, \quad \text{si} \quad n \in P.$$

Se dice entonces que $\sum b_n$ es una subserie de $\sum a_n$ o que es una serie contenida en $\sum a_n$ o entresacada de $\sum a_n$.

12–35 TEOREMA. *Si $\sum a_n$ converge absolutamente, toda subserie $\sum b_n$ también converge absolutamente. Además, tenemos*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Demostración. Dado n, sea N el mayor entero del conjunto $\{f(1), \ldots, f(n)\}$. Entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

La desigualdad $\sum_{k=1}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ implica la convergencia absoluta de $\sum b_n$.

12—36 TEOREMA. *Sea $\{f_1, f_2, \ldots\}$ un conjunto numerable de funciones, cada una definida en P, que gozan de las siguientes propiedades:*

a) *Cada f_n es uno a uno en P.*

b) *El recorrido $f_n(P)$ es un subconjunto Q_n de P.*

c) *$\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ es un sistema de conjuntos disjuntos cuya reunión es P.*

Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente y definamos

$$b_k(n) = a_{f_k(n)}, \qquad si\ n \in P,\ k \in P.$$

Entonces:

I) *Para cada k, $\sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$ es una subserie de $\sum a_n$ absolutamente convergente.*

II) *Si $s_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ converge absolutamente y tiene la misma suma que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Demostración. El Teorema 12-35 implica I). Para demostrar II), consideremos $t_k = |s_1| + \cdots + |s_k|$. Entonces

$$t_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_1(n)| + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} |b_k(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} (|b_1(n)| + \cdots + |b_k(n)|)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{f_1(n)}| + \cdots + |a_{f_k(n)}|).$$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_{f_1(n)}| + \cdots + |a_{f_k(n)}|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Esto prueba que $\sum |s_k|$ tiene las sumas parciales acotadas y, por lo tanto, $\sum s_k$ converge absolutamente.

Para encontrar la suma de $\sum s_k$, hacemos lo siguiente: Dado $\varepsilon > 0$ elegimos N de modo que $n \geq N$ implique

18) $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Elegimos suficientes funciones $f_1, \ldots, f_r$ de modo que cada término $a_1, a_2, \ldots, a_N$ aparecerá en algún lugar de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f_1(n)} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{f_r(n)}.$$

El número r depende de N y por tanto de ε. Si $n > r$ y $n > N$, tenemos

$$19) \qquad \left| s_1 + s_2 + \cdots + s_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}$$

debido a que los términos $a_1, a_2, \ldots, a_N$ se destruyen en la sustracción. Ahora 18) implica

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Al combinar ésta con 19) encontramos

$$\left| s_1 + \cdots + s_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon$$

si $n > r$, $n > N$. Esto completa la demostración de II).

12-14 Sucesiones dobles. Como en el párrafo anterior, P representa el conjunto de los enteros positivos. También, escribimos $P \times P$ para el producto cartesiano de P por sí mismo.

12—37 Definición. *Una función f cuyo dominio es $P \times P$ se llama una sucesión doble.*

Nota. Nos ocuparemos tan sólo de las sucesiones dobles reales o complejas.

12—38 Definición. *Si $a \in E_2$, escribimos $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q) = a$ y decimos que la sucesión doble f converge hacia a, cuando se satisface la siguiente condición: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un N tal que $|f(p, q) - a| < \varepsilon$ siempre que $p > N$ y $q > N$.*

12—39 Teorema. *Supongamos que $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q) = a$. Para cada p fijo, supongamos que existe el $\lim_{q\to\infty} f(p, q)$. Entonces, también existe el $\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q))$ y tiene el valor a.*

Nota. Para distinguir $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q)$ de $\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q))$, el primero se llama *límite doble*, el segundo *límite iterado*.

Demostración. Consideramos $F(p) = \lim_{q\to\infty} f(p, q)$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N_1 de manera que

20) $$|f(p, q) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } p > N_1 \quad \text{y} \quad q > N_1.$$

Para cada p podemos elegir N_2 de modo que

21) $$|F(p) - f(p, q)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } q > N_2.$$

(Observemos que N_2 depende tanto de p como de ε.) Para cada $p > N_1$ elijamos N_2, y entonces tomemos un q fijo mayor que N_1 y N_2. Las desigualdades 20) y 21) son ambas válidas entonces y, por lo tanto

$$|F(p) - a| < \varepsilon, \quad \text{si } p > N_1.$$

Por consiguiente, $\lim_{p\to\infty} F(p) = a$.

NOTA. Se obtiene un resultado parecido si intercambiamos los papeles de p y q.

Así pues, la existencia del límite doble $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q)$ y de $\lim_{q\to\infty} f(p, q)$ implica la existencia del límite iterado.

$$\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q)).$$

El ejemplo siguiente demuestra que el recíproco no es cierto. Consideremos

$$f(p, q) = \frac{pq}{p^2 + q^2}, \quad (p = 1, 2, \ldots, q = 1, 2, \ldots).$$

En este caso $\lim_{q\to\infty} f(p, q) = 0$ y, por tanto, $\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q)) = 0$. Pero $f(p, q) = \frac{1}{2}$ cuando $p = q$ y $f(p, q) = \frac{2}{5}$ cuando $p = 2q$, y, por consiguiente, no puede existir el límite doble.

Introduciendo la noción de *convergencia uniforme* puede establecerse un recíproco conveniente del Teorema 12-39. (Esto se verá en el próximo capítulo. Ver Teorema 13-2.)

En el Ejercicio 12-28 se dan otros ejemplos que ilustran el comportamiento de las sucesiones dobles.

12-15 Series dobles.

12—40 DEFINICIÓN. *Sea f una sucesión doble. La sucesión doble s definida por la igualdad*

$$s(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} f(m, n)$$

se denomina una serie doble y se representa por el símbolo $\sum_{m,n} f(m, n)$ o, más brevemente, por $\sum f(m, n)$. Se dice que la serie doble converge hacia una suma a si

$$\lim_{p, q \to \infty} s(p, q) = a.$$

Cada número $f(m, n)$ es un *término* de la serie doble y cada $s(p, q)$ es una suma parcial. Si $\sum f(m, n)$ tiene tan sólo términos positivos, es fácil demostrar que converge si el conjunto de las sumas parciales está acotado y recíprocamente. (Ver Ejercicio 12-29.) Decimos que $\sum f(m, n)$ converge *absolutamente* si $\sum |f(m, n)|$ converge. El Teorema 12-18 es válido para las series dobles. (Ver Ejercicio 12-29.)

12—41 DEFINICIÓN. *Sean f una sucesión doble y g una función uno a uno definida en P con recorrido $P \times P$. Sea G la sucesión definida por $G(n) = f[g(n)]$ si $n \in P$. Se dice entonces que g es una ordenación de la sucesión doble f en la sucesión G.*

12—42 TEOREMA. *Sean $\sum f(m, n)$ una serie doble dada y g una ordenación de la sucesión doble f en una sucesión G. Entonces*

a) *$\sum G(n)$ converge absolutamente si $\sum f(m, n)$ converge absolutamente, y recíprocamente. Suponiendo que $\sum f(m, n)$ converja absolutamente con suma S, tenemos además:*

b) *$\sum_{n=1}^{\infty} G(n) = S$.*

c) *$\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ y $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ son ambas absolutamente convergentes.*

d) *Si $A_m = \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ y $B_n = \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$, las series $\sum A_m$ y $\sum B_n$ son ambas absolutamente convergentes y tienen por suma S. Esto es,*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = S.$$

Demostración. Consideremos $T_k = |G(1)| + \cdots + |G(k)|$ y

$$S(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} |f(m, n)|.$$

Entonces, para cada k, existe un par p, q tal que $T_k \leq S(p, q)$ y, recíprocamente, para cada par (p, q) existe un entero r tal que $S(p, q) \leq T_r$. Estas desigualdades nos dicen que $\sum |G(n)|$ tiene sumas parciales acotadas si $\sum |f(m, n)|$ tiene sumas parciales acotadas, y recíprocamente. Esto prueba a).

Supongamos ahora que $\sum |f(m, n)|$ converge. Antes de demostrar b), demostraremos que la suma de la serie $\sum G(n)$ es independiente de la función g utilizada para construir G a partir de f. Para ver esto, sea h otra ordenación de la sucesión doble f en una sucesión H. Tenemos entonces

$$G(n) = f[g(n)] \quad \text{y} \quad H(n) = f[h(n)].$$

Pero esto significa que $G(n) = H[k(n)]$, donde $k(n) = h^{-1}[g(n)]$. Ya que k es una aplicación uno a uno de P sobre P, la serie $\sum H(n)$ es una reordenación de $\sum G(n)$, y, por tanto, tiene la misma suma. Designemos esta suma común por S'. Demostraremos más adelante que $S' = S$.

Observemos ahora que cada serie de c) es una subserie de $\sum G(n)$. Luego c) se deduce de a). Aplicando el Teorema 12-36, llegamos a la conclusión de que $\sum A_m$ converge absolutamente y tiene suma S'. Lo mismo es cierto para $\sum B_n$. Queda por probar que $S' = S$.

A tal fin consideremos $T = \lim_{p,q\to\infty} S(p, q)$. Fijado $\varepsilon > 0$, elijamos N de manera que $0 \leq T - S(p, q) < \varepsilon/2$ siempre que $p > N$ y $q > N$. Escribamos ahora

$$t_k = \sum_{n=1}^{k} G(n), \qquad s(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} f(m, n).$$

Elijamos M de modo que t_M incluya todos los términos $f(m, n)$ para los que $1 \leq m \leq N + 1$, $1 \leq n \leq N + 1$. Entonces $t_M - s(N + 1, N + 1)$ es una suma de términos $f(m, n)$ en los que $m > N$ o $n > N$. Por consiguiente, si $n \geq M$, tenemos ·

$$|t_n - s(N + 1, N + 1)| \leq T - S(N + 1, N + 1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Análogamente,

$$|S - s(N + 1, N + 1)| \leq T - S(N + 1, N + 1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así pues, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar siempre un M tal que $|t_n - S| < \varepsilon$ siempre que $n \geq M$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} t_n = S'$, se deduce que $S' = S$.

NOTA. Las series $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ se llaman «series de series.» La convergencia de ambas no implica su igualdad. Por ejemplo, supongamos

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n + 1,\ n = 1, 2, \ldots, \\ -1, & \text{si } m = n - 1,\ n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = -1 \qquad \text{pero} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = 1.$$

Un caso importante en el cual las dos «series de series» *son iguales* se expone en el siguiente teorema.

12-43 Teorema. *Supongamos $f(m, n) \geq 0$ para todo par m, n. Admitamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ converge para cada valor fijo $m = 1, 2, \ldots$, y que converge $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$. Entonces:*

a) $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ converge para cada $n = 1, 2, \ldots$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ converge y coincide con $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$.

Demostración. Para cada n fijo tenemos $f(m, n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(m, k)$ y por tanto

$$\sum_{m=1}^{M} f(m, n) \leq \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{\infty} f(m, k).$$

Basta considerar que $M \to \infty$ para demostrar a). Para probar b), sea $A_n = \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{q} A_n = \sum_{n=1}^{q} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{q} f(m, n) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = S,$$

donde para simplificar hemos llamado S al segundo miembro de la anterior desigualdad. Luego $\sum A_n$ converge y tiene una suma $S' \leq S$. Pero un razonamiento semejante demuestra $S \leq S'$. Por consiguiente, $S = S'$ con lo que b) queda demostrado.

Nota. En la demostración se ha hecho especial uso de la circunstancia de que los términos eran no-negativos. Un teorema más general se demostrará más adelante para términos complejos cualesquiera. (Ver Teorema 13-9.)

12—44 Teorema. *Sean $\sum a_m$ y $\sum b_n$ dos series absolutamente convergentes con sumas A y B, respectivamente. Sea f la sucesión doble definida mediante la igualdad*

$$f(m, n) = a_m b_n, \qquad si\ (m, n) \in P \times P.$$

Entonces $\sum_{m,n} f(m, n)$ converge absolutamente y tiene la suma AB.

Demostración. Sea g una ordenación cualquiera de la sucesión doble f en una sucesión G, y consideremos $T_k = |G(1)| + \cdots + |G(k)|$. Cada término en esta suma parcial es de la forma $|a_m|\ |b_n|$. Si p representa el mayor índice m, y q el mayor n, de manera que $|a_m|\ |b_n|$ figure en la suma parcial T_k, con seguridad tenemos entonces

$$T_k \leq \sum_{m=1}^{p} |a_m| \sum_{n=1}^{q} |b_n| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

Luego $\sum |G(n)|$ converge, ya que sus sumas parciales están acotadas. De la parte a) del Teorema 12-42, concluimos que $\sum f(m, n)$ también converge absolutamente.

Para demostrar que $\sum f(m, n)$ tiene suma AB, consideremos la ordenación particular g definida como sigue: $g(1) = (1, 1)$; una vez definidos $g(1)$, $g(2)$, ..., $g(n^2)$, sea

$$g(n^2 + k) = (n + 1,\ k) \qquad \text{si } 1 \leq k \leq n + 1,$$
$$g(n^2 + k) = (2n + 2 - k,\ n + 1) \qquad \text{si } n + 2 \leq k \leq 2n + 1.$$

La función g así definida aplica P de manera «uno a uno» sobre $P \times P$. Consideremos $G(n) = f[g(n)]$ y $t_n = G(1) + \cdots + G(n)$. La función g ha sido construida de modo que t_{n^2} es exactamente la suma de aquellos n^2 términos $a_p b_q$ para los cuales $p = 1, 2, \ldots, n$ y $q = 1, 2, \ldots, n$. Luego

$$t_{n^2} = \sum_{p=1}^{n} a_p \sum_{q=1}^{n} b_q.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} t_{n^2} = AB$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} t_n = AB$. Esto es, para esta ordenación particular tenemos $\sum G(n) = AB$. Según el Teorema 12-42, se deduce que $\sum f(m, n)$ también tiene suma AB.

12-16 Multiplicación de series. Dadas dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$, siempre podemos formar la serie doble $\sum f(m, n)$, donde $f(m, n) = a_m b_n$. Toda ordenación g de f en una sucesión G, nos conduce a otra serie $\sum G(n)$. Por analogía con las sumas finitas, parece natural referirnos a $\sum f(m, n)$ o a $\sum G(n)$ como al «producto» de $\sum a_n$ y $\sum b_n$, y el Teorema 12-44 justifica esta terminología cuando las dos series dadas $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes. Sin embargo, si una de las dos es *condicionalmente* convergente, no tenemos garantía alguna de que una u otra de las series $\sum f(m, n)$ o $\sum G(n)$ será convergente. Además, si una de ellas converge, su suma no es necesariamente AB. La convergencia y la suma dependerán de la ordenación g. Elecciones distintas de g pueden originar distintos valores del producto. Existe un caso muy importante en el cual los términos $f(m, n)$ son ordenados «diagonalmente» para dar origen a $\sum G(n)$ y son introducidos paréntesis agrupando juntos aquellos términos $a_m b_n$ para los cuales $m + n$ tiene un valor fijo. Este producto se llama *producto de Cauchy* y se define como sigue:

12–45 Definición. *Dadas dos series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, *definamos*

22) $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \qquad \text{si } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *se llama el producto de Cauchy de* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$.

Nota. El producto de Cauchy se presenta de manera espontánea al multiplicar dos series de potencias. (Ver Ejercicio 12-33.)

En virtud de los Teoremas 12-44 y 12-13, la convergencia absoluta de las *dos series* $\sum a_n$ y $\sum b_n$ implica la convergencia del producto de Cauchy hacia el número

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \tag{23}$$

Esta igualdad puede no ser cierta si las dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son *condicionalmente* convergentes. (Ver Ejercicio 12-32.) No obstante, podemos demostrar que 23) es válida si por lo menos *una* de las series $\sum a_n$, $\sum b_n$ es absolutamente convergente.

12—46 Teorema. (*Mertens.*) *Supongamos que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente y tiene suma A, y que* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge teniendo suma B. En tal caso el producto de Cauchy de las dos series converge y tiene suma AB.*

Demostración. Definamos $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, donde c_k está dado por 22). Consideremos $d_n = B - B_n$ y $e_n = \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}$. Entonces

$$C_p = \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{p} f_n(k), \tag{24}$$

donde

$$f_n(k) = \begin{cases} a_k b_{n-k}, & \text{si } n \geq k, \\ 0, & \text{si } n < k. \end{cases}$$

Entonces 24) se convierte en

$$C_p = \sum_{k=0}^{p}\sum_{n=0}^{p} f_n(k) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{n=k}^{p} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{m=0}^{p-k} b_m = \sum_{k=0}^{p} a_k B_{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k (B - d_{p-k}) = A_p B - e_p.$$

Para completar la demostración, basta probar que $e_p \to 0$ cuando $p \to \infty$. La sucesión $\{d_n\}$ converge hacia 0, ya que $B = \sum b_n$. Elijamos $m > 0$ de manera que $|d_n| \leq M$ para todo n, y consideramos $k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N de modo que $n > N$ implique $|d_n| < \varepsilon/(2k)$ y al propio tiempo que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Entonces, para $p > 2N$, podemos escribir

$$|e_p| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^{p} |a_k d_{p-k}|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{k=0}^{N} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{p} |a_k|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto demuestra que $e_p \to 0$ cuando $p \to \infty$, y por lo tanto $C_p \to AB$ cuando $p \to \infty$.

Un teorema (debido a Abel) relacionado con el anterior, en el cual no se exige convergencia absoluta alguna, se demostrará en el próximo capítulo. (Ver Teorema 13-34.)

Otro producto, conocido con el nombre de *producto de Dirichlet*, tiene especial importancia en la Teoría de Números. Tomamos $a_0 = b_0 = 0$ y, en lugar de definir c_n por medio de 22), usamos la fórmula

25) $$c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde $\sum_{d|n}$ significa una suma extendida sobre todos los *divisores* de n (incluyendo 1 y n). Por ejemplo, $c_6 = a_1b_6 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_6b_1$, y $c_7 = a_1b_7 + a_7b_1$. Un teorema análogo al de Mertens también es válido para este producto. El producto de Dirichlet se presenta espontáneamente cuando multiplicamos series de Dirichlet. (Ver Ejercicio 12-34.)

12-17 Sumabilidad de Cesàro.

12—47 DEFINICIÓN *Designemos por s_n la suma parcial n-ésima de la serie $\sum a_n$, y sea $\{\sigma_n\}$ la sucesión de medidas aritméticas definida por*

26) $$\sigma_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}, \qquad si\ n = 1, 2, \ldots.$$

Se dice que la serie $\sum a_n$ es sumable Cesàro (o sumable (C, 1)) si σ_n converge. Si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$, entonces S es la suma Cesàro (o suma (C, 1)) de $\sum a_n$, y escribimos

$$\sum a_n = S \quad (C,\ 1).$$

EJEMPLOS.

1. Sea $a_n = z^n$, $|z| = 1$, $z \neq 1$. Entonces

$$s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}$$

y

$$\sigma_n = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{n}\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \qquad (C, 1).$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \tfrac{1}{2} \qquad (C, 1).$$

2. Sea $a_n = (-1)^{n+1}n$. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sigma_n = \tfrac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \inf \sigma_n = 0,$$

y, por lo tanto, $\sum(-1)^{n+1}n$ no es sumable $(C, 1)$.

12—48 Teorema. *Si una serie es convergente y tiene por suma S, también es sumable (C, 1) y tiene suma Cesàro S.*

Demostración. Designemos por s_n la suma parcial n-ésima de la serie, definamos σ_n mediante 26), e introduzcamos $t_n = s_n - S$, $\tau_n = \sigma_n - S$. Tenemos entonces

$$27) \qquad \tau_n = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}$$

y hay que demostrar que $\tau_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Elijamos $A > 0$ de manera que $|t_n| \leq A$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N de modo que $n > N$ implique $|t_n| < \varepsilon$. Tomando en 27) $n > N$, obtenemos

$$|\tau_n| \leq \frac{|t_1| + \cdots + |t_N|}{n} + \frac{|t_{N+1}| + \cdots + |t_n|}{n} < \frac{NA}{n} + \varepsilon.$$

Luego, $\lim \sup_{n\to\infty} |\tau_n| \leq \varepsilon$. Puesto que ε es arbitrario, se deduce que $\lim_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$.

Nota. En realidad hemos demostrado que si una sucesión $\{s_n\}$ converge, la sucesión $\{\sigma_n\}$ de medidas aritméticas también converge y hacia el mismo límite.

La sumabilidad de Cesàro es precisamente uno de los numerosos « métodos de sumabilidad » que pueden emplearse para asignar una « suma » a una serie. El Teorema 12-48 y el Ejemplo 1 (que sigue a la Definición 12-47) nos demuestran que el método de Cesàro tiene un alcance más amplio que la convergencia ordinaria. La teoría de los métodos de sumabilidad es un asunto atractivo e importante, en el cual, no obstante, no podemos entrar aquí. Para un estudio completo de tal teoría remitimos al lector al libro de Hardy *Divergent Series* (Ref. 12-1). Más adelante veremos que la sumabilidad $(C, 1)$ desempeña un importante papel en la teoría de las series de Fourier. (Ver Teorema 15-21.)

12-18 Productos infinitos. En este párrafo ofrecemos una breve introducción a la teoría de los productos infinitos.

12—49 DEFINICIÓN. *Dada una sucesión $\{u_n\}$ de números reales o complejos, consideremos*

$$p_1 = u_1, \quad p_2 = u_1u_2, \quad p_n = u_1u_2 \cdots u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k. \tag{28}$$

Una sucesión $\{p_n\}$ así formada se llama un producto infinito (o simplemente, un producto). El número p_n es el producto parcial n-ésimo y u_n es el factor n-ésimo. Para representar los productos infinitos definidos por 28), *se utilizan los siguientes símbolos:*

$$u_1u_2 \cdots u_n \cdots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{29}$$

NOTA. El símbolo $\Pi_{n=N+1}^{\infty} u_n$ significa $\Pi_{n=1}^{\infty} u_{N+n}$. Cuando no hay peligro de confusión también escribimos Πu_n.

Por analogía con las series, debiera parecer natural llamar convergente al producto 29) si $\{p_n\}$ converge. No obstante, esta definición no sería conveniente ya que todo producto que tuviera un factor igual a cero debería ser convergente, sin tener en cuenta el comportamiento de los otros factores. La definición siguiente resulta más útil:

12—50 DEFINICIÓN. *Dado un producto infinito $\Pi_{n=1}^{\infty} u_n$, consideremos $p_n = \Pi_{k=1}^{n} u_k$.*

a) *Si una infinidad de factores u_n son cero, decimos que el producto diverge hacia cero.*

b) *Si ningún factor u_n es cero, decimos que el producto converge cuando existe un número $p \neq 0$ tal que $\{p_n\}$ converge hacia p. En este caso, p se llama el valor del producto y escribimos $p = \Pi_{n=1}^{\infty} u_n$. Si $\{p_n\}$ converge hacia cero, decimos que el producto diverge hacia cero.*

c) *Si existe un N tal que $n > N$ implica $u_n \neq 0$, decimos que $\Pi_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, con tal de que $\Pi_{n=N+1}^{\infty} u_n$ converja en el sentido de* b). *En este caso el valor del producto $\Pi_{n=1}^{\infty} u_n$ es*

$$u_1u_2 \cdots u_N \prod_{n=N+1}^{\infty} u_n.$$

d) *$\Pi_{n=1}^{\infty} u_n$ se llama divergente si no es convergente en el sentido expresado en* b) *o en* c).

Advirtamos que el valor de un producto infinito puede ser cero. Pero esto sucede si un número finito de factores son cero y recíprocamente. La convergencia de un producto infinito no se altera introduciendo o suprimiendo un

número finito de factores, nulos o no. Por este motivo la Definición 12-50 es muy conveniente.

EJEMPLO. $\Pi_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)$ y $\Pi_{n=2}^{\infty} (1 - 1/n)$ son ambos divergentes. En el primer caso, $p_n = n + 1$, y en el segundo, $p_n = 1/n$.

12—51 TEOREMA. (*Condición de Cauchy para productos infinitos.*) *El producto infinito Πu_n es convergente si, y únicamente si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $n > N$ implica*

30) $$|u_{n+1}u_{n+2} \cdots u_{n+k} - 1| < \varepsilon, \qquad para\ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Demostración. Supongamos que el producto Πu_n converge. Podemos suponer que ningún u_n es cero (prescindiendo de algunos términos si es necesario). Consideremos $p_n = u_1 \cdots u_n$ y $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. En estas condiciones $p \neq 0$ y por tanto existe un $M > 0$ tal que $|p_n| > M$. Como $\{p_n\}$ satisface a la condición de Cauchy para sucesiones, dado $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $n > N$ implica $|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon M$ para $k = 1, 2, \ldots$ Dividiendo por $|p_n|$ obtenemos 30).

Supongamos ahora que la condición 30) se satisface. Entonces $n > N$ implica $u_n \neq 0$. [¿Por qué?] Tomemos en 30) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, sea N_0 el correspondiente N, y consideremos $q_n = u_{N_0+1}u_{N_0+2} \cdots u_n$ si $n > N_0$. Entonces 30) implica $\frac{1}{2} < |q_n| < \frac{3}{2}$. Por consiguiente, si $\{q_n\}$ converge, no puede converger hacia cero. Para demostrar que $\{q_n\}$ converge, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y escribamos 30) como sigue:

$$\left|\frac{q_{n+k}}{q_n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Esto nos da $|q_{n+k} - q_n| < \varepsilon|q_n| < \frac{3}{2}\ \varepsilon$. Por lo tanto, $\{q_n\}$ satisface la condición de Cauchy para sucesiones luego es convergente. Esto significa que el producto Πu_n converge.

NOTA. Tomando en 30) $k = 1$, encontramos que la convergencia de Πu_n implica $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. Por este motivo, los factores de un producto infinito se escriben así: $u_n = 1 + a_n$. Así pues la convergencia de $\Pi(1 + a_n)$ implica que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

12—52 TEOREMA. *Supongamos que cada $a_n > 0$. El producto $\Pi(1 + a_n)$ converge si la serie $\sum a_n$ converge, y recíprocamente.*

Demostración. Una parte de la demostración se basa en la siguiente desigualdad:

31) $$1 + x \leq e^x.$$

Si bien 31) es válida para todo x real, sólo la necesitamos para $x \geq 0$. Cuando $x > 0$, 31) es una consecuencia inmediata del Teorema del Valor Medio, que nos da

$$e^x - 1 = xe^{x_0}, \quad \text{donde } 0 < x_0 < x.$$

Ya que $e^{x_0} \geq 1$, a partir de esta igualdad resulta inmediatamente 31).

Pongamos ahora $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$. Las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{p_n\}$ son ambas crecientes, y por lo tanto para demostrar el teorema únicamente necesitamos probar que $\{s_n\}$ es acotada si $\{p_n\}$ lo es, y recíprocamente.

En primer lugar, la desigualdad $p_n > s_n$ es evidente. A continuación, tomando en 31) $x = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, y multiplicando, encontramos $p_n < e^{s_n}$. Luego, $\{s_n\}$ está acotada si $\{p_n\}$ está acotada y recíprocamente. Observemos que $\{p_n\}$ no puede ser convergente hacia cero ya que cada $p_n \geq 1$. Asimismo notemos que $p_n \to +\infty$ si $s_n \to +\infty$.

12—53 Definición. *El producto infinito* $\Pi(1 + a_n)$ *se llama absolutamente convergente si* $\Pi(1 + |a_n|)$ *converge.*

12—54 Teorema. *La convergencia absoluta de* $\Pi(1 + a_n)$ *implica la convergencia.*

Demostración. Utilicemos la condición Cauchy junto con la desigualdad

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1| \\ \leq (1 + |a_{n+1}|)(1 + |a_{n+2}|) \cdots (1 + |a_{n+k}|) - 1.$$

Nota. El Teorema 12-52 nos dice que $\Pi(1 + a_n)$ converge absolutamente si $\sum a_n$ converge absolutamente, y recíprocamente. En el Ejercicio 12-43 damos un ejemplo en el que $\Pi(1 + a_n)$ converge pero $\sum a_n$ diverge.

Un resultado análogo al Teorema 12-52 es el siguiente:

12—55 Teorema. *Supongamos que cada* $a_n \geq 0$. *Entonces el producto* $\Pi(1 - a_n)$ *converge si la serie* $\sum a_n$ *converge, y recíprocamente.*

Demostración. La convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia absoluta (y por lo tanto la convergencia) de $\Pi(1 - a_n)$.

Para demostrar el recíproco, supongamos que $\sum a_n$ diverge. Si $\{a_n\}$ no, converge hacia cero, entonces $\Pi(1 - a_n)$ también diverge. Por consiguiente, podemos suponer que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Prescindiendo de algunos términos si es preciso, podemos admitir que cada $a_n \leq \frac{1}{2}$. Entonces cada factor $1 - a_n \geq \frac{1}{2}$ (y por lo tanto $\neq 0$). Consideremos $p_n = (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)$, $q_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$.

Ya que tenemos

$$(1 - a_k)(1 + a_k) = 1 - a_k^2 \leq 1,$$

podemos escribir $p_n \leq 1/q_n$. Pero en la demostración del Teorema 12-52 observamos que $q_n \to +\infty$ si $\sum a_n$ era divergente. Por lo tanto, $p_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, de la parte b) de la Definición 12-50, se deduce que $\Pi(1 - a_n)$ diverge hacia 0.

EJERCICIOS

Sucesiones.

12-1. Dada una sucesión real $\{a_n\}$, consideremos $U = \lim\sup_{n\to\infty} a_n$, $V = \lim\inf_{n\to\infty} a_n$. Si U y V son finitos, demostrar que:
a) Existe una sucesión contenida en $\{a_n\}$ convergente hacia U y otra convergente hacia V.
b) Si $U = V$, toda sucesión contenida en $\{a_n\}$ converge hacia U.

12-2. Dadas dos sucesiones reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Demostrar que
a) $\lim\sup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \lim\sup_{n\to\infty} a_n + \lim\sup_{n\to\infty} b_n$.
b) $\lim\sup_{n\to\infty} (a_n b_n) \leq (\lim\sup_{n\to\infty} a_n)(\lim\sup_{n\to\infty} b_n)$ si $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo n.

12-3. Demostrar los Teoremas 12-3 y 12-4.

12-4. Si cada $a_n > 0$, probar que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

12-5. Sea $\{a_n\}$ una sucesión real y consideremos $\sigma_n = (a_1 + \cdots + a_n)/n$. Demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

12-6. Encontrar $\lim\sup_{n\to\infty} a_n$ y $\lim\inf_{n\to\infty} a_n$ si a_n viene dada por

a) $\cos n$, b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos n\pi$, c) $n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}$,

d) $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}$, e) $(-1)^n n/(1+n)^n$, f) $\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$.

NOTA. En (*f*), $[x]$ significa el mayor entero $\leq x$.

12-7. Si $a_1 > 0$ y $a_{n+1} = a_1^{a_n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, demostrar que $\{a_n\}$ converge si, y únicamente si, $e^{-e} \leq a_1 \leq e^{1/e}$.

12-8. Sea $a_n = n^n/n!$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = e$ y utilizar el Ejercicio 12-4 para deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e.$$

En los Ejercicio 12-9 al 12-14, demostrar que la sucesión real $\{a_n\}$ es convergente. Las condiciones dadas se suponen válidas para todo $n \geq 1$. En los Ejercicios 12-10 al 12-14, demostrar que $\{a_n\}$ tiene el límite L indicado.

12-9. $|a_n| \leq 2$, $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{8}|a_{n+1}^2 - a_n^2|$.

12-10. $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_{n+2} = (a_n a_{n+1})^{1/2}$, $L = (a_1 a_2^2)^{1/3}$.

12-11. $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1})$, $a_{2n+2} = \frac{a_{2n}a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$, $L = 4$.

12-12. $a_1 = -\frac{3}{2}$, $3a_{n+1} = 2 + a_n^3$, $L = 1$. Modificar a_1 para que sea $L = -2$.

12-13. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}$, $L = \sqrt{3}$.

12-14. $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, siendo $b_1 = b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, $L = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Indicación: Demostrar que $b_{n+2}b_n - b_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ y deducir que

$$|a_n - a_{n+1}| < n^{-2}, \qquad \text{si } n > 4.$$

Series.

12-15. Estudiar la convergencia (p y q representan números reales fijos).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^p$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p \quad (p > 0)$, d) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p - n^q} \quad (0 < q < p)$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-1/n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^n - q^n} \quad (0 < q < p)$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \log(1 + 1/n)}$, h) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\log n)^{\log n}}$,

i) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$, j) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\log \log n}\right)^{\log \log n}$,

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(1 + n^2} - n)$, l) $\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, n) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$.

12-16. Designemos por $S = \{n_1, n_2, \dots\}$ la colección de aquellos enteros positivos que no contienen la cifra 0 en su expresión decimal. (Por ejemplo, $7 \in S$ pero $101 \notin S$.) Demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ converge y tiene una suma menor que 90.

12-17. Dados los enteros $a_1, a_2, \dots$ tales que $1 \le a_n < n - 1$, $n = 2, 3, \dots$. Demostrar que la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n!$ es racional si existe un entero N tal que $a_n = n - 1$ para todo $n \ge N$, y recíprocamente.
[*Indicación*: Para la suficiencia, demostrar que $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)/n!$ es una serie del tipo citado en el Teorema 12-10 y de suma 1.]

12-18. Sean p y q dos enteros fijos, $p \ge q \ge 1$, y consideremos

$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k}, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

a) Utilizar la fórmula 8) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \log(p/q)$.

b) Cuando $q = 1$, $p = 2$, demostrar que $s_{2n} = x_n$ y deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

c) Reordenar la serie de b), escribiendo alternativamente p términos positivos seguidos de q términos negativos y usar a) para demostrar que esta reordenación tiene como suma $\log 2 + \frac{1}{2} \log (p/q)$.

d) Encontrar la suma de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1/(3n-2) - 1/(3n-1))$.

12-19. Consideremos $c_n = a_n + ib_n$, donde $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, $b_n = 1/n^2$. Demostrar que $\sum c_n$ es condicionalmente convergente.

12-20. Utilizar el Teorema 12-23 para obtener las fórmulas siguientes:

a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} = \frac{1}{2}\log^2 n + A + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad (A \text{ constante})$$

b) $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k} = \log (\log n) + B + O\left(\frac{1}{n \log n}\right) \quad (B \text{ constante}).$$

12-21. Si $0 < a \leq 1$, $s > 1$, definamos $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + a)^{-s}$.

a) Demostrar que esta serie converge absolutamente para $s > 1$ y demostrar que

$$\sum_{h=1}^{k} \zeta\left(s, \frac{h}{k}\right) = k^s\zeta(s) \qquad \text{si } k = 1, 2, \ldots,$$

donde $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$ es la función ζ de Riemann.

b) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n^s = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ si $s > 1$.

12-22. Dada una serie convergente $\sum a_n$, en la que cada $a_n \geq 0$. Probar que $\sum \sqrt{a_n}\, n^{-p}$ converge si $p > \frac{1}{2}$. Dar un contraejemplo para $p = \frac{1}{2}$.

12-23. En el supuesto de que $\sum a_n$ diverge, demostrar que $\sum na_n$ también diverge.

12-24. Suponiendo que $\sum a_n$ converge, siendo cada $a_n > 0$, demostrar que

$$\sum (a_n a_{n+1})^{1/2}$$

también converge. Demostrar que el recíproco también es cierto si $\{a_n\}$ es monótona.

12-25. Suponiendo que $\sum a_n$ converge absolutamente, demostrar que cada una de las series siguientes también converge absolutamente:

a) $\sum a_n^2$,

b) $\sum \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ (si ningún $a_n = -1$),

c) $\sum \dfrac{a_n^2}{1 + a_n^2}$.

12-26. Determinar todos los valores reales de x para los cuales la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right).$$

12-27. Probar las siguientes afirmaciones:

a) $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ converge y $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente.
b) $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ tiene sumas parciales acotadas y $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente, con tal de que $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Sucesiones dobles y series dobles.

12-28. Investigar la existencia de los dos límites iterados y del límite doble en la sucesión doble f definida por

a) $f(p, q) = \dfrac{1}{p+q}$, b) $f(p, q) = \dfrac{p}{p+q}$.

c) $f(p, q) = \dfrac{(-1)^p p}{p+q}$, d) $f(p, q) = (-1)^{p+q}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p}\right)$.

e) $f(p, q) = \dfrac{(-1)^p}{q}$, f) $f(p, q) = (-1)^{p+q}$,

g) $f(p, q) = \dfrac{\cos p}{q}$, h) $f(p, q) = \dfrac{p}{q^2}\sum_{n=1}^{q} \operatorname{sen}\dfrac{n}{p}$.

Respuesta. Existe el límite doble en a), d), e), g). Existen ambos límites iterados en a), b), h). Existe tan sólo un límite iterado en c), e). Ninguno de los límites iterados existe en d), f).

12-29. Demostrar las afirmaciones siguientes:

a) Una serie doble de términos positivos converge si el conjunto de las sumas parciales está acotado y recíprocamente.
b) Una serie doble converge si converge absolutamente.
c) $\sum_{m,n} e^{-(m^2+n^2)}$ converge.

12-30. Supongamos que la serie doble $\sum_{m,n} a(n)x^{mn}$ converge absolutamente para $|x| < 1$. Llamemos a su suma $S(x)$. Demostrar que cada una de las series siguientes también converge absolutamente para $|x| < 1$ y tiene suma $S(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\frac{x^n}{1-x^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A(n)x^n, \qquad \text{siendo } A(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

12-31. Si a es real, demostrar que la serie doble $\sum_{m,n}(m + ni)^{-a}$ converge absolutamente si $a > 2$ y recíprocamente.

Indicación: Considerar $s(p, q) = \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}|m + in|^{-a}$. El conjunto

$$\{m + in | m = 1, 2, \ldots, p,\ n = 1, 2, \ldots, p\}$$

consta de p^2 números complejos uno de los cuales tiene valor absoluto $\sqrt{2}$, tres satisfacen $|1 + 2i| \le |m + in| \le 2\sqrt{2}$, cinco satisfacen $|1 + 3i| \le |m + in| \le 3\sqrt{2}$, etc. Comprobar esto geométricamente y deducir la desigualdad

$$2^{-a/2}\sum_{n=1}^{p}\frac{2n-1}{n^a} \le s(p, p) \le \sum_{n=1}^{p}\frac{2n-1}{(n^2+1)^{a/2}}.$$

12-32. a) Demostrar que el producto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}/\sqrt{n+1}$ por sí misma es una serie divergente.

b) Demostrar que el producto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}/(n+1)$ por sí misma es la serie.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

¿Converge ésta? ¿Por qué?

12-33. Dadas dos series de potencias absolutamente convergentes, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, que tienen sumas $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente, demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = A(x)B(x)$ donde $c_n = \sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

12-34. Una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/n^s$ se llama una *serie de Dirichlet*. Dadas dos series de Dirichlet absolutamente convergentes, sean $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/n^s$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n/n^s$, que tienen sumas $A(s)$ y $B(s)$, respectivamente, demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}c_n/n^s = A(s)B(s)$ donde $c_n = \sum_{d/n}a_db_{n/d}$.

12-35. Si $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$, $s > 1$, demostrar que $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}d(n)/n^s$, donde $d(n)$ es el número de divisores de n (incluyendo 1 y n).

Sumabilidad de Cesàro.

12-36. Demostrar que cada una de las series siguientes tiene suma $(C, 1)$ nula:

a) $1-1-1+1+1-1-1+1+1--++\cdots$.

b) $\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1++-\cdots$.

c) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots$ (x real, $x \neq m\pi$).

12-37. Dada una serie $\sum a_n$, consideremos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}a_k, \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n}ka_k, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k.$$

Demostrar que:

a) $t_n = (n+1)s_n - n\sigma_n$.

b) Si $\sum a_n$ es sumable $(C, 1)$, entonces $\sum a_n$ converge si $t_n = o(n)$ cuando $n \to \infty$ y recíprocamente.

c) $\sum a_n$ es sumable $(C, 1)$ si $\sum_{n=1}^{\infty}t_n/n(n+1)$ converge y recíprocamente.

12-38. Dada una sucesión monótona $\{a_n\}$ de términos positivos, tal que $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$. Consideremos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}a_k, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^ks_k.$$

Probar que:

a) $v_n = \frac{1}{2}u_n + (-1)^ns_n/2$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^ns_n$ es sumable (C, 1) y tiene suma Cesàro $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{2}+\cdots+1/n) = -\log\sqrt{2}$ (C, 1).

Productos infinitos.

12-39. Determinar si convergen o no los productos infinitos siguientes. Encontrar el valor de cada uno de los que convergen.

a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$. b) $\prod_{n=2}^{\infty}(1-n^{-2})$.

c) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$, d) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})$ si $|z|<1$.

12-40. Si cada una de las sumas parciales s_n de la serie convergente $\sum a_n$ no es cero y si la propia suma no es cero, demostrar que el producto infinito $a_1 \prod_{n=2}^{\infty}(1 + a_n/s_{n-1})$ converge y tiene por valor $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

12-41. Encontrar el valor de los productos infinitos siguientes estableciendo las identidades siguientes y sumando las series:

a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n-2}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$.

b) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

12-42. Determinar todos los valores reales x para los cuales converge el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\cos(x/2^n)$ y encontrar su valor cuando sea convergente.

12-43. a) Consideremos $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Demostrar que $\prod(1 + a_n)$ diverge pero que $\sum a_n$ converge.

b) Consideremos $a_{2n-1} = -1/\sqrt{n}$, $a_{2n} = 1/\sqrt{n} + 1/n$ para $n = 1, 2, \ldots$. Demostrar que $\prod(1 + a_n)$ converge pero que $\sum a_n$ diverge.

12-44. Supongamos que $a_n \geq 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Supongamos además que

$$\frac{a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}} < a_{2n-1} < \frac{a_{2n}}{1+a_{2n}} \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots .$$

Demostrar que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+(-1)^k a_k)$ converge si $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge, y recíprocamente.

12-45. Designemos por p_n el n-ésimo entero primo. (Así, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$) Si $s > 1$, demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}}.$$

Indicación: Considerar $P_m = \prod_{k=1}^{m} 1/(1 - p_k^{-s})$. Expresar cada factor $(1 - p_k^{-s})^{-1}$ como una serie geométrica y demostrar que $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s - P_m \leq \sum_{n=m}^{\infty} 1/n^s$.

REFERENCIAS

12-1. HARDY, G. H., *Divergent Series*. Oxford: University Press, 1949.

12-2. KNOPP, K., *Theory and Application of Infinite Series*. R. C. Young, traductor. New York: Hafner, 1951.

CAPÍTULO 13

SUCESIONES DE FUNCIONES

13-1 Introducción. En este capítulo trataremos de funciones complejas definidas en ciertos subconjuntos de E_2. Algunos de los resultados son ciertos únicamente para funciones reales definidas en subconjuntos de E_1, y en tales casos esta restricción será establecida explícitamente.

Dada una sucesión $\{f_n\}$, cada término de la cual es una función definida en un conjunto S, para cada valor x de S podemos construir otra sucesión $\{f_n(x)\}$ cuyos términos son los correspondientes valores de la función. Designemos por T el conjunto de aquellos puntos x de S para los cuales esta segunda sucesión converge. La función f definida por la igualdad

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \text{si } x \in T,$$

se llama la *función límite* de la sucesión $\{f_n\}$ y diremos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en el conjunto T.

En este capítulo nos interesaremos en especial por el problema siguiente: Suponiendo que cada término de la sucesión $\{f_n\}$ tiene una cierta propiedad (por ejemplo, continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad), ¿hasta qué punto puede afirmarse que la función límite f también posee esa propiedad? Como ejemplo, supongamos que cada f_n es continua en un punto x_0 de T. ¿La función límite f es también continua en el punto x_0? Veremos que, en general, no es así. En realidad, encontraremos que la convergencia puntual ordinariamente no es lo « bastante fuerte » para transferir cualquiera de las propiedades antes citadas de los términos f_n a la función límite f. Por consiguiente nos encontramos en la necesidad de estudiar métodos de convergencia « más fuertes » que *conserven* esas propiedades. El más importante de ellos es el concepto de convergencia « uniforme ».

Antes de iniciar una discusión de la convergencia uniforme, formulémonos de otra manera una de nuestras preguntas fundamentales. Cuando preguntamos si la continuidad de cada f_n en x_0 implica la continuidad de la función límite en x_0, en realidad lo que preguntamos es si la igualdad

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$$

implica esta otra

1) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Pero 1) puede también escribirse así:

2) $$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Por consiguiente, nuestra pregunta relativa a la continuidad equivale a ésta: ¿Podemos invertir los símbolos del paso al límite en 2)? Veremos que, en general, no es posible. Ante todo, el límite de 1) puede no existir. En segundo lugar, aun cuando exista, no debe ser necesariamente igual a $f(x_0)$. Ya vimos algo parecido en el Capítulo 12 en relación con las series de series cuando encontramos que $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ no es igual necesariamente a $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$. (Ver la nota que precede al Teorema 12-43.) La cuestión de la inversión del orden de los dos pasos al límite se presenta repetidas veces en el análisis matemático. Encontraremos que la convergencia uniforme es una condición *suficiente* de largo alcance para la validez de la inversión de ciertos límites, pero no constituye una respuesta completa a la pregunta formulada. Encontraremos ejemplos en los cuales el orden de los dos pasos al límite puede invertirse aun cuando la sucesión no es uniformemente convergente.

13-2 Ejemplos de sucesiones de funciones reales. Los siguientes ejemplos ilustran algunas de las posibilidades que pueden presentarse al construir la función límite de una sucesión de funciones reales.

EJEMPLO 1. Sea $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ si $x \in E_1$, $n = 1, 2, \ldots$ Existe entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $0 \le x \le 1$. La función límite f tiene el valor 0 para cada punto de $[0, 1]$. Observemos que f_n tiene un máximo local en $x = 1/(n + 1)$ y que $f_n(1/(n + 1)) = (n/(n + 1))^{1+n} \to e^{-1}$ cuando $n \to \infty$ (Ver Fig. 13-1.)

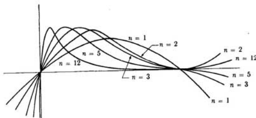


Fig. 13-1. $f_n(x) = nx(1 - x)^n$, $n = 1, 2, 3, 5, 12$.

EJEMPLO 2. Sea $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$ si $x \in E_1$, $n = 1, 2, \ldots$ Existe, otra vez, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $0 \le x \le 1$ y tiene por valor 0 en cada punto de $[0, 1]$. Como en el Ejemplo 1, f_n tiene un máximo local en $x = 1/(n+1)$, pero $f_n(1/(n+1)) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. (Ver Fig. 13-2.)

EJEMPLO 3. Sea $f_n(x) = x^{2n}/(1+x^{2n})$ $(x \in E_1, n = 1, 2, \ldots)$. En este caso existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo x y la función límite viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |x| = 1, \\ 1, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Cada f_n es continua en E_1, pero f es discontinua en $x = 1$ y $x = -1$. (Ver Fig. 13-3.)

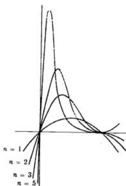


Fig. 13-2. $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $n = 1, 2, 3, 5$.

EJEMPLO 4. Tomemos $f_n = \text{sen}\, nx/\sqrt{n}$ $(x \in E_1, n = 1, 2, \ldots)$. Entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo x. Observemos que $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$. Luego, $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ no existe para cualquier x. (Ver Fig. 13-4.)

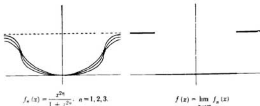


Figura 13-3.

13-3 Definición de convergencia uniforme. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que convergen puntualmente en un conjunto T hacia una función límite f. Volviendo a la definición fundamental de límite, esto significa que para cada punto x de T y para cada $\varepsilon > 0$ existe un N (dependiente a la

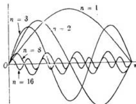


Fig. 13-4. $f_n(x) = \operatorname{sen} nx/\sqrt{n}$, $n = 1, 2, 3, 8, 16$.

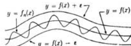


Fig. 13-5. Significación geométrica de la convergencia uniforme.

vez de x y ε) tal que $n > N$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Si el mismo N sirve para *todo* punto de T, la convergencia se llama *uniforme* en T. Esto es, tenemos

13—1 Definición. *Una sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *se llama convergente uniformemente hacia* f *en un conjunto* T *si, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un* N *(dependiente tan sólo de* ε*) tal que* $n > N$ *implica*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo } x \textit{ de } T.$$

Expresamos esto simbólicamente escribiendo

$$f_n \to f \textit{ uniformemente en } T.$$

Cuando cada término de la sucesión $\{f_n\}$ es real, hay una útil representación geométrica de la convergencia uniforme. La desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ equivale a las *dos* desigualdades

$$3) \qquad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Si 3) es válida para todo $n > N$ y todo x de T, esto significa que toda la gráfica de f_n (esto es, el conjunto $\{(x, y) \mid y = f_n(x),\ x \in T\}$) queda dentro de una «banda» de altura 2ε situada simétricamente en torno a la gráfica de f. (Ver Fig. 13-5.)

Una sucesión $\{f_n\}$ se llama *uniformemente acotada* en T si existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo x de T y todo $n = 1, 2, \ldots$. El número M se llama la *cota uniforme* para $\{f_n\}$. Si cada término de la sucesión es acotado y $f_n \to f$ uniformemente en T, es fácil entonces demostrar que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en T. (Ver Ejercicio 13-1.) Esta observación a menudo nos permite decidir que una sucesión *no* converge uniformemente. Por ejemplo, la simple inspección de la figura 13-2 nos dice inmediatamente que la sucesión del Ejemplo 2 no puede ser uniformemente convergente en cualquier subconjunto que contenga un entorno del origen. No obstante, la

convergencia en este ejemplo es uniforme en todo subintervalo que no contenga el origen.

13-4 Una aplicación a las sucesiones dobles. Como una aplicación del concepto de convergencia uniforme, deducimos el teorema siguiente, que puede ser considerado como el recíproco del Teorema 12-39:

13—2 TEOREMA. *Sea f una sucesión doble y designemos por P el conjunto de los enteros positivos. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, definamos una función g_n en P como sigue:*

$$g_n(m) = f(m, n), \qquad si \ m \in P.$$

Supongamos que $g_n \to g$ uniformemente en P, siendo $g(m) = \lim_{n\to\infty} f(m, n)$. Si el límite iterado $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} f(m, n))$ existe, también existe entonces el límite doble $\lim_{m,n\to\infty} f(m, n)$ y tiene el mismo valor.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N_1 de modo que $n > N_1$ implique

$$|f(m, n) - g(m)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{para todo } m \text{ en } P.$$

Sea $a = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} f(m, n)) = \lim_{m\to\infty} g(m)$. Para el mismo ε, elijamos N_2 de modo que $m > N_2$ implique $|g(m) - a| < \varepsilon/2$. Entonces, si N es el mayor de los números N_1 y N_2, tenemos $|f(m, n) - a| < \varepsilon$ siempre que simultáneamente $m > N$ y $n > N$. En otras palabras, $\lim_{m,n\to\infty} f(m, n) = a$.

13-5 Convergencia uniforme y continuidad.

13—3 TEOREMA. *Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en T. Si cada f_n es continua en el punto x_0 de T, también la función límite f es continua en x_0.*

NOTA. Si x_0 es un punto de acumulación de T, la conclusión del teorema implica que

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Demostración. Si x_0 es un punto aislado de T, entonces f es automáticamente continua en x_0. Supongamos, pues, que x_0 es un punto de acumulación de T. Por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe un M tal que $n \geq M$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para todo } x \text{ en } T.$$

Puesto que f_M es continua en x_0, hay un entorno $N(x_0)$ tal que $x \in N(x_0) \cap T$ implica

$$|f_M(x) - f_M(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pero

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(x_0)| + |f_M(x_0) - f(x_0)|.$$

Si $x \in N(x_0) \cap T$, cada término del segundo miembro es menor que $\varepsilon/3$ y por tanto $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Esto demuestra el teorema

NOTA. La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ es suficiente pero no necesaria para transmitir la continuidad de cada término de la sucesión a la función límite. En el Ejemplo 2 (párrafo 13-2), tenemos una sucesión de funciones continuas que no converge uniformemente y tiene función límite continua.

13-6 La condición de Cauchy para la convergencia uniforme.

13—4 TEOREMA. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto T. Existe una función f tal que $f_n \to f$ uniformemente en T si, y únicamente si, se satisface la siguiente condición (llamada la condición de Cauchy): Para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que al ser $m > N$ y $n > N$ se verifica*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \textit{para todo } x \textit{ de } T.$$

Demostración. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en T. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar N de modo que $n > N$ implique $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ para todo x en T. Tomando $m > N$, también tenemos $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$, y por lo tanto $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo x de T.

Recíprocamente, supongamos que se satisface la condición de Cauchy. Entonces, para cada x en T, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $x \in T$. Tenemos que demostrar que $f_n \to f$ uniformemente en T. Si fijamos $\varepsilon > 0$, podemos elegir N de manera que $n > N$ implique $|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon/2$ para todo $k = 1, 2, \ldots,$ y todo x de T. Por consiguiente, $\lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Luego, $n > N$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo x de T. Esto prueba que $f_n \to f$ uniformemente en T.

13-7 Convergencia uniforme de series.

13—5 DEFINICIÓN. *Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto T. Para cada x de T, consideremos*

4) $$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si existe una función f tal que $s_n \to f$ uniformemente en T, decimos que la serie $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en T y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (\textit{uniformemente en } T).$$

13–6 Teorema. (*Condición de Cauchy para la convergencia uniforme de series*). *La serie* $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente en* T *si, y únicamente si, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* N *tal que* $n > N$ *implica*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \qquad \textit{para cada } p = 1, 2, \ldots, \textit{ y todo } x \textit{ de } T.$$

Demostración. Definir s_n mediante 4) y aplicar el Teorema 13-4.

13–7 Teorema. (*Criterio M de Weierstrass*). *Sea* $\{M_n\}$ *una sucesión de números no negativos tales que*

$$0 \le |f_n(x)| \le M_n, \qquad \textit{para } n = 1, 2, \ldots, \textit{ y para todo } x \textit{ de } T.$$

Entonces $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente en* T *si* $\sum M_n$ *converge.*

Demostración. Aplicar los Teoremas 12-11 y 13-6 unidos a la desigualdad

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k.$$

13–8 Teorema. *Supongamos que* $\sum f_n(x) = f(x)$ *(uniformemente en* T*). Si cada* f_n *es continua en el punto* x_0 *de* T*, también* f *es continua en* x_0.

Demostración. Definir s_n mediante 4). La continuidad de cada f_n en x_0 implica la continuidad de s_n en x_0, y del Teorema 13-3 se deduce inmediatamente la conclusión.

Nota. Si x_0 es un punto de acumulación de T, este teorema nos permite escribir

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

13-8 Curva que llena un espacio. Podemos aplicar el Teorema 13-8 a la construcción de un ejemplo de lo que se llama una *curva que llena un espacio.* Se trata de una curva continua en E_2 que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$. Peano (1890) fue el primero en dar un ejemplo de una curva de tal naturaleza. El ejemplo que aquí presentamos es debido a I. J. Schoenberg (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 1938) y es el siguiente:

Sea ϕ una función definida en el intervalo $[0, 2]$ mediante las fórmulas siguientes:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{3}, \text{ ó si } \frac{5}{3} \le t \le 2, \\ 3t - 1, & \text{si } \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \\ 1, & \text{si } \frac{2}{3} \le t \le \frac{4}{3}, \\ -3t + 5, & \text{si } \frac{4}{3} \le t \le \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Extendamos la definición de ϕ a todo el E_1 mediante la ecuación

$$\phi(t + 2) = \phi(t).$$



Figura 13-6.

De esta manera ϕ es periódica de período 2. (Ver la gráfica de ϕ en la Fig. 13-6.)

Definamos ahora dos funciones α_1 y α_2 mediante las ecuaciones siguientes :

$$\alpha_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2}t)}{2^n}, \qquad \alpha_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-1}t)}{2^n}.$$

Ambas series convergen absolutamente para cada valor real de t y convergen *uniformemente* en E_1. En efecto, ya que $|\phi(t)| \le 1$ para todo t, es aplicable el criterio M de Weierstrass poniendo $M_n = 2^{-n}$. Puesto que ϕ es continua en E_1, el Teorema 13-8 nos dice que α_1 y α_2 también son continuas en E_1. Consideremos $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ y designemos con Γ la imagen del intervalo unidad $[0, 1]$ bajo $\boldsymbol{\alpha}$. Demostraremos que Γ «llena» el cuadrado unidad, es decir que $\Gamma = [0, 1] \times [0, 1]$.

Ante todo, es evidente que $0 \le \alpha_1(t) \le 1$ y $0 \le \alpha_2(t) \le 1$ para cada t, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. Luego, Γ es un subconjunto del cuadrado unidad. A continuación tenemos que demostrar que $(a, b) \in \Gamma$ siempre que $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$. A tal fin escribimos a y b en el sistema binario. Esto es, ponemos

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \qquad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n},$$

donde cada a_n y cada b_n es ó 0 ó 1. (Ver Ejercicio 1-14.) Consideremos ahora

$$c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, \qquad \text{donde } c_{2n-1} = a_n \text{ y } c_{2n} = b_n, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Evidentemente, $0 \le c \le 1$ ya que $2 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = 1$. Demostraremos que $\alpha_1(c) = a$ y que $\alpha_2(c) = b$.

Si podemos demostrar que

5) $$\phi(3^k c) = c_{k+1}, \qquad \text{para cada } k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

tendremos entonces $\phi(3^{2n-2}c) = c_{2n-1} = a_n$ y $\phi(3^{2n-1}c) = c_{2n} = b_n$, y esto nos dará $a_1(c) = a$, $a_2(c) = b$. Para probar 5), escribimos

$$3^k c = 2\sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{3^{n-k}} + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} = (\text{un entero par}) + d_k,$$

donde $d_k = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}/3^n$. Ya que ϕ tiene período 2, se deduce que

$$\phi(3^k c) = \phi(d_k).$$

Si $c_{k+1} = 0$, tenemos $0 \le d_k \le 2\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{3}$, y por tanto $\phi(d_k) = 0$. Por consiguiente, $\phi(3^k c) = c_{k+1}$ en este caso. El otro caso, único a considerar es $c_{k+1} = 1$. Pero entonces obtenemos $\frac{2}{3} \le d_k \le 1$ y por lo tanto $\phi(d_k) = 1$. Por consiguiente, $\phi(3^k c) = c_{k+1}$ en todos los casos y esto demuestra que $a_1(c) = a$, $a_2(c) = b$. Luego, Γ llena el cuadrado unidad.

13-9 Aplicación a las series de series. Como una segunda aplicación del Teorema 13-8, deducimos la siguiente generalización del Teorema 12-43:

13—9 Teorema. *Sea f una sucesión doble compleja. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ converge absolutamente para cada m fijo y que*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|$$

converge. Entonces:

a) $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ *converge absolutamente para cada n.*

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ *converge absolutamente y coincide con*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n).$$

Demostración. La convergencia absoluta de las series de a) y b) es una consecuencia del Teorema 12-43. El problema consiste en demostrar la igualdad de las series de series. A tal fin, consideremos $T = \{0\} \cup \{1/q \mid q = 1, 2, \ldots\}$. Para cada $m = 1, 2, \ldots$ fijo, definamos una función g_m en T como sigue:

$$g_m(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n), \qquad g_m\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q} f(m, n), \qquad \text{si } q = 1, 2, \ldots.$$

Definamos ahora g en T por la ecuación

$$6) \qquad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x), \qquad \text{si } x \in T.$$

Ya que $|g_m(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|$, el criterio M de Weierstrass nos dice que la serie de 6) converge uniformemente en T. También, la convergencia de $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ implica la continuidad de g_m en 0. Luego, g también es continua en 0. Esto significa que

$$\text{7)} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} g_m(0) = \lim_{q \to \infty} \sum_{m=1}^{\infty} g_m\left(\frac{1}{q}\right),$$

la existencia del límite constituye una parte de la conclusión. Pero

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{q} f(m, n) = \sum_{n=1}^{q} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n).$$

Sustituyendo en 7), obtenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \lim_{q \to \infty} \sum_{n=1}^{q} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n).$$

13-10 Convergencia uniforme e integración de Riemann-Stieltjes.

13—10 TEOREMA. *Sea α una función de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos que cada término de la sucesión $\{f_n\}$ es una función real tal que $f_n \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Supongamos además que $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$ y definamos $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t)$ si $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$ En estas condiciones se tiene:*

a) *$f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.*

b) *$g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$, siendo $g(x) = \int_a^x f(t) d\alpha(t)$.*

NOTA. La conclusión implica que, para cada x de $[a, b]$, podemos escribir

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t) = \int_a^x \lim_{n \to \infty} f_n(t)\, d\alpha(t).$$

Demostración. Podemos suponer que α es estrictamente creciente. Para demostrar a), tenemos que probar que f satisface la condición de Riemann con respecto a α en $[a, b]$. (Ver el Teorema 9-19.)

Fijado $\varepsilon > 0$, elijamos N de manera que

$$|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3[\alpha(b) - \alpha(a)]}, \qquad \text{para todo } x \text{ en } [a, b].$$

Entonces, para toda partición P de $[a, b]$, tenemos

$$|U(P, f - f_N, \alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |L(P, f - f_N, \alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

(utilizando la notación de la Definición 9-14). Para este N, elijamos P_ε de modo que P más fina que P_ε implique $U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha) < \varepsilon/3$. Y entonces para tal P tenemos

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &\leq U(P, f - f_N, \alpha) - L(P, f - f_N, \alpha) \\ &\quad + U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha) \\ &< |U(P, f - f_N, \alpha)| + |L(P, f - f_N, \alpha)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra a). Para probar b), fijemos un $\varepsilon > 0$ y elijamos N de modo que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}$$

para todo $n > N$ y todo t en $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, tenemos

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, d\alpha(t) \leq \frac{\alpha(x) - \alpha(a)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$.

13–11 Teorema. *Sea α una función de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en $[a, b]$), donde cada f_n es una función real tal que $f_n \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Entonces se verifica:*

a) *$f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.*

b) *$\int_a^x \sum_{n=1}^\infty f_n(t)\, d\alpha(t) = \sum_{n=1}^\infty \int_a^x f_n(t) d\alpha(t)$ (uniformemente en $[a, b]$).*

Demostración. Basta aplicar el Teorema 13-10 a la sucesión de sumas parciales.

La parte b) del teorema anterior nos dice que una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término. La convergencia uniforme es una condición suficiente pero no necesaria para la integración término a término. Por ejemplo, la serie $\sum f_n(x)$, en la que $f_n(x) = nx(1-x)^n - (n-1)x(1-x)^{n-1}$, tiene como sumas parciales $s_n(x) = nx(1-x)^n$. (Ver Fig. 13-1.) La convergencia de esta serie no es uniforme en el intervalo $[0, 1]$. No obstante, es fácil ver que la integración término a término nos conduce en este caso a un resultado correcto. (Ver Ejercicio 13-8.)

Por otra parte, el ejemplo en que $s_n(x) = n^2x(1-x)^n$ demuestra que se precisa alguna condición. En este ejemplo, $\{s_n\}$ converge puntualmente hacia $f = 0$ en $[0, 1]$ (Ver Fig. 13-2), y por lo tanto $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. Sin embargo, tenemos

$$\int_0^1 s_n(t)\,dt = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

que tiende a 1 cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, la integración término a término nos lleva, en este caso, a un resultado falso.

13—12 Teorema. *Sea Γ una curva rectificable en E_2 descrita por la función compleja*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \le t \le b,$$

donde x e y son funciones reales continuas de variación acotada definidas en $[a, b]$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas definidas y continuas sobre Γ. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente sobre Γ. Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma[z]} f_n(z)\,dz = \int_{\Gamma[z]} f(z)\,dz.$$

La demostración puede obtenerse como una consecuencia del Teorema 13-11 considerando separadamente las partes real e imaginaria. Naturalmente, un resultado parecido es válido para las series. Esto es, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma[z]} f_n(z)\,dz = \int_{\Gamma[z]} f(z)\,dz$$

si $\sum f_n(z) = f(z)$ (uniformemente sobre Γ) y si cada f_n es continua sobre Γ.

13-11 Convergencia uniforme y derivación. Por analogía con los Teoremas 13-3 y 13-10, pudiera darse como cierto el siguiente resultado: Si $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$ y si para cada n existe f'_n, entonces f' existe y $f'_n \to f'$ uniformemente en $[a, b]$. No obstante, el Ejemplo 4 (del párrafo 13-2) demuestra que esto no es cierto. Si bien la sucesión $\{f_n\}$ del Ejemplo 4 converge uniformemente en E_1, la sucesión $\{f'_n\}$ no converge ni siquiera puntualmente en E_1. Por ejemplo, $\{f'_n(0)\}$ diverge ya que $f'_n(0) = \sqrt{n}$. Por consiguiente, el teorema para la derivación análogo a los Teoremas 13-3 y 13-10, debe tomar una forma distinta.

13—13 Teorema. *Supongamos que cada término de $\{f_n\}$ es una función que tiene derivada finita en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Supongamos que por lo menos en un punto x_0 de (a, b) la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $f'_n \to g$ uniformemente en (a, b). En estas condiciones se tiene:*

a) *Existe una función f tal que $f_n \to f$ uniformemente en (a, b).*

b) *Para cada x de (a, b) existe la derivada $f'(x)$ y coincide con $g(x)$.*

Demostración. Supongamos que $c \in (a, b)$ y definamos una nueva sucesión $\{g_n\}$ como sigue:

8) $$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}, & \text{si } x \neq c, \\ f_n'(c), & \text{si } x = c. \end{cases}$$

La sucesión $\{g_n(x)\}$ así formada depende de la elección del punto c. La convergencia de $\{g_n(c)\}$ es consecuencia de la hipótesis ya que $g_n(c) = f_n'(c)$. Vamos a demostrar en lo que sigue que $\{g_n\}$ converge uniformemente en (a, b). Si $x \neq c$, tenemos

9) $$g_n(x) - g_m(x) = \frac{h(x) - h(c)}{x - c},$$

donde $h(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Ahora bien, $h'(x)$ existe para cada x de (a, b) y tiene el valor $f_n'(x) - f_m'(x)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio en 9), obtenemos

10) $$g_n(x) - g_m(x) = f_n'(x_1) - f_m'(x_1),$$

estando x_1 comprendido entre x y c. Puesto que $\{f_n'\}$ converge uniformemente en (a, b) (por hipótesis), podemos utilizar 10), en unión de la condición de Cauchy (Teorema 13-4), para deducir que $\{g_n\}$ converge uniformemente en (a, b).

Ahora podemos demostrar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en (a, b). Formemos la sucesión particular $\{g_n\}$ correspondiente al punto $c = x_0$ en el cual $\{f_n(x_0)\}$ se supuso convergente. En virtud de 8) podemos escribir

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x),$$

igualdad que es válida para todo x de (a, b). Luego tenemos

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)[g_n(x) - g_m(x_0)].$$

Esta igualdad, con el auxilio de la condición de Cauchy, establece la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en (a, b). Esto prueba *a*).

Para demostrar b), volvamos a la sucesión $\{g_n\}$ definida en 8) para un punto *arbitrario* c de (a, b) y sea $G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. La hipótesis de que f_n' existe significa que $\lim_{x\to c} g_n(x) = g_n(c)$. En otras palabras, cada g_n es continua en c. Ya que $g_n \to G$ uniformemente en (a, b), la función límite G es también continua en c. Esto significa que

11) $$G(c) = \lim_{x\to c} G(x),$$

formando parte de la conclusión la existencia de este límite. Pero, para $x \neq c$ tenemos

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Luego, 11) establece que la derivada $f'(c)$ existe y coincide con $G(c)$. Pero $G(c) = \lim_{n\to\infty} g_n(c) = \lim_{n\to\infty} f'_n(c) = g(c)$, y, por tanto, $f'(c) = g(c)$. Y ya que c es un punto cualquiera de (a, b), esto demuestra b).

Si volvemos a formular el Teorema 13-13 refiriéndolo a las series, obtenemos

13—14 TEOREMA. *Supongamos que cada f_n es una función real definida en (a, b) tal que para cada x de (a, b) existe la derivada $f'_n(x)$. Supongamos que, por lo menos en un punto x_0 de (a, b), la serie $\sum f_n(x_0)$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $\sum f'_n(x) = g(x)$ (uniformemente en (a, b)), Entonces:*

a) *Existe una función f tal que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en (a, b)).*

b) *Si $x \in (a, b)$, existe la derivada $f'(x)$ y es igual a $\sum f'_n(x)$.*

13-12 Condiciones suficientes para la convergencia uniforme de una serie. La importancia de las series absolutamente convergentes ha sido puesta de manifiesto en algunos de los teoremas precedentes. Parece pues natural buscar algunos métodos sencillos para decidir la convergencia uniforme sin recurrir a la definición en cada caso. Uno de tales métodos o criterios, el *criterio M de Weierstrass*, se expuso en el Teorema 13-7. Cuando éste no es aplicable pueden utilizarse otros criterios, uno de los cuales es el siguiente, análogo al Teorema 12-28.

13—15 TEOREMA. (*Criterio de Dirichlet para la convergencia uniforme*). *Designemos con $F_n(x)$ la suma parcial n-ésima de la serie $\sum f_n(x)$, en la que cada $f_n(x)$ es una función compleja definida en un conjunto T. Supongamos que $\{F_n\}$ es uniformemente acotada en T. Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones reales tales que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para cada x en T y para todo $n = 1, 2, \ldots$, y supongamos que $g_n \to 0$ uniformemente en T. En tales condiciones la serie $\sum f_n(x) g_n(x)$ converge uniformemente en T.*

Demostración. Consideremos $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x)$, que también puede ponerse en la forma

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x) F_n(x),$$

y por tanto si $n > m$, podemos escribir

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))$$
$$+ g_{n+1}(x)F_n(x) - g_{m+1}(x)F_m(x).$$

Por consiguiente, si M es una cota uniforme para $\{F_n\}$, tenemos

$$|s_n(x) - s_m(x)| \le M \sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + Mg_{n+1}(x) + Mg_{m+1}(x)$$
$$= M(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) + Mg_{n+1}(x) + Mg_{m+1}(x)$$
$$= 2Mg_{m+1}(x).$$

Ya que $g_n \to 0$ uniformemente en T, esta desigualdad (unida a la condición de Cauchy) implica que $\sum f_n(x)g_n(x)$ converge uniformemente en T.

El lector no tendrá dificultad en extender en forma parecida el Teorema 12-29 (criterio de Abel) de modo que origine un criterio para la convergencia uniforme. (Ver Ejercicio 13-11.)

EJEMPLO. Consideremos $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$. En el capítulo anterior (ver Teorema 12-30), obtuvimos la desigualdad $|F_n(x)| \le 1/|\text{ sen } (x/2)|$, válida para todo valor real $x \neq 2m\pi$ (m entero). Por consiguiente, si $0 < \delta < \pi$, tenemos la aproximación $|F_n(x)| \le 1/\text{sen } (\delta/2)$ si $\delta \le x \le 2\pi - \delta$. Luego, $\{F_n\}$ es uniformemente acotada en el intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$. Si $\{g_n\}$ satisface las condiciones del Teorema 13-15, podemos concluir que la serie $\sum g_n(x)e^{inx}$ converge uniformemente en $[\delta, 2\pi - \delta]$. En particular, si tomamos $g_n(x) = 1/n$, obtenemos la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

en $[\delta, 2\pi - \delta]$ si $0 < \delta < \pi$. Hay que hacer notar que el criterio M de Weierstrass no puede usarse para establecer la convergencia uniforme en este caso, ya que $|e^{inx}| = 1$.

13-13 Convergencia acotada. Teorema de Arzelà. En el Ejemplo 1 del párrafo 13-2 vimos una sucesión no uniformemente convergente en la cual la integración término a término nos llevaba a un resultado correcto. Dicho ejemplo tiene la propiedad de la *convergencia acotada*, que se define así:

13—16 DEFINICIÓN. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ es acotadamente convergente en T si $\{f_n\}$ es puntualmente convergente y uniformemente acotada en T.*

El teorema que sigue explica la razón por la cual la integración término a término fue posible en el Ejemplo 1:

13—17 TEOREMA (*Arzelà*). *Supongamos que* $\{f_n\}$ *es acotadamente convergente en* $[a, b]$ *y que cada* f_n *es integrable-Riemann en* $[a, b]$. *Supongamos también que la función límite* f *es integrable-Riemann en* $[a, b]$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Consideremos $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. Vamos a demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = 0.$$

A tal fin definamos una nueva sucesión de funciones $\{h_n\}$ como sigue:

$$h_n(x) = \sup\,\{g_n(x),\ g_{n+1}(x),\ \dots\},\qquad \text{si } x \in [a, b] \text{ y } n = 1, 2, \dots$$

Observemos que, para cada x fijo, tenemos

$$0 \le g_n(x) \le h_n(x),\qquad h_{n+1}(x) \le h_n(x),\qquad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0.$$

Luego, $0 \le \int_a^b g_n(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g_n(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} h_n(x)\,dx$. (La integral inferior $\underline{\int_a^b} h_n(x)\,dx$ existe debido a que cada h_n es acotada en $[a, b]$. Sin embargo, h_n no ha de ser necesariamente integrable-Riemann. Por otra parte, g_n *es* integrable-Riemann, ya que f_n y f son ambas integrales.) Sea $I_n = \underline{\int_a^b} h_n\,(x)\,dx$. La demostración será completa si podemos demostrar que $I_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Observemos que la sucesión $\{I_n\}$ converge hacia *un cierto* límite no negativo, ya que $0 \le I_{n+1} \le I_n$. Sea $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Vamos a demostrar que la desigualdad $I > 0$ nos conduce a una contradicción.

Admitamos que $I > 0$. Ya que $I_n \ge I > I/2$ para cada n, existe una partición P_n de $[a, b]$ y una suma inferior de Riemann $L(P_n, h_n)$ tal que $L(P_n, h_n) > I/2$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{4}I/(M + b - a)$, siendo M una cota uniforme para $\{h_n\}$ en $[a, b]$. Entonces la suma inferior $L(P_n, h_n)$ puede desdoblarse en dos partes de la siguiente manera

$$L(P_n, h_n) = \sum_{i\in A(n)} m_i(h_n)\,\Delta x_i + \sum_{i\in B(n)} m_i(h_n)\,\Delta x_i,$$

donde $m_i(h_n)$ representa el inf de h_n en el subintervalo i-ésimo de P_n y

$$A(n) = \{i \mid m_i(h_n) > \varepsilon\},\qquad B(n) = \{i \mid m_i(h_n) \le \varepsilon\}.$$

La desigualdad $L(P_n, h_n) > I/2$ implica

$$\tfrac{1}{2}I < \sum_{i\in A(n)} M\,\Delta x_i + \varepsilon \sum_{i\in B(n)} \Delta x_i \le M \sum_{i\in A(n)} \Delta x_i + \varepsilon(b - a),$$

de la que obtenemos $\sum_{i\in A(n)} \Delta x_i > \varepsilon$.

Designemos por S_n la reunión de aquellos subintervalos abiertos (x_{i-1}, x_i) de P_n para los que $i \in A(n)$. De este modo S_n es un conjunto abierto y su contenido Jordan es

$$c(S_n) = \sum_{i \in A(n)} \Delta x_i > \varepsilon.$$

Sea $T_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} S_k$. Tal conjunto T_n es abierto, $T_{n+1} \subset T_n$, y $\overline{m}(T_n) \geq \overline{m}(S_n) = c(S_n) > \varepsilon$ para cada $n \geq 1$. Del Teorema 9-74 se deduce que la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ es no vacía. Por consiguiente existe un punto x de (a, b) contenido en todo T_n y por lo tanto en infinitos conjuntos S_n. Luego para este x tenemos $h_n(x) > \varepsilon$ para infinitos valores de n, lo que contradice el hecho de que $h_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Tal contradicción implica que $I = 0$.

NOTA. Es fácil dar un ejemplo de una sucesión acotadamente convergente $\{f_n\}$ de funciones integrables-Riemann cuyo límite f no es integrable-Riemann. Si $\{r_1, r_2, \ldots\}$ representa el conjunto de los números racionales en $[0, 1]$, definamos $f_n(x)$ de modo que tome el valor 1 si $x = r_k$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n$, y el valor 0 en cualquier otro caso. Entonces la integral $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$ para cada n, pero la función límite f no es integrable-Riemann en $[0, 1]$.

13-14 Convergencia en media.

En este párrafo las funciones pueden ser reales o complejas

13—18 DEFINICIÓN. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables-Riemann definidas en $[a, b]$. Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ converge en media hacia f en $[a, b]$, y escribimos* l.e.m.$_{n\to\infty} f_n = f$ *en $[a, b]$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx = 0.$$

Si la desigualdad $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ es válida para todo x en $[a, b]$, tenemos $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2\, dx \leq \varepsilon^2(b - a)$. Por consiguiente, la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ hacia f en $[a, b]$ implica la convergencia en media, con tal que cada f_n sea integrable-Riemann en $[a, b]$. Un hecho más bien sorprendente es que la convergencia en media no implica necesariamente la convergencia puntual en cualquier punto del intervalo. Esto puede verse de la manera siguiente: Para cada entero $n \geq 0$, subdividamos el intervalo $[0, 1]$ en 2^n intervalos iguales y designemos con I_{2^n+k} el subintervalo cuyo extremo derecho es $(k + 1)/2^k$, siendo $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Esto da origen a una colección $\{I_1, I_2, \ldots\}$ de subintervalos de $[0, 1]$, de los cuales los primeros son

$$I_1 = [0, 1], \quad I_2 = [0, \tfrac{1}{2}], \quad I_3 = [\tfrac{1}{2}, 1],$$
$$I_4 = [0, \tfrac{1}{3}], \quad I_5 = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}], \quad I_6 = [\tfrac{2}{3}, 1],$$

y así sucesivamente. Definamos f_n en $[0, 1]$ como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I_n, \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1] - I_n. \end{cases}$$

Entonces $\{f_n\}$ converge en media hacia 0, ya que $\int_0^1 |f_n(x)|^2\, dx$ es la longitud de I_n, y ésta tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por otra parte, para cada x en $[0, 1]$ tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

[¿Por qué?] Luego, $\{f_n(x)\}$ no converge para ningún x de $[0, 1]$.

El siguiente teorema pone de manifiesto la importancia de la convergencia en media.

13–19 Teorema. *Supongamos que* $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = f$ *en* $[a, b]$. *Si* $g \in R$ *en* $[a, b]$, *definamos*

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\, dt, \qquad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g(t)\, dt,$$

si $x \in [a, b]$ *Entonces* $h_n \to h$ *uniformemente en* $[a, b]$.

Demostración. La demostración se basa en la desigualdad

12) $$0 \le \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)||g(t)|\, dt\right)^2 \le \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|^2\, dt\right)\left(\int_a^x |g(t)|^2\, dt\right),$$

que es una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para las integrales. (Ver Ejercicio 9-13 que establece la desigualdad de Cauchy-Schwarz y ofrece un esbozo de su demostración.) Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir N de manera que $n > N$ implique

13) $$\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2\, dt < \frac{\varepsilon^2}{A},$$

donde $A = 1 + \int_a^b |g(t)|^2\, dt$. Sustituyendo 13) en 12), encontramos que $n > N$ implica $0 \le |h(x) - h_n(x)| < \varepsilon$ para todo x de $[a, b]$.

Este teorema es particularmente útil en la teoría de las series de Fourier. (Ver Teorema 15-22.) También ofrece interés la generalización siguiente.

13–20 TEOREMA. *Supongamos que* $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = f$ *y que* $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} g_n = g$ *en* $[a, b]$. *Definamos*

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt, \qquad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g_n(t)\,dt,$$

si $x \in [a, b]$. *Entonces* $h_n \to h$ *uniformemente en* $[a, b]$.

Demostración. Tenemos

$$h_n(x) - h(x) = \int_a^x (f - f_n)(g - g_n)\,dt + \left(\int_a^x f_n g\,dt - \int_a^x fg\,dt\right)$$
$$+ \left(\int_a^x fg_n\,dt - \int_a^x fg\,dt\right)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos escribir

$$0 \le \left(\int_a^x |f - f_n||g - g_n|\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b |f - f_n|^2 dt\right)\left(\int_a^b |g - g_n|^2\,dt\right)$$

Con lo cual la demostración es ahora una sencilla consecuencia del Teorema 13-19.

13-15 Series de potencias.

Una serie de la forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

o más brevemente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{14}$$

se llama una serie de potencias de $z - z_0$. En ella z, z_0 y a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) son números complejos. A toda serie de potencias 14) se asocia un círculo, llamado el *círculo de convergencia* de la misma, de manera que la serie converge absolutamente para todo z interior a este círculo y diverge para todo z exterior al mismo. El centro del círculo es el punto z_0 y su radio se llama el *radio de convergencia* de la serie de potencias. (En casos extremos el radio puede ser 0 ó $+\infty$.) El siguiente teorema establece la existencia del círculo de convergencia y nos proporciona un método para calcular su radio.

13–21 TEOREMA. *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *sea*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad r = \frac{1}{\lambda},$$

(donde $r = 0$ *si* $\lambda = +\infty$ *y* $r = +\infty$ *si* $\lambda = 0$*). Entonces la serie converge absolutamente si* $|z - z_0| < r$ *y diverge si* $|z - z_0| > r$. *Además la serie converge uniformemente en todo subconjunto compacto interior al círculo de convergencia.*

Demostración. Aplicando al criterio de la raíz (Teorema 12-26) tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \frac{|z - z_0|}{r},$$

y, por lo tanto, $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente si $|z - z_0| < r$ y diverge si $|z - z_0| > r$. Para demostrar la segunda afirmación, basta observar simplemente que si T es un subconjunto compacto del círculo de convergencia, existe en T un punto p tal que $z \in T$ implica $|z - z_0| \leq |p - z_0| < r$. Luego, $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n(p - z_0)^n|$ para cada z de T, y entonces es aplicable el criterio M de Weierstrass:

NOTA. Si existe $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ (o este límite es $+\infty$), su valor es igual al radio de convergencia dado en 14). (Ver Ejercicio 13-27.)

EJEMPLOS.

1. Las dos series $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ tienen el mismo radio de convergencia, $r = 1$. Sobre la frontera del círculo de convergencia, la primera no converge en ningún punto, la segunda converge en todos.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ tiene radio de convergencia $r = 1$, pero no converge en $z = 1$. No obstante, converge en todos los demás puntos de la frontera debido al criterio de Dirichlet (Teorema 12-28).

Estos ejemplos ponen de manifiesto que el Teorema 13-21 no asegura nada en relación con el comportamiento de una serie de potencias sobre la *frontera* del círculo de convergencia.

13–22 TEOREMA. *Supongamos que la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge para cada* z *de* $N(z_0; r)$. *La función* f *definida por la ecuación*

15) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad si\ z \in N(z_0; r),$$

es entonces continua en $N(z_0; r)$.

Demostración. Ya que cada punto de $N(z_0; r)$ pertenece a algún subconjunto compacto de $N(z_0; r)$, la conclusión se deduce inmediatamente del Teorema 13-8.

NOTA. Se dice que la serie 15) *representa* f en $N(z_0; r)$. También se le llama *desarrollo de f en serie de potencias* en torno a z_0. Las funciones que admiten desarrollos en series de potencias son continuas dentro del círculo de convergencia. No obstante, vamos a ver que es cierto algo más que la simple continuidad. Demostraremos después que tales funciones admiten derivadas de cualquier orden dentro del círculo de convergencia. Demostremos antes el teorema siguiente:

13–23 TEOREMA. *Supongamos que $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge si $z \in N(z_0; r)$. Supongamos que la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

es válida para cada z de algún subconjunto abierto S de $N(z_0; r)$. En tal caso, para cada punto z_1 de S, existe un entorno $N(z_1; R) \subset S$ en el que f tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma

16) $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k,$$

siendo

17) $$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(z_1 - z_0)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demostración. Si $z \in S$, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1 + z_1 - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k),$$

donde

$$c_n(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} a_n(z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k}, & \text{si } k \le n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Elijamos ahora R de manera que $N(z_1; R) \subset S$ y supongamos que $z \in N(z_1; R)$. Entonces la serie de series $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k)$ converge absolutamente, ya que

18) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|c_n(k)| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(z_2 - z_0)^n,$$

donde

$$z_2 = z_0 + |z - z_1| + |z_1 - z_0|.$$

Pero

$$|z_2 - z_0| < R + |z_1 - z_0| \leq r,$$

y por lo tanto la serie 18) converge. Por consiguiente, en virtud del Teorema 13-9, podemos invertir el orden de sumación para obtener

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_n(z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}b_k(z - z_1)^k,$$

donde b_k viene dado por 17). Esto completa la demostración.

NOTA. En la demostración hemos indicado que podemos utilizar cualquier $R > 0$ que satisfaga la condición

19) $$N(z_1;\ R) \subset S.$$

13–24 TEOREMA. *Supongamos que* $\sum a_n(z - z_0)^n$ *converge para todo* z *en* $N(z_0;\ r)$. *La función* f *definida por la igualdad*

20) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - z_0)^n, \quad \text{si } z \in N(z_0;\ r),$$

tiene entonces derivada $f'(z)$ *para cada* z *de* $N(z_0;\ r)$, *dada por*

21) $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}na_n(z - z_0)^{n-1}.$$

NOTA. Las series de 20) y 21) tienen el mismo radic de convergencia.

Demostración. Supongamos que $z_1 \in N(z_0;\ r)$ y desarrollemos f en serie de potencias en torno a z_1, como se indicó en 16). Entonces si $z \in N'(z_1;\ R)$, tenemos

22) $$\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty}b_{k+1}(z - z_1)^k.$$

Por la continuidad, el segundo miembro de 22) tiende hacia b_1 cuando $z \to z_1$.

Luego, existe $f'(z_1)$ y coincide con b_1. Utilizando 17) para calcular b_1, encontramos

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z_1 - z_0)^{n-1}.$$

Ya que z_1 es un punto arbitrario de $N(z_0; r)$, esto demuestra 21). Las dos series tienen el mismo radio de convergencia a causa de que $\sqrt[n]{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

NOTA. Mediante la aplicación reiterada de 21), encontramos que para cada $k = 1, 2, \ldots$, existe la derivada $f^{(k)}(z)$ en $N(z_0; r)$ y viene dada por la serie

23) $$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z - z_0)^{n-k}.$$

Si en 23) hacemos $z = z_0$, obtenemos la importante fórmula

24) $$f^{(k)}(z_0) = k!a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Esta igualdad nos dice que si dos series de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$ y $\sum b_n(z - z_0)^n$ representan ambos la misma función en un entorno $N(z_0; r)$, entonces $a_n = b_n$ para todo n. Esto es, el desarrollo de una función f en serie de potencias en torno de un punto dado z_0 es único (si existe), y viene dado por la fórmula

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

válida para todo z en el círculo de convergencia.

13—25 TEOREMA. *Supongamos que $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge para todo z en $N(z_0; r)$. Sea Γ una curva regular a trozos en $N(z_0; r)$ que una z_0 a z_1. Entonces*

$$\int_{\Gamma(z_0, z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z_1 - z_0)^{n+1}.$$

Demostración. La integración término a término es posible en virtud del Teorema 13-12 y la integral de cada término puede calcularse por medio del Ejercicio 9-38.

13-16 Multiplicación de series de potencias.

13—26 TEOREMA. *Dados dos desarrollos en serie de potencias en torno al origen, sean por ejemplo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad si\ z \in N(0;\ r),$$

y

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad si\ z \in N(0;\ R).$$

Entonces el producto $f(z)g(z)$ viene dado por la serie de potencias

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad si\ z \in N(0;\ r) \cap N(0;\ R),$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Demostración. El producto de Cauchy de las dos series dadas es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

y la conclusión se deduce del Teorema 12-46 (Teorema de Mertens).

NOTA. Si las dos series son idénticas, obtenemos

$$f(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{m_1+m_2=n} a_{m_1} a_{m_2}$. El símbolo $\sum_{m_1+m_2=n}$ indica que la sumación se extiende a todos los enteros no negativos cuya suma es n. Análogamente, para cualquier entero $p > 0$, tenemos

$$f(z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) z^n,$$

donde

$$c_n(p) = \sum_{m_1+\cdots+m_p=n} a_{m_1} \cdots a_{m_p}.$$

13-17 El teorema de sustitución.

13—27 TEOREMA. *Dados dos desarrollos en serie de potencias en torno al origen, sean por ejemplo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad si\ z \in N(0;\ r),$$

y

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad si\ z \in N(0; R).$$

Si para un z fijo en $N(0; R)$, *tenemos* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$, *entonces para este z podemos escribir*

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

donde los coeficientes c_k *se obtienen como sigue: Definamos los números* $b_k(n)$ *mediante la ecuación*

$$g(z)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(n) z^k.$$

Entonces $c_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots.$

NOTA. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ es la serie de potencias que resulta *formalmente* al sustituir la serie correspondiente a $g(z)$ en lugar de z en el desarrollo de f y reordenar luego los términos en potencias crecientes de z.

Demostración. Por hipótesis, podemos elegir z de modo que $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$. Para este z tenemos $|g(z)| < r$ y podemos, por tanto, escribir

$$f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k(n) z^k.$$

Si podemos invertir el orden de sumación, obtenemos

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

que es lo que pretendemos demostrar. Para justificar la inversión, estableceremos la convergencia de la serie

25) $$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_n b_k(n) z^k| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k|.$$

Cada número $b_k(n)$ es una suma finita de la forma

$$b_k(n) = \sum_{m_1 + \cdots + m_n = k} b_{m_1} \cdots b_{m_n},$$

y, por lo tanto, $|b_k(n)| \le \sum_{m_1 + \cdots + m_n = k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$. Por otra parte, tenemos

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n)z^k,$$

donde $B_k(n) = \sum_{m_1+\cdots+m_n=k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$. Volviendo a 25) tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n)z^k| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n)|z^k|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k z^k|\right)^n,$$

y esto establece la convergencia de 25).

Como una aplicación del teorema de sustitución, demostraremos que el recíproco de una serie de potencias de z es asimismo una serie de potencias de z, con tal de que el término constante no sea 0.

13–28 Teorema. *Supongamos que*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \qquad si\ z \in N(0;\ h),$$

siendo $p(0) \neq 0$. Existe entonces un entorno $N(0;\ \delta)$ en el cual el recíproco de p tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n.$$

Además, $q_0 = 1/p_0$.

Demostración. Sin disminuir la generalidad podemos suponer $p_0 = 1$. [¿Por qué?] Entonces $p(0) = 1$. Consideremos $P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |p_n z^n|$ si $z \in N(0;\ h)$. En virtud de la continuidad, existe un entorno $N(0;\ \delta)$ tal que $|P(z) - 1| < 1$ si $z \in N(0;\ \delta)$. La conclusión se obtiene aplicando el Teorema 13-27 poniendo

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

y

$$g(z) = 1 - p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n.$$

13-18 Series reales de potencias. Si x, x_0 y a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) son números reales, la serie $\sum a_n(x - x_0)^n$ se llama una *serie real de potencias*. Su círculo

de convergencia determina en el eje real un intervalo llamado *intervalo de convergencia*. Si los entornos se consideran como entornos uni-dimensionales, todos los resultados de los tres últimos párrafos pueden interpretarse como teoremas sobre el eje real.

En el resto de este capítulo limitaremos nuestras consideraciones a las series reales de potencias. En este párrafo trataremos el siguiente tipo de problema: Supongamos dada una función real f definida en algún entorno de un punto x_0 de E_1, y supongamos que f admite derivadas de cualquier orden en este entorno. Podemos entonces con seguridad *formar* la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

¿Converge esta serie para algún x además del $x = x_0$? Si es así, ¿su suma es igual a $f(x)$? En general, la contestación a ambas preguntas es «no». (Ver en el Ejercicio 13-30 un contraejemplo.) Una condición necesaria y suficiente para contestar afirmativamente ambas preguntas, puede darse usando la fórmula de Taylor (Teorema 5-14), pero antes introducimos alguna terminología y notaciones nuevas.

13—29 Definición. *Sea f una función real definida en un intervalo I de E_1. Si f admite derivadas de cualquier orden en cada punto de I, escribimos $f \in C^{\infty}$ en I.*

Si $f \in C^{\infty}$ en algún entorno de un punto x_0, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(x_0)/n!)(x - x_0)^n$ se llama la *serie de Taylor generada por f en torno de x_0*. Para indicar que f genera la serie, escribimos

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

La pregunta que aquí nos interesa es ésta: ¿Cuándo podemos reemplazar el símbolo $\sim$ por el símbolo $=$? La fórmula de Taylor establece que si $f \in C^{\infty}$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si $x_0 \in [a, b]$, entonces para todo x de $[a, b]$ y para todo n, tenemos

26) $$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n,$$

donde x_1 es algún punto comprendido entre x y x_0. El punto x_1 depende x, x_0 y de n. Luego una condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor converja hacia $f(x)$ es que

27) $$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n = 0.$$

En la práctica puede ser muy difícil manejar este límite a causa de la posición desconocida de x_1. En algunos casos, no obstante, puede obtenerse una cota inferior conveniente para $f^{(n)}(x_1)$ y puede demostrarse que el límite es 0. Ya que $(x - x_0)^n/n! \to 0$ cuando $n \to \infty$, la igualdad 27) será válida con seguridad si la sucesión $\{f_n\}$ es *uniformemente acotada* en $[a, b]$. Así pues podemos establecer la siguiente condición suficiente para representar una función mediante una serie de Taylor.

13–30 Teorema. *Supongamos que $f \in C^\infty$ en $[a, b]$ y consideremos $x_0 \in [a, b]$. Supongamos además que existen un entorno $N(x_0)$ y una constante M (que podría depender de x_0) tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ para todo x de $N(x_0) \cap [a, b]$ y todo $n = 1, 2, \ldots$ En estas condiciones, para cada x de $N(x_0) \cap [a, b]$, tenemos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

13-19 Teorema de Bernstein. A continuación vamos a deducir otra condición suficiente muy útil, debida a S. Bernstein.

13–31 Teorema (*Bernstein*). *Supongamos que $f \in C^\infty$ en un intervalo abierto de la forma $(a - \delta, b)$, siendo $\delta > 0$. y supongamos que f y todas sus derivadas son no negativas en el intervalo semi-abierto $[a, b)$. Entonces, para todo x_0 en $[a, b)$, tenemos*

28) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \qquad si\ x_0 \leq x < b.$$

Demostración. Consideremos $x_0 \in [a, b)$, y supongamos que $x \in [x_0, b)$. Entonces la serie 28) tiene los términos positivos y, a causa de 26), sus sumas parciales están todas acotadas superiormente por $f(x)$. Luego la serie 28) converge y tiene una suma $\leq f(x)$. Aplicando el mismo razonamiento a $f^{(n)}$, encontramos que la n-ésima derivada de la serie 28) converge y tienen una suma $\leq f^{(n)}(x)$. Por consiguiente si escribimos,

29) $$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

$g(x)$ y todas sus derivadas $g^{(n)}(x)$ son no negativas si $x_0 \leq x < b$.

A continuación, demostraremos que $g(x) = 0$ si $x_0 \leq x < (x_0 + b)/2$. Esta restricción impuesta a x implica $x_0 \leq x \leq 2x - x_0 < b$. Por lo tanto podemos elegir un número y que satisfaga $2x - x_0 < y < b$ y hacer uso de la fórmula de Taylor para escribir

30) $$f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (y - x)^k + \frac{f^{(n)}(y_1)}{n!} (y - x)^n,$$

donde $x < y_1 < y$. Ahora bien, $f^{(n)}$ es una función creciente [¿Por qué?] y por consiguiente tenemos $f^{(n)}(y_1) \geq f^{(n)}(x)$. Por lo tanto, 30) nos da

$$f(y) \geq \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n,$$

o bien

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \leq \frac{f(y)}{(y-x)^n}.$$

Volviendo al término complementario o resto de 26), podemos escribir

$$0 \leq \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n \leq \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n \leq f(y)\left(\frac{x-x_0}{y-x}\right)^n$$

Pero $0 \leq (x-x_0)/(y-x) < 1$ debido a la manera como fue elegido y. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n = 0$$

y esto significa que

31) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad \text{si } x_0 \leq x < \frac{x_0+b}{2}.$$

Hagamos ahora la siguiente observación: Puesto que f es no negativa y creciente en $[a, b)$, si $f(x_0) = 0$ se deduce que $f(x) = 0$ para todo x en $[a, x_0]$. Esto, a su vez, implica que todas las derivadas $f^{(n)}(x) = 0$ si $x \in [a, x_0]$ (con tal que $x_0 > a$), y, por lo tanto, [según 31)] $f(x)$ debe ser 0 para todo x en $[a, (x_0 + b)/2)$. En otras palabras, si existe un punto x_0 interior a (a, b) tal que $f(x_0) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo x en $[a, (x_0 + b)/2)$. Pero esto implica que f debe ser idénticamente nula en todo el intervalo $[a, b)$, ya que el sup del conjunto $\{x \mid x \in (a, b), f(x) = 0\}$ no puede ser un punto en (a, b). Ahora bien, la función g definida por 29) satisface las mismas hipótesis que f en el intervalo $[x_0, b)$ y se anula en los puntos interiores del intervalo [en virtud de 31)]. Luego, g es idénticamente nula en $[x_0, b)$. En otras palabras, 28) es válida. (Esta demostración es debida al Dr. BASIL GORDON.)

Nótese que el teorema de Bernstein nos da un desarrollo en serie de potencias en las proximidades de x_0 válido en un intervalo semiabierto de la forma $[x_0, b)$. Según el Teorema 13-21, esta serie converge también en un entorno de radio $b - x_0$ y centro en x_0, pero no nos asegura que represente $f(x)$ si $x < x_0$. No obstante, si x_0 es un punto *interior* de $[a, b)$, podemos siempre aumentar el campo de validez de 28) de modo que se extienda a la izquierda de x_0.

13—32 TEOREMA. *Supongamos que f satisface las hipótesis del Teorema 13-31 y que x_0 es un punto interior de $[a, b)$. Sea R un número tal que $N(x_0; R) \subset (a, b)$. Entonces la fórmula 28) es válida para x en $N(x_0; R)$.*

Demostración. Aplicando 28) poniendo $x_0 = a$, obtenemos el desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

válido para cada x en $[a, b)$. Según el Teorema 13-21, esta serie converge incluso si x pertenece al intervalo $2a - b < x < b$ (si bien no representa necesariamente $f(x)$ si $x < a$). Luego podemos aplicar el Teorema 13-23 poniendo $S = (a, b)$ para obtener un desarrollo en la vecindad de x_0 de la forma

32) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k,$$

válido para cada x en $N(x_0; R)$, siendo R cualquier número positivo que satisfaga la condición 19). En este caso, 19) exige

$$N(x_0; R) \subset (a, b).$$

Según 24), el coeficiente b_k debe ser $f^{(k)}(x_0)/k!$. Esto completa la demostración.

13-20 La serie binómica. Como un ejemplo del empleo del teorema de Bernstein, obtendremos el desarrollo siguiente, conocido con el nombre de la *serie binómica*:

33) $$(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad \text{si} -1 < x < 1,$$

donde a es un número real cualquiera y

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

El teorema de Bernstein no puede aplicarse directamente en este caso. Sin embargo, podemos razonar así: Consideraremos $f(x) = (1 - x)^{-c}$, siendo $c > 0$ y $x < 1$. Entonces

$$f^{(n)}(x) = c(c+1)\ldots(c+n-1)(1-x)^{-c-n}$$

y por lo tanto $f^{(n)}(x) \geq 0$ para cada n, con tal que $x < 1$. Por consiguiente podemos aplicar el Teorema 13-32, poniendo $x_0 = 0$, $a = -1$ y $b = 1$. Encontramos

34) $$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-c}{k} (-1)^k x^k, \quad \text{si } -1 < x < 1.$$

Sustituyendo c por $-a$ y x por $-x$ en 34),encontramos que 33) es cierta para cada $a < 0$. Pero ahora la validez de 33) puede extenderse a cualquier valor real a por integración sucesiva.

Naturalmente, si a es un entero positivo, por ejemplo $a = m$, entonces $\binom{m}{n} = 0$ para $n > m$, y 33) se reduce a una suma finita (fórmula del Binomio de Newton).

13-21 Teorema de Abel. Si $-1 < x < -1$, la integración de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

nos da el desarrollo en serie

35) $$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

también válido para $-1 < x < 1$. Si ponemos $x = -1$ en el segundo miembro de 35), obtenemos una serie alternada convergente, $\sum(-1)^{n+1}/n$. ¿Podemos también poner $x = -1$ en el primer miembro de 35)? El teorema que sigue nos contesta afirmativamente esta pregunta.

13—33 Teorema. (*Teorema de Abel*). *Supongamos que*

36) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad si\ -r < x < r.$$

Si la serie converge también en $x = r$, entonces el límite $\lim_{x\to r-} f(x)$ existe y tenemos

$$\lim_{x\to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Demostración. Para simplificar, supongamos que $r = 1$ (esto equivale a un cambio de escala). Entonces nuestra hipótesis es que $f(x) = \sum a_n x^n$ para $-1 < x < 1$ y que $\sum a_n$ converge. Escribamos $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Tenemos que demostrar que $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$, o, de otra manera, que f es continua a la izquierda de $x = 1$.

Si multiplicamos la serie de $f(x)$ por la serie geométrica y utilizamos el Teorema 13-26, encontramos

$$\frac{1}{1-x}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad \text{donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Luego tenemos

37) $$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} [c_n - f(1)]x^n, \qquad \text{si } -1 < x < 1.$$

Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} c_n = f(1)$. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un N tal que $n \geq N$ implique $|c_n - f(1)| < \varepsilon/2$. Si escindimos la suma 37) en dos partes, obtenemos

38) $$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} [c_n - f(1)]x^n + (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} [c_n - f(1)]x^n.$$

Designemos con M el mayor de los N números $|c_n - f(1)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Si $0 < x < 1$, 38) nos da

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x)NM + (1-x)\frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N}^{\infty} x^n$$

$$= (1-x)NM + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{x^N}{1-x} < (1-x)NM + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos ahora $\delta = \varepsilon/2NM$. Entonces $0 < 1 - x < \delta$ implica $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$, lo cual significa que $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$. Esto completa la demostración.

EJEMPLO. Podemos poner en 35) $x = -1$ para obtener

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(Ver en el Ejercicio 12-18 otra deducción de esta fórmula).

Como aplicación del teorema de Abel podemos deducir el siguiente resultado referente a la multiplicación de series:

13—34 TEOREMA. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series convergentes y designemos con $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ su producto de Cauchy. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge, tenemos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

NOTA. Este resultado es parecido al Teorema 12-46 salvo que no suponemos la convergencia absoluta de una de las dos series. No obstante, se supone la convergencia de su producto de Cauchy.

Demostración. Las dos series de potencias $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ son ambas convergentes para $x = 1$, y, por lo tanto, convergen en el entorno $N(0; 1)$. Mantengamos $|x| < 1$ y escribamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right),$$

utilizando el Teorema 13-26. Consideremos ahora $x \to 1-$ y apliquemos el teorema de Abel.

13-22 Teorema de Tauber. El recíproco del teorema de Abel en general es falso. Esto es, si f viene dada por 36), el límite $f(r-)$ puede existir pero la serie $\sum a_n r^n$ puede no ser convergente. Por ejemplo, tomemos $a_n = (-1)^n$. Entonces $f(x) = 1/(1+x)$ si $-1 < x < 1$ y $f(x) \to \frac{1}{2}$ cuando $x \to 1-$. Sin embargo, $\sum(-1)^n$ diverge. A. TAUBER (1897) descubrió que imponiendo además ciertas restricciones a los coeficientes a_n, puede obtenerse un recíproco del teorema de Abel. Gran número de tales resultados se conocen con el nombre de *teoremas Tauberianos*. El más sencillo de éstos, llamado algunas veces el *primer teorema de Tauber*, es el siguiente:

13—35 TEOREMA (*Tauber*). *Consideremos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $-1 < x < 1$, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Si $f(x) \to S$ cuando $x \to 1-$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y tiene por suma S.*

Demostración. Consideremos $n\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} k|a_k|$. Entonces $\sigma_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. (Ver la Nota que sigue al Teorema 12-48.) También, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$ si $x_n = 1 - 1/n$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir N de modo que $n > N$ implique

$$|f(x_n) - S| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \sigma_n < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Consideremos ahora $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Entonces, para $-1 < x < 1$, podemos escribir

$$s_n - S = f(x) - S + \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k.$$

Mantengamos ahora x en $(0, 1)$. Entonces

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x)$$

para cada k. Por consiguiente, si $n \geq N$ y $0 < x < 1$, tenemos

$$|s_n - S| \leq |f(x) - S| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1 - x)}.$$

Tomando $x = x_n = 1 - 1/n$, encontramos $|s_n - S| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Con lo cual queda demostrado el teorema.

NOTA. Ver en el Ejercicio 13-34 otro teorema tauberiano.

Convergencia uniforme.

13-1. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S y que cada f_n está acotada en S. Demostrar que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en S.

13-2. Definamos dos sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ como sigue:

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \text{si } x \in E_1,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si } x = 0 \text{ o si } x \text{ es irracional,} \\ b + \dfrac{1}{n}, & \text{si } x \text{ es racional, pongamos } x = \dfrac{a}{b},\ b > 0. \end{cases}$$

Consideremos $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$.

a) Demostrar que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son ambas convergentes uniformemente en todo intervalo finito.

b) Demostrar que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en ningún intervalo finito.

13-3. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S, $g_n \to g$ uniformemente en S.

a) Demostrar que $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente en S.

b) Consideremos $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$, $h(x) = f(x)g(x)$, si $x \in S$. El Ejercicio 13-2 pone de manifiesto que la afirmación $h_n \to h$ uniformemente en S es, en general, incorrecta. Demostrar que *es cierta* si cada f_n y cada g_n están acotadas en S. Indicar por qué esta hipótesis no se satisface en el Ejercicio 13-2.

13-4. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S y que existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo x en S y todo n. Sea g una función continua en el disco cerrado $\bar{N}(0; M)$ y definamos $h_n(x) = g[f_n(x)]$, $h(x) = g[f(x)]$, si $x \in S$. Demostrar que $h_n \to h$ uniformemente en S.

13-5. a) Consideremos $f_n(x) = 1/(nx + 1)$ si $0 < x < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Demostrar que $\{f_n\}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0, 1)$.

b) Consideremos $g_n(x) = x/(nx + 1)$ si $0 < x < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Demostrar que $g_n \to 0$ uniformemente en $(0, 1)$.

13-6. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto compacto S y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente en S hacia una función límite f. Demostrar que $f_n \to f$ uniformemente en S si, y únicamente si, se cumplen las siguientes condiciones:

I) La función límite f es continua en S.

II) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $m > 0$ y un $\delta > 0$ tales que $n > m$ y $|f_k(x) - f(x)| < \delta$ implican $|f_{n+k}(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo x en S y todo $k = 1, 2, \ldots$.

Indicación: Para probar la suficiencia de I) y II), demostrar que para cada x_0 en S existen un entorno $N(x_0)$ y un entero k (que depende de x_0) tales que

$$|f_k(x) - f(x)| < \delta \quad \text{si } x \in N(x_0)$$

En virtud de la compacidad, un conjunto finito de enteros, llamémosle $A = \{k_1, \ldots, k_r\}$, tiene la propiedad de que, para cada x en S, algún k de A satisface $|f_k(x) - f(x)| < \delta$. La convergencia uniforme es una sencilla consecuencia de este hecho.

13-7. a) Hacer uso del Ejercicio 13-6 para demostrar el siguiente teorema de Dini: *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales continuas que converge puntualmente hacia una función límite continua f en un conjunto compacto S, y si $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para cada x de S y todo $n = 1, 2, \ldots$, entonces $f_n \to f$ uniformemente en S.*

b) Utilizar la sucesión del Ejercicio 13-5 a) para demostrar que la compacidad de S es esencial en el teorema de Dini.

13-8. Consideremos $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Demostrar que $\{f_n\}$ converge puntualmente pero no uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. (Ver Fig. 13-1.) Verificar que la integración término a término nos lleva a un resultado correcto en este caso.

13-9. Demostrar que $\sum x^n(1-x)$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$, mientras que $\sum (-1)^n x^n(1-x)$ converge uniformemente en $[0, 1]$. Esto pone de manifiesto que la convergencia uniforme de $\sum f_n(x)$ en unión de la convergencia puntual de $\sum |f_n(x)|$ no implica necesariamente la convergencia uniforme de $\sum |f_n(x)|$.

13-10. Supongamos que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para cada x en T y cada $n = 1, 2, \ldots$, y que $g_n \to 0$ uniformemente en T. Demostrar que $\sum (-1)^{n+1} g_n(x)$ converge uniformemente en T.

13-11. Demostrar el criterio de Abel para la convergencia uniforme: Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones reales tales que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para cada x en T y para todo $n = 1, 2, \ldots$. Si $\{g_n\}$ está uniformemente acotada en T y $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en T, también $\sum f_n(x) g_n(x)$ converge uniformemente en T.

13-12. Consideremos $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$ si $x \in E_1$, $n = 1, 2, \ldots$. Encontrar la función límite f de la sucesión $\{f_n\}$ y la función límite g de la sucesión $\{f_n'\}$.

a) Demostrar que $f'(x)$ existe para todo x pero que $f'(0) \neq g(0)$. ¿Para qué valores de x es $f'(x) = g(x)$?

b) ¿En qué subintervalos de E_1 $f_n \to f$ uniformemente?

c) ¿En qué subintervalos de E_1 $f_n' \to g$ uniformemente?

13-13. Sea $f_n(x) = (1/n)e^{-n^2x^2}$ si $x \in E_1$, $n = 1, 2, \ldots$. Demostrar que $f_n \to 0$ uniformemente en E_1, que $f_n' \to 0$ puntualmente en E_1, pero que la convergencia de $\{f_n'\}$ no es uniforme en cualquier intervalo que contenga el origen.

13-14. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales continuas definidas en $[0, 1]$ y supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en $[0, 1]$. Demostrar si es o no cierta la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

13-15. Consideremos $f_n(x) = 1/(1 + n^2x^2)$ si $0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Demostrar que $\{f_n\}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$. ¿Es posible la integración término a término?

13-16. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} x/n^\alpha(1 + nx^2)$ converge uniformemente en todo intervalo finito de E_1 si $\alpha > \frac{1}{2}$. ¿La convergencia es uniforme en E_1?

13-17. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n/\sqrt{n}) \operatorname{sen}(1 + (x/n))$ converge uniformemente en E_1.

13-18. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1}/(2n+1) - x^{n+1}/(2n+2))$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$.

13-19. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sen nx y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ son uniformemente convergentes en E_1 si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge.

13-20. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de términos positivos. Demostrar que la serie $\sum a_n$ sen nx converge uniformemente en E_1 si $na_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y recíprocamente.

13-21. Dada una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Demostrar que la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge uniformemente en el semi intervalo infinito $0 \le s < +\infty$. Utilizar este resultado para probar que $\lim_{s\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

13-22. Demostrar que la serie $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge uniformemente en todo semi intervalo infinito $1 + h \le s < +\infty$, siendo $h > 0$. Demostrar que la igualdad

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

es válida para cada $s > 1$ y obtener una fórmula parecida para la derivada de orden k $\zeta^{(k)}(s)$.

Convergencia en media.

13-23. Consideremos $f_n(x) = n^{3/2}xe^{-n^2x^2}$. Demostrar que $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia 0 en $[-1, 1]$ pero que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n \neq 0$ en $[-1, 1]$.

13-24. Supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia f en $[a, b]$ y que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = g$ en $[a, b]$. Demostrar que $f = g$ si ambas son continuas en $[a, b]$.

13-25. Consideremos $f_n(x) = \cos^n x$ si $0 \le x \le \pi$.

a) Demostrar que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = 0$ en $[0, \pi]$ pero que $\{f_n(\pi)\}$ no converge.

b) Demostrar que $\{f_n\}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, \pi/2]$.

13-26. Consideremos $f_n(x) = 0$ si $0 \le x \le 1/n$ o si $2/n \le x \le 1$, y $f_n(x) = n$ si $1/n < x < 2/n$. Demostrar que $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia 0 en $[0, 1]$ pero que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n \neq 0$ en $[0, 1]$.

Series de potencias

13-27. Si r es el radio de convergencia de $\sum a_n(z - z_0)^n$, demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \le r \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

13-28. Suponiendo que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia igual a 2, hallar el radio de convergencia de las series siguientes:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}, \qquad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}.$$

En a) y b), k es un entero positivo fijo.

13-29. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cuyos coeficientes están relacionados por una ecuación de la forma $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Demostrar que para cualquier x para el que la serie converge, su suma es

$$\frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$

13-30. Consideremos $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

a) Demostrar que $f^{(n)}(0)$ existe para todo $n \geq 1$.

b) Demostrar que la serie de Taylor en torno de $x_0 = 0$ generada por f converge en todo E_1 pero que únicamente coincide con f en el origen.

13-31. Demostrar que la serie binómica $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ presenta el siguiente comportamiento en los puntos $x = \pm 1$.

a) Si $x = -1$, la serie converge para $\alpha \geq 0$ y diverge para $\alpha < 0$.

b) Si $x = 1$, la serie diverge para $\alpha \leq -1$, converge condicionalmente para $-1 < \alpha < 0$, y converge absolutamente para $\alpha \geq 0$.

13-32. Demostrar que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, 1]$ si $\sum a_n$ converge. Utilizar este hecho para dar otra demostración del teorema de Abel.

13-33. Si cada $a_n \geq 0$ y $\sum a_n$ diverge, demostrar que $\sum a_n x^n \to +\infty$ cuando $x \to 1-$. (Suponer que $\sum a_n x^n$ converge para $|x| < 1$.)

13-34. Si cada $a_n \geq 0$ y $\lim_{x\to 1-} \sum a_n x^n$ existe y es igual a A, demostrar que $\sum a_n$ converge y tiene por suma A. (Comparar con el Teorema 13-35.)

13-35. Para cada t real, definamos $f_t(x) = xe^{xt}/(e^x - 1)$ si $x \in E_1$, $x \neq 0$, $f_t(0) = 1$.

a) Demostrar que existe un entorno $N(0; \delta)$ del origen en el que f_t puede ser representada por una serie de potencias de x.

b) Definir $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $\ldots$, mediante la ecuación

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \frac{x^n}{n!}, \qquad \text{si } x \in N(0; \delta),$$

y utilizar la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \frac{x^n}{n!} = e^{tx} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \frac{x^n}{n!}$$

para demostrar que $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(0) t^{n-k}$. Esto demuestra que cada función P_n es un polinomio. Estos son los *polinomios de Bernoulli*. Los números $B_n = P_n(0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ se llaman los *números de Bernoulli*. Deducir las siguientes propiedades:

c) $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$, si $n = 2, 3, \ldots$.

d) $P_n'(t) = nP_{n-1}(t)$, si $n = 1, 2, \ldots$.

e) $P_n(t + 1) - P_n(t) = nt^{n-1}$ si $n = 1, 2, \ldots$.

f) $P_n(1 - t) = (-1)^n P_n(t)$ g) $B_{2n+1} = 0$ si $n = 1, 2, \ldots$

h) $1^n + 2^n + \cdots + (k - 1)^n = \dfrac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n + 1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

REFERENCIAS

13-1. HARDY, G. H., *Divergent Series*. Oxford: University Press, 1949.

13-2. KNOPP, K., *Theory and Application of Infinite Series*. R. C. Young, traductor. New York: Hafner, 1951.

13-3. WHITTAKER, E. T., and WATSON G. N., *Modern Analysis*, 4.ª ed. Cambridge: University Press, 1940.

CAPÍTULO 14

INTEGRALES IMPROPIAS DE RIEMANN-STIELTJES

14-1 Introducción. Las integrales de Riemann-Stieltjes de la forma $\int_a^b f\,d\alpha$ fueron tratadas con detalle en el Capítulo 9 con las restricciones de que ambas funciones f y α estuvieran definidas y acotadas en un intervalo finito $[a, b]$. En este capítulo extenderemos el alcance de la integración suavizando estas restricciones. Para empezar, estudiaremos el comportamiento de $\int_a^b f\,d\alpha$ cuando $b \to +\infty$. Esto conduce a la noción de *integral infinita* (también llamada *integral impropia de primera especie*), que se escribe $\int_a^\infty f\,d\alpha$. Tales integrales son, en ciertos aspectos, análogas a las series. En realidad, toda serie convergente puede expresarse como una integral infinita de Riemann-Stieltjes. Numerosas funciones de importancia en Análisis aparecen como integrales infinitas y más tarde en este capítulo se hará un estudio de alguna de las propiedades generales de tales funciones.

Consideraremos también integrales en las que el intervalo $[a, b]$ permanece finito pero el integrando no está acotada en uno o más puntos. Estas integrales, llamadas *integrales impropias de segunda especie*, se definen también mediante un paso al límite. Para distinguir las integrales impropias de las integrales consideradas en el Capítulo 9, éstas últimas ordinariamente se las llama integrales *propias*.

NOTA. Todas las funciones en este capítulo se supondrán *reales* a menos que se indique lo contrario. Las integrales impropias de Riemann-Stieltjes en las que el integrando f y el integrador α son ambas complejas pueden introducirse con las mismas definiciones que utilizaremos en el caso real. No obstante, para lo que nos proponemos bastará tratar las integrales impropias complejas considerando por separado las partes real e imaginaria.

14-2 Integrales infinitas de Riemann-Stieltjes. En este capítulo adoptaremos las siguientes notaciones: El conjunto de todas las funciones f tales que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ se designará con el símbolo $R(\alpha; a, b)$. Cuando $\alpha(x) = x$, escribimos simplemente $R(a, b)$. Cuando se usan estas notaciones, debe entenderse que el intervalo $[a, b]$ es *finito* y que las funciones f y α son ambas reales *definidas* y *acotadas* en $[a, b]$. La notación $\alpha \nearrow$ en $[a, +\infty)$ significará que α es monótona creciente en $[a, +\infty)$.

14–1 DEFINICIÓN. *Supongamos que $f \in R(\alpha; a, b)$ para todo $b \geq a$. Mantengamos fijos a, α, y f y definamos una función I en $[a, +\infty)$ como sigue:*

1) $$I(b) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x), \qquad si\ b \geq a.$$

La función I así definida se llama una integral infinita (o integral impropia de primera especie) y se representa mediante el símbolo $\int_a^\infty f(x)\,d\alpha(x)$ *o por* $\int_a^\infty f\,d\alpha$. *Se dice que la integral* $\int_a^\infty f\,d\alpha$ *converge si el límite*

2) $$\lim_{b\to+\infty} I(b)$$

existe (y es finito). Si no es así, se dice que $\int_a^\infty f\,d\alpha$ *diverge. Si el límite 2) existe y es igual a A, esté número A se llama valor de la integral y escribimos* $\int_a^\infty f\,d\alpha = A$.

NOTA. Esta definición es enteramente análoga a la de serie. (Ver Definición 12-7.) Los valores $I(b)$ desempeñan el papel de sumas parciales y pueden denominarse «integrales parciales».

EJEMPLO 1. Ya que $\int_1^b x^{-p}\,dx = (1 - b^{1-p})/(p - 1)$ si $p \neq 1$, la integral $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ diverge si $p < 1$. Cuando $p > 1$, converge y tiene el valor $1/(p - 1.)$ Si $p = 1$, obtenemos $\int_1^b x^{-1}\,dx = \log b$, de modo que $\int_1^\infty x^{-1}\,dx$ también diverge.

EJEMPLO 2. Ya que $\int_0^b \operatorname{sen} 2\pi x\,dx = (1 - \cos 2\pi b)/2\pi$, la integral $\int_0^\infty \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$ diverge

---

Las integrales infinitas de la forma $\int_{-\infty}^b f\,d\alpha$ se definen en forma parecida. Si $\int_{-\infty}^a f\,d\alpha$ e $\int_a^\infty f\,d\alpha$ son ambas convergentes para algún valor de a, decimos que la integral $\int_{-\infty}^\infty f\,d\alpha$ es convergente y su valor se define como la suma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\alpha = \int_{-\infty}^{a} f\,d\alpha + \int_{a}^{\infty} f\,d\alpha.$$

La elección del punto a es evidentemente indiferente.

Si la integral $\int_{-\infty}^\infty f\,dx$ converge, su valor es igual al límite

3) $$\lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} f\,d\alpha.$$

Sin embargo, es importante comprobar que el límite 3) pudiera existir aun cuando la integral $\int_{-\infty}^\infty f\,d\alpha$ fuese divergente (por ejemplo, tomemos $f(x) = \alpha(x) = x$ para todo x). En este caso, el límite 3) se llama el *valor principal de Cauchy* de $\int_{-\infty}^\infty f\,d\alpha$.

Muchos de los teoremas del Capítulo 9 pueden convertirse en teoremas referentes a integrales infinitas. Para dar un ejemplo de la manera como pue-

den hacerse estas extensiones, consideremos la fórmula de la integración por partes (Teorema 9-6):

$$\int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b \alpha\,df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Ya que b aparece en tres términos de esta igualdad, hay que considerar tres límites cuando $b \to +\infty$. Si dos de estos límites existen, también existe el tercero y obtenemos la fórmula

$$\int_a^\infty f\,d\alpha + \int_a^\infty \alpha\,df = \lim_{b\to+\infty} f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Por el mismo procedimiento pueden extenderse a las integrales infinitas los Teoremas 9-2 al 9-13. No obstante, no es necesario desarrollar los detalles de estas extensiones, ya que en cualquier caso particular, basta aplicar el teorema que se necesita a un intervalo finito $[a, b]$ y entonces hacer $b \to +\infty$.

14-3 Criterios de convergencia de integrales infinitas.

14—2 Teorema. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, +\infty)$ *y que* $f \in R(\alpha;\ a, b)$ *para todo* $b \geq a$. *Supongamos que* $f(x) \geq 0$ *para cada* $x \geq a$. *Entonces* $\int_a^\infty f\,d\alpha$ *converge si existe una constante* $M < 0$ *tal que* $\int_a^b f\,d\alpha \leq M$ *para todo* $b \geq a$, *y recíprocamente.*

Demostración. Definamos $I(b)$ mediante la igualdad 1). Entonces $I \nearrow$ en $[a, +\infty)$ y por lo tanto $\lim_{b\to+\infty} I(b) = \sup\,\{I(b) \mid b \geq a\}$ de lo que se deduce fácilmente la conclusión del teorema. Advirtamos también que $\int_a^\infty f\,d\alpha \leq$ $\leq M$ siempre que la integral converge.

14—3 Teorema. (*Criterio de comparación*). *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, +\infty)$. *Si* $f \in R(\alpha;\ a, b)$ *para todo* $b \geq a$, *si* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \geq a$, *y si* $\int_a^\infty g\,d\alpha$ *converge, también converge entonces* $\int_a^\infty f\,d\alpha$ *y tenemos*

$$\int_a^\infty f\,d\alpha \leq \int_a^\infty g\,d\alpha.$$

Demostración. $\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b g\,d\alpha \leq \int_a^\infty g\,d\alpha$.

14—4 Teorema. (*Criterio de comparación por paso al límite*). *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $[a, +\infty)$. *Supongamos también que* $f \in R(\alpha;\ a, b)$ *y que* $g \in R(\alpha;\ a, b)$ *para todo* $b \geq a$, *siendo* $f(x) \geq 0$ *y* $g(x) \geq 0$ *si* $x \geq a$. *Si*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

entonces $\int_a^\infty f\,d\alpha$ *y* $\int_a^\infty g\,d\alpha$ *son ambas convergentes o ambas divergentes.*

Demostración. Existe un N tal que $\frac{1}{2} \leq f(x)/g(x) \leq \frac{3}{2}$ si $x \geq N$. La conclusión se deduce aplicando el Teorema 14-3 dos veces.

NOTA. El Teorema 14-4 también es cierto si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = c$, con tal que $c \neq 0$. Si $c = 0$, únicamente podemos afirmar que la convergencia de $\int_a^\infty g\,d\alpha$ implica la convergencia de $\int_a^\infty f\,d\alpha$. (Compárese con el Teorema 12-21.)

EJEMPLO 3. Para todo p real, la integral $\int_1^\infty e^{-x}x^p\,dx$ converge. Esto se ve por comparación con $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$, ya que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^p/x^{-2} = 0$.

14–5 TEOREMA. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, +\infty)$. Si $f \in R(\alpha;\ a,\ b)$ para todo $b \geq a$ y si $\int_a^\infty |f|\,d\alpha$ converge, también entonces converge $\int_a^\infty f\,d\alpha$.*

Demostración. Si $x \geq a$, tenemos $0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$. Luego, $\int_a^\infty (|f| - f)\,d\alpha$ converge (según el Teorema 14-3). Restando de $\int_a^\infty |f|\,d\alpha$, encontramos que $\int_a^\infty f\,d\alpha$ converge (el último paso requiere la extensión del Teorema 9-2 a las integrales infinitas).

14–6 DEFINICIÓN. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, +\infty)$ y que $f \in R(\alpha;\ a,\ b)$ para todo $b \geq a$. Se dice que la integral $\int_a^\infty f\,d\alpha$ converge absolutamente si $\int_a^\infty |f|\,d\alpha$ converge. Se dice que converge condicionalmente si $\int_a^\infty f\,d\alpha$ converge pero $\int_a^\infty |f|\,d\alpha$ diverge.*

Los criterios de comparación antes vistos pueden usarse para determinar la convergencia absoluta de una integral infinita, pero no se emplean para la determinación de la convergencia condicional. El teorema que sigue, algo parecido al criterio de Dirichlet para las series (Teorema 12-28), es en ciertos casos muy útil para establecer la convergencia condicional:

14–7 TEOREMA. *Sea f una función decreciente positiva definida en $[a, +\infty)$ tal que $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Sea α una función acotada en $[a, +\infty)$ y supongamos que $f \in R(\alpha;\ a,\ b)$ para todo $b \geq a$. Entonces la integral $\int_a^\infty f\,d\alpha$ es convergente.*

Demostración. La integración por partes nos da

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) + \int_a^b \alpha\,d(-f).$$

Ya que α es acotada, $f(b)\alpha(b) \to 0$ cuando $b \to +\infty$. Por consiguiente, para completar la demostración basta establecer la convergencia de $\int_a^\infty \alpha\,d(-f)$. En realidad, esta integral converge *absolutamente*. Para verlo, supongamos $|\alpha(x)| \leq M$ para todo $x \geq a$. Entonces $\int_a^\infty M\,d(-f)$ converge y

$$\int_a^b M\, d(-f) = Mf(a) - Mf(b) \to Mf(a) \qquad \text{cuando } b \to +\infty.$$

Ya que $-f$ es una función creciente, podemos aplicar el Teorema 14-3 para llegar a la conclusión de que $\int_a^\infty |\alpha|\, d(-f)$ es convergente. Con lo que el teorema queda demostrado.

EJEMPLO 4. Tomando $\alpha(x) = \cos(Ax + B)$, $A \neq 0$, concluimos que

$$\int_a^\infty f(x) \operatorname{sen}(Ax + B)\, dx$$

es convergente siempre que f tienda a 0 con monotonía en $[a, +\infty)$. En particular, la integral

$$\int_1^\infty x^{-p} \operatorname{sen} x\, dx$$

converge si $p > 0$. Esta integral es absolutamente convergente si $p > 1$. Sin embargo, si $0 < p \leq 1$ la convergencia es *condicional*. Para verlo, escribamos

$$\int_\pi^{n\pi} x^{-p} |\operatorname{sen} x|\, dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x^{-p} |\operatorname{sen} x|\, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

y recordemos que $\sum_{k=1}^\infty 1/k$ diverge.

14–8 TEOREMA. (*Condición de Cauchy para integrales infinitas*). *Supongamos que*

$$f \in R(\alpha; a, b)$$

para todo $b \geq a$. *Entonces la integral* $\int_a^\infty f\, d\alpha$ *converge si, y únicamente si, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $B > 0$ *tal que* $c > b > B$ *implica*

$$\left| \int_b^c f(x)\, d\alpha(x) \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Demostración. Supongamos que $\int_a^\infty f\, d\alpha$ converge. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $B > 0$ tal que $|\int_a^b f\, d\alpha - \int_a^\infty f\, d\alpha| < \varepsilon/2$ siempre que $b > B$. Tomando $c > b > B$, obtenemos 4).

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición de Cauchy y definamos

$$a_n = \int_a^{a+n} f\, d\alpha, \qquad \text{si } n = 1, 2, \ldots .$$

La sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy y, por consiguiente, converge. Consideremos $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Demostraremos que $\int_a^\infty f\,d\alpha = A$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos B de modo que $|\int_b^c f\,d\alpha| < \varepsilon/2$ si $c > b > B$ y también que $|a_n - A| < \varepsilon/2$ siempre que $a + n \geq B$. Elijamos un entero $N > B - a$. Entonces, si $b > a + N$, tenemos

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha - A\right| = \left|\int_a^{a+N} f\,d\alpha - A + \int_{a+N}^b f\,d\alpha\right|$$

$$\leq |a_N - A| + \left|\int_{a+N}^b f\,d\alpha\right| < \varepsilon.$$

Como queríamos demostrar.

NOTA. Del Teorema 14-8 se deduce que la convergencia de $\int_a^\infty f\,d\alpha$ implica

$$\lim_{b\to+\infty} \int_b^{b+\varepsilon} f\,d\alpha = 0, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ fijo.}$$

No obstante, esto no implica que $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. La integral $\int_1^\infty$ sen $x^2\,dx$ es un contraejemplo. Puesto que $\int_1^b \text{sen } x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{b^2} t^{-1/2} \text{ sen } t\,dt$, el Ejemplo 4 demuestra que $\int_1^\infty$ sen $x^2\,dx$ converge. Sin embargo, el integrando no tiende a 0 cuando $x \to +\infty$.

14-4 Series e integrales infinitas.

14—9 TEOREMA. *Toda serie convergente de términos reales $\sum_{k=1}^\infty a_k$, puede expresarse como una integral infinita convergente. O sea, tenemos*

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty f(k) = \int_0^\infty f(x)\,d[x],$$

donde f está definida en $[0, +\infty)$ como sigue:

$$f(x) = a_k \quad \text{si } k - 1 < x \leq k \ (k = 1, 2, \ldots), \ f(0) = 0.$$

Como de costumbre, $[x]$ representa el mayor entero $\leq x$.

Demostración. Según el Teorema 9-12, tenemos $\int_0^b f(x)\,d[x] = \sum_{k=1}^{[b]} f(k) = \sum_{k=1}^{[b]} a_k$. Ahora hagamos $b \to +\infty$.

NOTA. Si $\sum_{k=1}^\infty a_k$ diverge, entonces $\int_0^\infty f(x)\,d[x]$ también diverge.

14—10 TEOREMA. *Toda integral infinita convergente $\int_a^\infty f(x)\,d\alpha(x)$ puede escribirse como una serie convergente. O sea,*

$$(5) \qquad \int_a^\infty f(x)\,d\alpha(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k, \qquad \text{donde } a_k = \int_{a+k-1}^{a+k} f(x)\,d\alpha(x).$$

Demostración. Ya que $\int_a^\infty f\,d\alpha$ converge, la sucesión $\{\int_a^{a+n} f\,d\alpha\}$ también converge. Pero $\int_a^{a+n} f\,d\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y es igual a $\int_a^\infty f\,d\alpha$.

NOTA. La convergencia de la serie que aparece en 5) no implica siempre la convergencia de la integral. Por ejemplo, supongamos $a_k = \int_{k-1}^{k} \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$. Cada $a_k = 0$ y $\sum a_k$ converge. No obstante, vimos en el Ejemplo 2 que $\int_0^\infty \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$ diverge. Por otra parte, si f es *no negativa* y $f \in R(a, b)$ para todo $b \geq a$, la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a+k-1}^{a+k} f(x)\,dx$ implica la convergencia de la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$. En este caso, las integrales parciales $\int_a^b f\,dx$ crecen con monotonía con b y están todas acotadas superiormente por la suma de la serie correspondiente.

14-5 Integrales impropias de segunda especie.

14—11 DEFINICIÓN. *Sea f una función definida en el intervalo semiabierto $(a, b]$ y supongamos que $f \in R(\alpha; x, b)$ para todo x en $(a, b]$. Definamos una función I en $(a, b]$ como sigue:*

6) $$I(x) = \int_x^b f\,d\alpha, \qquad si\ x \in (a, b].$$

La función I así definida se llama una integral impropia de segunda especie y se representa con el símbolo $\int_{a+}^{b} f(t)\,d\alpha(t)$ o por $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$. Se dice que la integral $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$ converge si el límite

7) $$\lim_{t \to a+} I(t)$$

existe (y es finito). Si no es así, se dice que $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$ diverge. Si el límite 7) existe y es igual a A, el número A se llama el valor de la integral y escribimos $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha = A$.

EJEMPLO 5. Si $b > 0$ y $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\int_\varepsilon^b x^{-p}\,dx = \frac{b^{1-p} - \varepsilon^{1-p}}{1-p}, \qquad \text{si } p \neq 1.$$

Cuando $\varepsilon \to 0+$, encontramos que $\int_{0+}^{b} x^{-p}$ converge si $p < 1$ y diverge si $p > 1$. Cuando $p = 1$, obtenemos $\int_\varepsilon^b x^{-1}\,dx = \log b - \log \varepsilon$, y por lo tanto $\int_{0+}^{b} x^{-1}\,dx$ también diverge. Este ejemplo puede también tratarse de otra manera mediante un cambio de variable que transforma la integral en una integral infinita. Efectivamente, tenemos

$$\int_\varepsilon^b x^{-p}\,dx = \int_{1/b}^{1/\varepsilon} t^{p-2}\,dt,$$

y, cuando $\varepsilon \to 0+$, encontramos $\int_{0+}^{1} x^{-p}\,dx = \int_{1/b}^{\infty} t^{p-2}\,dt$. Por consiguiente tenemos la convergencia si $p < 1$, y recíprocamente.

NOTA. Las integrales impropias de la forma $\int_{a}^{b-} f\,d\alpha$ se definen de manera análoga. Si las dos integrales $\int_{a+}^{c} f\,d\alpha$ e $\int_{c}^{b-} f\,d\alpha$ son ambas convergentes, escribimos

$$\int_{a+}^{b-} f\,d\alpha = \int_{a+}^{c} f\,d\alpha + \int_{c}^{b-} f\,d\alpha.$$

La definición puede extenderse, como es natural, al caso de un número finito cualquiera de sumandos. Además, podemos también considerar combinaciones «mixtas» como por ejemplo $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha + \int_{b}^{\infty} f\,d\alpha$, que escribimos así $\int_{a+}^{\infty} f\,d\alpha$.

EJEMPLO 6. Si $p > 0$, la integral $\int_{0+}^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx$ converge. Esta integral debe interpretarse como una suma,

8) $$\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{p-1}\,dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx.$$

La segunda integral converge para todo p real (según el Ejemplo 3). Para averiguar la convergencia de la primera integral, pongamos $t = 1/x$ y escribamos

$$\int_{\varepsilon}^{1} e^{-x}x^{p-1}\,dx = \int_{1}^{1/\varepsilon} e^{-1/t}t^{-p-1}\,dt.$$

Pero $\int_{1}^{\infty} e^{-1/t}\,t^{-p-1}\,dt$ converge para $p > 0$ por comparación con $\int_{1}^{\infty} t^{-p-1}\,dt$. Por consiguiente, $\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{p-1}\,dx$ converge para $p > 0$. Cuando $p > 0$, el valor de la suma 8) se representa por $\Gamma(p)$. La función Γ así definida se llama la *función Gamma*. En los ejercicios del final del capítulo se desarrollan algunas de sus propiedades.

NOTA. Algunas veces se usa la notación $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ en lugar de $\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ para una integral impropia de Riemann de segunda especie. Esto se justifica con el Teorema 9-31 II) que nos dice que el límite $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ siempre existe y es igual a $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ si $f \in R$ en $[a, b]$. No obstante, para un integrador general α, el límite $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,d\alpha(x)$ y la integral $\int_{a}^{b} f(x)\,d\alpha(x)$ no coinciden necesariamente si α tiene una discontinuidad en a. (Ver Ejercicio 14-9.)

Los cuatro teoremas que siguen (y sus demostraciones) son análogos a los Teoremas 14-2 al 14-5.

14—12 TEOREMA. *Supongamos que $\alpha\nearrow$ en $(a, b]$ y que $f \in R(\alpha;\ x, b)$ para todo x en $(a, b]$. Supongamos que $f(x) \geq 0$ para cada x en $(a, b]$. En-*

tonces $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$ *converge si existe una constante* $M > 0$ *tal que* $\int_{x}^{b} f\,d\alpha \leq$ $\leq M$ *para todo* x *en* $(a, b]$, *y recíprocamente.*

14—13 Teorema (*Criterio de comparación*). *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $(a, b]$. *Si* $f \in R(\alpha; x, b)$ *para todo* x *en* $(a, b]$, *si* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para todo* x *en* $(a, b]$, *y si* $\int_{a+}^{b} g\,d\alpha$ *converge, entonces* $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$ *también converge y tenemos*

$$\int_{a+}^{b} f\,d\alpha \leq \int_{a+}^{b} g\,d\alpha.$$

14—14 Teorema. (*Criterio de comparación por paso al límite*). *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $(a, b]$. *Supongamos que* $f \in R(\alpha; x, b)$ *y que* $g \in R(\alpha; x, b)$ *para todo* x *en* $(a, b]$, *siendo* $f(x) \geq 0$ *y* $g(x) \geq 0$ *si* $a < x \leq b$. *Si*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0,$$

entonces $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$ *y* $\int_{a+}^{b} g\,d\alpha$ *son ambas convergentes o ambas divergentes. Si* $c = 0$, *la convergencia de* $\int_{a+}^{b} g\,d\alpha$ *implica la de* $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$.

14—15 Teorema. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $(a, b]$. *Si* $f \in R(\alpha; x, b)$ *para todo* x *en* $(a, b]$ *y si* $\int_{a+}^{b} |f|\,d\alpha$ *converge, entonces también converge* $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$.

14—16 Definición. *Supongamos que* $\alpha \nearrow$ *en* $(a, b]$ *y que* $f \in R(\alpha; x, b)$ *para todo* x *en* $(a, b]$. *Se dice que la integral* $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$ *es absolutamente convergente si* $\int_{a+}^{b} |f|\,d\alpha$ *converge. Se dice que converge condicionalmente si converge* $\int_{a+}^{b} f\,d\alpha$ *pero diverge* $\int_{a+}^{b} |f|\,d\alpha$.

14-6 Convergencia uniforme de integrales impropias. Supongamos que f es una función real de dos variables definida en un subconjunto de E_2 de la forma $[a, +\infty) \times S$, siendo $S \subset E_1$. Supongamos además que, para cada y en S, la integral $\int_{a}^{\infty} f(x, y)\,d\alpha(x)$ es convergente. Si F representa la función definida por la ecuación

$$9) \qquad F(y) = \int_{a}^{\infty} f(x, y)\,d\alpha(x), \qquad \text{si } y \in S,$$

Se dice que la integral converge *puntualmente* hacia F en S. Se trata de investigar algunas de las propiedades de las funciones F definidas de esta manera.

En el Capítulo 13 estudiábamos las propiedades de las funciones definidas como límites de sucesiones. La cuestión aquí es completamente análoga salvo que ahora hay en realidad *dos* pasos al límite incluidos en la definición del límite de la función F. Ante todo, tenemos que formar la integral $\int_{a}^{b} f(x, y)\,d\alpha(x)$

(esto constituye un paso al límite), y luego tenemos que considerar que $b \to +\infty$. A pesar de esta complicación que se nos ha presentado, existe un fuerte paralelismo entre la teoría de las integrales infinitas y la de las sucesiones. Como en el caso de las sucesiones, el concepto de *convergencia uniforme* desempeña un papel fundamental.

14–17 Definición. *Supongamos que la integral $\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x)$ converge puntualmente hacia F en S. Se dice que la integral converge uniformemente en S si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $B > 0$ (que depende únicamente de ε) tal que $b > B$ implica*

$$\left| F(y) - \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x) \right| < \varepsilon, \qquad \textit{para todo } y \textit{ en } S.$$

Esto se expresa simbólicamente escribiendo

$$\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x) = F(y) \qquad \textit{uniformemente en } S.$$

Nota. El lector debería formular una definición análoga de convergencia uniforme para las integrales impropias de segunda especie. Asimismo podría establecer los análogos de los restantes teoremas de este capítulo refiriéndolos a las integrales impropias de segunda especie.

14–18 Teorema. (*Condición de Cauchy para la convergencia uniforme*). *La integral $\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x)$ converge uniformemente en S si, y únicamente si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $B > 0$ (que depende sólo de ε) tal que $c > b > B$ implica*

$$\left| \int_b^c f(x, y)\, d\alpha(x) \right| < \varepsilon, \qquad \textit{para todo } y \textit{ en } S.$$

Demostración. Es una sencilla consecuencia del Teorema 14-8.

14–19 Teorema (*Criterio M de Weierstrass*). *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, +\infty)$ y que la integral $\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x)$ existe para todo $b \geq a$ y para todo y en S. Si existe una función positiva M definida en $[a, +\infty)$ tal que la integral $\int_a^\infty M(x)\, d\alpha(x)$ converge y que*

$$|f(x, y)| \leq M(x), \qquad \textit{para cada } x \geq a \textit{ y todo } y \textit{ en } S,$$

entonces la integral $\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x)$ converge uniformemente en S.

Demostración. Aplicar la condición de Cauchy en unión de la desigualdad

$$\left|\int_b^c f(x, y)\, d\alpha(x)\right| \le \int_b^c M(x)\, d\alpha(x).$$

EJEMPLO 7. La integral $\int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx$ converge uniformemente en $[c, +\infty)$ para todo $c > 0$. Para verlo, observemos que

$$|e^{-xy} \operatorname{sen} x| \le e^{-cx}, \qquad \text{para todo } y \ge c.$$

Apliquemos ahora el criterio M poniendo $M(x) = e^{-cx}$. Es interesante hacer notar en este ejemplo que el valor de la integral propia $\int_0^b e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx$ puede calcularse con los métodos del cálculo elemental (utilizando la integración por partes dos veces). Cuando $b \to +\infty$, este resultado conduce a la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \text{si } y > 0.$$

14—20 TEOREMA. (*Criterio de Dirichlet para la convergencia uniforme*). *Supongamos que α está acotada en $[a, +\infty)$ y que la integral $\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x)$ existe para todo $b \ge a$ y para todo y en S. Para cada y fijo en S, supongamos que $f(x, y) \le f(x', y)$ si $a \le x' < x < +\infty$. Además, supongamos que existe una función positiva g, definida en $[a, +\infty)$, tal que $g(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$ y que $x \ge a$ implique*

$$|f(x, y)| \le g(x), \qquad \textit{para todo } y \textit{ en } S.$$

En estas condiciones la integral $\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x)$ converge uniformemente en S.

Demostración. Sea $M > 0$ una cota superior para $|\alpha|$ en $[a, +\infty)$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos $B > a$ tal que $x \ge B$ implique $g(x) < \varepsilon/(4M)$. Si $c > b$, la integración por partes origina

.10)
$$\int_b^c f\, d\alpha = f(c, y)\alpha(c) - f(b, y)\alpha(b) + \int_b^c \alpha\, d(-f).$$

Pero, como $-f$ es creciente (para cada y fijo), tenemos

11)
$$\left|\int_b^c \alpha\, d(-f)\right| \le M \int_b^c d(-f) = Mf(b, y) - Mf(c, y).$$

Si ahora $c > b > B$, podemos combinar 10) y 11) para escribir

$$\left| \int_b^c f\, d\alpha \right| \leq 2Mg(b) + 2Mg(c) < \varepsilon$$

para todo y en S. Por consiguiente la condición de Cauchy se satisface e

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, d\alpha(x)$$

converge uniformemente en S.

Ejemplo 8. Tomemos $\alpha(x) = \cos x$ y $f(x, y) = e^{-xy}/x$ si $x > 0$, $y \geq 0$. Si $S = [0, +\infty)$, se satisfacen las hipótesis del Teorema 14-20 con $g(x) = 1/x$ en $[\varepsilon, +\infty)$ para todo $\varepsilon > 0$. Por consiguiente, la integral

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

converge uniformemente en $[0, +\infty)$ si $\varepsilon > 0$. Si convenimos en que sen x/x se sustituya por 1 cuando $x = 0$, también tenemos

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx < \varepsilon,$$

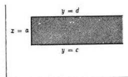
y por lo tanto la integral $\int_0^{\infty} e^{-xy}$ sen $x/x\, dx$ también converge uniformemente en $[0, +\infty)$.

Nota. En lo que sigue tendremos con frecuencia ocasión de considerar integrales que incluyen el cociente sen x/x. Se entenderá que este cociente es sustituido por 1 cuando $x = 0$. Análogamente, un cociente de la forma sen xy/x es reemplazado por y, su límite, cuando $x \to 0$. Con mayor generalidad, si estamos tratando con un integrando que tiene discontinuidades evitables en ciertos puntos aislados dentro de su intervalo de integración, convendremos en que dichas discontinuidades han sido «evitadas» volviendo a definir convenientemente el integrando en esos puntos excepcionales.

14-7 Propiedades de las funciones definidas mediante integrales impropias. En este párrafo consideraremos funciones F definidas en los puntos de un intervalo $[c, d]$ mediante una ecuación del tipo

$$F(y) = \int_a^{\infty} f(x\, y)\, d\alpha(x),$$

donde el integrando f está definido en una banda rectangular de la forma $[a, +\infty) \times [c, d]$. (Ver Fig. 14-1.) Nuestro objetivo será encontrar condiciones a las que f y α deban satisfacer para dotar a F de propiedades tales como continuidad, diferenciabilidad, e integrabilidad.



Fih. 14-1. Una banda rectangular $[a, +\infty) \times [c, d]$.

NOTA. Todos los teoremas de este párrafo y del próximo, tienen análogos inmediatos para las integrales impropias de segunda especie. El lector debería formularse estos resultados por sí mismo.

14—21 TEOREMA. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$ para cada $b \geq a$. Sea f una función continua en la banda rectangular $[a, +\infty) \times [c, d]$ y supongamos que*

$$\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x) = F(y) \qquad \textit{uniformemente en } [c, d].$$

Entonces F es continua en $[c, d]$. Dicho de otro modo, si $y_0 \in [c, d]$, tenemos

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x) = \int_a^\infty \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, d\alpha(x) = \int_a^\infty f(x, y_0)\, d\alpha(x).$$

Demostración. Para cada $n = 1, 2, \ldots,$ definamos

$$F(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\, d\alpha(x), \qquad \text{si } y \in [c, d].$$

Entonces $F_n \to F$ uniformemente en $[c, d]$. Además, cada F_n es continua en $[c, d]$ en virtud del Teorema 9-35. Luego, según el Teorema 13-3, la función límite F también es continua en $[c, d]$.

Una consecuencia importante es el siguiente teorema que se refiere a las integrales impropias de Riemann:

14—22 TEOREMA. *Sea f una función continua en la banda rectangular $[a, +\infty) \times [c, d]$ y supongamos que $g \in R$ en $[a, b]$ para todo $b \geq a$. Si*

$$\int_a^\infty g(x) f(x, y)\, dx = F(y) \qquad \textit{uniformemente en } [c, d],$$

la función F es continua en $[c, d]$.

Demostración. Si $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, entonces α es de variación acotada en todo intervalo finito $[a, b]$ y la integral $\int_a^b g(x)f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y)\,d\alpha(x)$, según el Teorema 9-36.

EJEMPLO 9. Consideremos $F(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x/x\,dx$. El integrando es una función continua en $[0, +\infty) \times [c, d]$ para todo intervalo finito $[c, d]$. Según el Ejemplo 8, la integral converge uniformemente en $[0, +\infty)$. Luego, F es continua en todo intervalo finito de la forma $[0, d]$. En particular, tenemos

12) $$\lim_{y\to 0+} F(y) = F(0) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

14—23 TEOREMA. *Supongamos que $\int_a^\infty f(x, y)\,d\alpha(x)$ converge puntualmente hacia F en (c, d) y que $\int_a^\infty D_2f(x, y)\,d\alpha(x)$ converge uniformemente en (c, d). Consideremos*

$$F_b(y) = \int_a^{a+b} f(x, y)\,d\alpha(x), \qquad \text{si } b \geq 0 \text{ e } y \in (c, d).$$

Supongamos que para cada y en (c, d) exista la derivada $F_b'(y)$ y venga dada por la fórmula

13) $$F_b'(y) = \int_a^{a+b} D_2f(x, y)\,d\alpha(x), \qquad \text{siempre que } b \geq 0.$$

Entonces para cada y en (c, d), existe la derivada $F'(y)$ y tenemos

14) $$F'(y) = \int_a^\infty D_2f(x, y)\,d\alpha(x).$$

Demostración. Para cada $n = 1, 2, \ldots,$ tenemos

$$F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\,d\alpha(x), \qquad \text{si } y \in (c, d).$$

Para cada y en (c, d), la sucesión $\{F_n(y)\}$ converge hacia $F(y)$ y la sucesión de derivadas $\{F_n'\}$ converge uniformemente hacia G en (c, d), siendo

$$G(y) = \int_a^\infty D_2f(x, y)\,d\alpha(x), \qquad \text{si } y \in (c, d).$$

Luego, según el Teorema 13—13, podemos concluir que existe $F'(y)$ y es igual a $G(y)$. De otro modo, que 14) es cierta.

NOTA. La mayor dificultad en la aplicación del Teorema 14-23, radica en verificar que 13) es cierta para todo $b \geq 0$. El teorema que sigue da una condición suficiente para asegurar la validez de 13).

14—24 TEOREMA. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$ para todo $b \geq a$ y supongamos que la integral $\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x)$ converge puntualmente hacia F en $[c, d]$. Si la derivada parcial $D_2 f$ es continua en la banda rectangular $[a, +\infty) \times [c, d]$ y si la integral $\int_a^\infty D_2 f(x, y)\, d\alpha(x)$ converge uniformemente an (c, d), entonces existe $F'(y)$ para cada y en (c, d) y tenemos*

$$F'(y) = \int_a^\infty D_2 f(x, y)\, d\alpha(x).$$

Demostración. Las hipótesis del presente teorema, en unión del Teorema 9-37, implican que 13) es válida. Luego también 14) es válida.

NOTA. En particular, cuando $g \in R(a, b)$ para todo $b \geq a$ y $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, obtenemos

$$F(y) = \int_a^\infty g(x) f(x, y)\, dx \quad \text{y} \quad F'(y) = \int_a^\infty g(x)\, D_2 f(x, y)\, dx,$$

con tal que la primera integral converja puntualmente en $[c, d]$ y la segunda uniformemente en (c, d).

EJEMPLO 10. Consideremos $f(x, y) = e^{-xy}$ sen x/x si $x \neq 0$, $f(0, y) = 1$. Entonces $D_2 f(x, y) = -e^{-xy}$ sen x y, por lo tanto, $D_2 f$ es continua en todo E_2. En el Ejemplo 7 encontrábamos que la integral $\int_0^\infty e^{-xy}$ sen $x\, dx$ converge uniformemente en $[c, +\infty)$ si $c > 0$. Por consiguiente, si escribimos

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx, \qquad \text{siempre que } y > 0,$$

la derivada $F'(y)$ existe para cada $y > 0$ y viene dada por

$$F'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy} \text{sen}\, x\, dx = -\frac{1}{(1 + y^2)}$$

(según el Ejemplo 7). Luego, $F(y) = C - \text{arctg}\, y$ si $y > 0$, siendo C una constante. Para calcular C, tenemos que demostrar que $F(y) \to 0$ cuando $y \to +\infty$. A tal fin aplicamos el teorema de Bonnet (parte II) del teorema 9-34) para escribir

$$\left| \int_{\varepsilon}^{b} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx \right| = \frac{e^{-\varepsilon y}}{\varepsilon} \left| \int_{x_0}^{b} \operatorname{sen} x \, dx \right| \leq \frac{2e^{-\varepsilon y}}{\varepsilon},$$

si $\varepsilon > 0$. Luego, $\int_{\varepsilon}^{b} e^{-xy} \operatorname{sen} x/x \, dx \to 0$ cuando $y \to +\infty$. Puesto que

$$\int_{0}^{\varepsilon} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx \leq \varepsilon,$$

se deduce que $F(y) \to 0$ cuando $y \to +\infty$. En consecuencia, $C = \pi/2$. En otras palabras,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y, \quad \text{si } y > 0.$$

Pero, según la fórmula 12) del Ejemplo 9, podemos considerar que $y \to 0 +$ y obtenemos

15) $$\int^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esta fórmula se necesitará en el Capítulo 15.

14–25 Teorema. *Supongamos que* $\int_a^\infty f(x, y) \, d\alpha(x) = F(y)$ *uniformemente en* $[c, d]$. *Sea* β *una función de variación acotada en* $[c, d]$. *y supongamos que* $F \in R(\beta)$ *en* $[c, d]$. *Si se sabe que la igualdad*

16) $$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, d\alpha(x) \right] d\beta(y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, d\beta(y) \right] d\alpha(x)$$

es válida para cada $b \geq a$, *también tenemos entonces*

17) $$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, y) \, d\alpha(x) \right] d\beta(y) = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x, y) \, d\beta(y) \right] d\alpha(x).$$

Demostración. Supongamos que β es estrictamente creciente en $[c, d]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $B > 0$ (que depende solo de ϵ) tal que $b > B$ implica

$$\left| \int_a^b f(x, y) \, d\alpha(x) - F(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2[\beta(d) - \beta(c)]}, \quad \text{para todo } y \text{ en } [c, d].$$

La integración origina

$$\left| \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, d\alpha(x) \right] d\beta(y) - \int_c^d F(y) \, d\beta(y) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Según 16), podemos escribir esto en la forma siguiente:

$$\left|\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x) - \int_c^d F(y)\, d\beta(y)\right| < \varepsilon.$$

Ya que esto es cierto para todo $b > B$, obtenemos 17) como una consecuencia;

NOTA. La mayor dificultad para aplicar el Teorema 14-25, radica en verificar que 16) es válida para cada $b \geq a$. Los dos teoremas que siguen dan condiciones suficientes para la validez de 16).

14—26 TEOREMA. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$ para todo $b \geq a$ y sea β de variación acotada en $[c, d]$. Si f es continua en la banda rectangular $[a, +\infty) \times [c, d]$ y si $\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x) = F(y)$ uniformemente en $[c, d]$, entonces F es continua en $[c, d]$ y tenemos*

18) $$\int_c^d\left[\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x)\right] d\beta(y) = \int_a^\infty\left[\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x).$$

Demostración. Según el Teorema 14-21, F es continua en $[c, d]$ y por lo tanto $F \in R(\beta)$ en $[c, d]$, en virtud del Teorema 9-26. Asimismo, la igualdad 16) se satisface para cada $b \geq a$ a causa del Teorema 9-39. Por consiguiente también 17) es válida.

NOTA. Si $g \in R$ en $[a, b]$ para todo $b \geq a$ y si $h \in R$ en $[c, d]$, podemos tomar $\alpha(x) = \int_a^x g(u)\, du$ y $\beta(y) = \int_c^y h(v)\, dv$. Entonces la 18) se convierte en

19) $$\int_c^d\left[\int_a^\infty g(x)h(y)f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^\infty\left[\int_c^d g(x)h(y)f(x, y)\, dy\right] dx,$$

con tal que la integral $\int_a^\infty g(x)f(x, y)\, dx$ converja uniformemente en $[c, d]$. En este caso, el teorema nos dice que si f es continua en $[a, +\infty) \times [c, d]$ y si tenemos

20) $$F(y) = \int_a^\infty g(x)f(x, y)\, dx \qquad \text{uniformemente en } [c, d],$$

podemos entonces multiplicar ambos miembros de 20) por $h(y)$ e integrar con respecto a y bajo el signo integral. La cosa importante que aquí hay que observar es que los factores g y h se han supuesto tan solo integrables-Riemann. Esta forma del teorema es especialmente útil en muchas aplicaciones. En particular, es necesaria en la demostración del teorema de la integral de Fourier (Teorema 15-24).

14—27 TEOREMA. *Sea f una función definida en la banda rectangular $[a, +\infty) \times [c, d]$. Si $R = [a, b] \times [c, d]$, supongamos que exista la integral doble*

$$\int_R f(x, y)\, d(x, y)$$

para cada $b > a$. Si la integral $\int_a^\infty f(x, y)\, dx = F(y)$ uniformemente en $[c, d]$ y si existe $\int_c^d F(y)\, dy$, entonces tenemos

$$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Demostración. En virtud de la parte V) del Teorema 10-20, la igualdad 16) es válida para todo $b \geq a$, ya que ambos miembros son iguales a la integral doble $\int_R f(x, y) d(x, y)$. Luego también 17) es válida.

14-8 Integrales impropias reiteradas. Los tres últimos teoremas proporcionan condiciones suficientes para la validez de la igualdad

21) $$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x) \right] d\beta(y) = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x).$$

Nos enfrentamos con un problema mucho más difícil al buscar condiciones bajo las cuales sea legítimo escribir

22) $$\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x) \right] d\beta(y) = \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x).$$

Tales « integrales impropias reiteradas » son análogas a las « series de series ». Aun cuando los dos miembros de 22) sean convergentes, no tienen necesariamente el mismo valor. (Ver Ejercicio 14-14.) En este párrafo daremos algunas condiciones que nos permitan establecer la igualdad de las dos integrales reiteradas de 22).

Para ver qué clase de dificultades surgen cuando intentamos demostrar 22), operemos de una manera puramente formal (no atendiendo, por el momento, a las cuestiones de convergencia) y escribamos

23) $$\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f\, d\alpha \right] d\beta = \lim_{d \to +\infty} \int_c^d \left[\int_a^\infty f\, d\alpha \right] d\beta$$

24) $$= \lim_{d \to +\infty} \int_a^\infty \left[\int_c^d f\, d\beta \right] d\alpha$$

25) $$= \int_a^\infty \left[\lim_{d \to +\infty} \int_c^d f\, d\beta \right] d\alpha$$

$$= \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f\, d\beta \right] d\alpha.$$

Este proceso nos llevará a una legítima demostración de 22) si podemos justificar los pasos que llevan de 23 a 24 y de 24 a 25). Para lograr 24) a partir de 23), necesitamos saber que 21) es válida para todo $d \geq c$. Las condiciones para la validez de 21) pueden obtenerse de los teoremas del párrafo anterior. No obstante, se presenta una nueva dificultad al intentar la justificación del paso que lleva de 24) a 25). El próximo teorema trata este problema.

14—28 TEOREMA. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$ para todo $b \geq a$. Sea f una función definida en el conjunto $[a, +\infty) \times \times [c, +\infty)$, y consideremos*

$$g(x, t) = \int_c^t f(x, y)\, d\beta(y), \qquad si\ x \geq a \quad y \quad t \geq c.$$

Supongamos que

a) $\int_a^\infty g(x, t) d\alpha(x)$ *converge uniformemente en* $[c, +\infty)$,

b) $\int_c^\infty f(x, y) d\beta(y)$ *converge uniformemente en* $[a, +\infty)$,

c) $\int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x, y) d\beta(y)\right] d\alpha(x)$ *converge.*

Entonces tenemos

26)
$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^\infty g(x, t)\, d\alpha(x) = \int_a^\infty \left[\lim_{t\to+\infty} g(x, t)\right] d\alpha(x)$$

o, lo que es lo mismo,

27)
$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^\infty \left[\int_c^t f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x) = \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x).$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir B (dependiente solo de ε) de manera que

28)
$$\left|\int_a^B g(x, t)\, d\alpha(x) - \int_a^\infty g(x, t)\, d\alpha(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

para todo t en $[c, +\infty)$ [en virtud de a)], y también de modo que

29)
$$\left|\int_a^B \left[\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x) - \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

La desigualdad 29) se deduce de c). Además, podemos suponer que α es estrictamente creciente en el intervalo $[a, B]$. Entonces, para este mismo ε, podemos elegir T (dependiente solo de ε) de modo que $t \geq T$ implique

30) $$\left| g(x, t) - \int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y) \right| < \frac{\varepsilon}{4[\alpha(B) - \alpha(a)]},$$

para todo x en $[a, +\infty)$ [en virtud de b)]. La integración en 30) produce

31) $$\left| \int_a^B g(x, t)\, d\alpha(x) - \int_a^B \left[\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando 31), 29) y 28), encontramos que $t \geq T$ implica

$$\left| \int_a^\infty g(x, t)\, d\alpha(x) - \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x) \right| < \varepsilon.$$

O sea que 26) es válida.

Combinando los resultados del Teorema 14-28 con los de los Teoremas 14-25, 14-26, y 14-27, podemos obtener varias condiciones suficientes para la validez de 22). Por ejemplo, de los Teoremas 14-28 y 14-26, resulta

14—29 TEOREMA. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$ para todo $b \geq a$ y que β es de variación acotada en $[c, d]$ para todo $d \geq c$. Sea f continua en $[a, +\infty) \times [c, +\infty)$ y definamos* .

$$g(x, t) = \int_c^t f(x, y)\, d\beta(y), \qquad \text{si } x \geq a \text{ y } t \geq c.$$

Supongamos que

a) $\int_a^\infty f(x, y)\, d\alpha(x)$ *converge uniformemente en* $[c, +\infty)$,

b) $\int_a^\infty g(x, t)\, d\alpha(x)$ *converge uniformemente en* $[c, +\infty)$,

c) $\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y)$ *converge uniformemente en* $[a, +\infty)$,

d) $\int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x, y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x)$ *converge.*

Entonces tenemos

32) $$\int_c^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x, y)\, d\alpha(x)\right] d\beta(y) = \int_a^{\infty}\left[\int_c^{\infty} f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x).$$

Demostración. Utilizando b), c), d) y al propio tiempo el Teorema 14-28, tenemos

33) $$\int_a^{\infty}\left[\int_c^{\infty} f\, d\beta\right] d\alpha = \int_a^{\infty}\left[\lim_{t\to+\infty} g(x, t)\right] d\alpha(x) = \lim_{t\to+\infty}\int_a^{\infty}\left[\int_c^{t} f\, d\beta\right] d\alpha.$$

En virtud de a) y del Teorema 14-26, tenemos $\int_a^{\infty}[\int_c^t f\, d\beta]\, d\alpha = \int_c^t[\int_a^{\infty} f\, d\alpha]\, d\beta$. Luego 32) se deduce de 33).

Puede obtenerse otro teorema de este tipo mediante una clase de razonamiento enteramente distinto.

14—30 TEOREMA. *Supongamos que $\alpha\nearrow$ en $[a, +\infty)$, que $\beta\nearrow$ en $[c, +\infty)$, y sea f una función no negativa definida en $[a, +\infty)\times[c, +\infty)$. Supongamos válidas las dos igualdades siguientes:*

34) $$\int_c^{d}\left[\int_a^{\infty} f(x, y)\, d\alpha(x)\right] d\beta(y) = \int_a^{\infty}\left[\int_c^{d} f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x), \quad \textit{para todo } d \geq c,$$

35) $$\int_a^{b}\left[\int_c^{\infty} f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x) = \int_c^{\infty}\left[\int_a^{b} f(x, y)\, d\alpha(x)\right] d\beta(y), \quad \textit{para todo } b \geq a.$$

Entonces, siempre que una de las integrales reiteradas de 36) converge, también converge la otra y tenemos

36) $$\int_c^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x, y)\, d\alpha(x)\right] d\beta(y) = \int_a^{\infty}\left[\int_c^{\infty} f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x).$$

Demostración. Supongamos que la integral $I = \int_c^{\infty}[\int_a^{\infty} f\, d\alpha]\, d\beta$ converge. Ya que f es no negativa y α es creciente, tenemos

37) $$\int_a^{b} f(x, y)\, d\alpha(x) \leq \int_a^{\infty} f(x, y)\, d\alpha(x), \quad \text{para todo } b \geq a.$$

Puesto que β es creciente, 37) implica $\int_c^{\infty}[\int_a^b f\, d\alpha]\, d\beta \leq I$, que, según 35), establece que $\int_a^b[\int_c^{\infty} f\, d\beta]\, d\alpha \leq I$. En virtud del Teorema 14-2, esto significa que $\int_a^{\infty}[\int_c^{\infty} f\, d\beta]\, d\alpha$ converge y tiene un valor $\leq I$. Un razonamiento análogo, utilizando 34) en lugar de 35) origina la desigualdad opuesta. Luego la 36) es válida.

NOTA. Podemos omitir la hipótesis de que f es no negativa si, en su lugar, suponemos que por lo menos uno de los miembros de 36) es convergente cuando se reemplaza f por $|f|$. Cuando se establece en esta forma, el Teorema 14-30 también es válido para funciones *complejas*. La demostración (para funciones f reales o complejas) puede reducirse al caso ya tratado. Cuando f es real, consideramos las funciones $f_1 = |f| + f$ y $f_2 = |f| - f$ ambas no negativas. Si una de las integrales de 36) converge cuando f se reemplaza por $|f|$, entonces también converge cuando f se reemplaza por f_1 o por f_2. Además, la validez de 36) para f_1 y f_2 implica su validez para f, ya que $2f = f_1 - f_2$. Cuando f es compleja, $f = u + iv$, introducimos

$$u_1 = |u| + u, \quad u_2 = |u| - u, \quad v_1 = |v| + v, \quad v_2 = |v| - v$$

(cada una es no negativa) y razonamos como antes con las partes reales e imaginarias separadamente.

14-9 Integración de series cuando se consideran integrales impropias. En el Teorema 13-11 establecimos la validez de la igualdad

38) $$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, d\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x)$$

bajo las hipótesis siguientes:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$.

b) Cada $f_n \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, siendo α de variación acotada en $[a, b]$.

Cuando pretendemos extender la igualdad 38) a las integrales impropias, nos enfrentamos esencialmente con las mismas dificultades que han sido discutidas en el párrafo anterior. En realidad, expresando la serie $\sum f_n(x)$ como una integral infinita de Riemann-Stieltjes, podemos reducir el problema al considerado en el párrafo anterior. En la práctica, sin embargo, el sencillo teorema que sigue basta de ordinario para justificar la integración término a término de una serie cuando se consideran integrales impropias.

14–31 TEOREMA. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, +\infty)$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $[a, +\infty)$ tales que $f_n(x) \geq 0$ para cada $x \geq a$ y cada $n = 1, 2, \ldots$ Si la igualdad 38) es válida para cada $b \geq a$, entonces también tenemos*

39) $$\int_a^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, d\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} f_n(x)\, d\alpha(x),$$

Con tal de que uno de los miembros de 39) sea convergente.

Demostración. Razonar como en la demostración del Teorema 14-30.

NOTA. Podemos omitir la hipótesis $f_n(x) \geq 0$ si, en su lugar, suponemos que por lo menos uno de los miembros de 39) es convergente cuando $f_n(x)$ se reemplaza por $|f_n(x)|$. Establecido en esta forma, el Teorema 14-31 es válido también para funciones complejas. (Ver la Nota que sigue al Teorema 14-30). Naturalmente, es válido un resultado parecido para las integrales impropias de segunda especie.

EJEMPLO 11. Para cada $s > 1$ fijo y cada $a > 0$ fijo, tenemos

$$x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \qquad \text{(uniformemente en } [a, b]),$$

para cada $b > a$. Luego, si $0 < a < b$, podemos aplicar el Teorema 13-11 y escribir

$$\int_a^b \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx = \int_a^b x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b x^{s-1} e^{-nx}\,dx.$$

Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx}\,dx$ converge, ya que su término general es

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx}\,dx = n^{-s} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\,dt = n^{-s}\Gamma(s),$$

donde Γ representa la función Gamma (ver Ejemplo 6). Por lo tanto todas las hipótesis del Teorema 14-31 (y su análogo para las integrales impropias de segunda especie) se satisfacen y obtenemos

$$\text{40)} \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx}\,dx = \zeta(s)\Gamma(s),$$

donde ζ representa la función ζ de Riemann. La fórmula 40) es de capital importancia en la teoría de la función ζ.

EJERCICIOS

14-1. Demostrar que son convergentes las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x (\log x)^p}\,dx \ (p > 1)$, b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q}\,dx \quad (p > 0, q > 0,)$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\,dx$, d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$.

14-2. Si f es positiva y decreciente en $[a, +\infty)$ y si la integral $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, demostrar que $xf(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$ y que $\int_a^\infty x\,df(x)$ converge.

14-3. Demostrar la convergencia de las integrales impropias siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \log x}{(1+x)^2}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p - 1}{\log x}\,dx \quad (p > -1),$

c) $\displaystyle\int_0^1 \log x \log(1+x)\,dx,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{(1-x)^{1/2}}\,dx.$

14-4. Supongamos que f es continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$, y que existe $f'(0)$. Demostrar que la integral $\int_0^1 f(x)x^{-3/2}\,dx$ converge.

14-5. Averiguar si son o no convergentes las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(t^2+t^{-2})}\,dt,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x(x^2-1)^{1/2}}\,dx,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx,$

e) $\displaystyle\int_0^1 \log x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx,$ f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \log(\cos^2 x)\,dx,$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx,$ h) $\displaystyle\int_0^\infty \left\{\frac{5e^{-x}}{x} + \frac{x+2}{x^2}(e^{-3x} - e^{-x/2})\right\}dx.$

14-6. Determinar los valores de p y q para los cuales convergen las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x^2)^q\,dx,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^x e^{-x^p}\,dx,$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x}\,dx,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^p)}{x^q}\,dx,$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx,$ f) $\displaystyle\int_\pi^\infty (\log x)^p\,(\operatorname{sen} x)^{-1/3}\,dx.$

14-7. Deducir las siguientes igualdades (m y n representan enteros positivos):

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^{2n+1} x}{x}\,dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2},$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^{n+1}}\,dx = n^{-2},$

c) $\displaystyle\int_0^\infty x^n(1+x)^{-n-m-1}\,dx = \frac{n!(m-1)!}{(m+n)!}.$

14-8. Demostrar que las integrales a) y c) son convergentes pero que divergen las b) y d).

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^8 \operatorname{sen}^2 x}\, dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^8 \sin^2 x}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \operatorname{sen}^2 x},$ d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 \operatorname{sen}^2 x}.$

[*Indicación*: Obtener cotas superiores e inferiores para las integrales en entornos convenientemente elegidos de los puntos $n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.]

14-9. Construir un ejemplo de una integral propia de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

en la que α sea de variación acotada en $[a, b]$ pero tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, d\alpha(x) \neq \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

14-10. Suponiendo que $f \in R$ en $[0, 1]$, que f es periódica con período igual a 1 y que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$, demostrar que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x) x^{-s}\, dx$ converge si $s > 0$. [*Indicación*: Introducir $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ y escribir $\int_1^b f(x) x^{-s}\, dx = \int_1^b x^{-s}\, dg(x)$.]

14-11. Determinar el conjunto S de los valores de y en los cuales cada una de las siguientes integrales converge uniformemente:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{1 + x^2}\, dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} (x^2 + y^2)^{-1}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 xy}{x^2}\, dx,$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy\, dx.$

14-12. Consideremos $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy\, dx$ si $y \in E_1$. Demostrar que F satisface la ecuación diferencial $F'(y) + 2yF(y) = 0$ y deducir que $F(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-y^2}$. (Usar el resultado $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, deducido en el Ejercicio 9-17).

14-13. Consideremos $F(y) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} xy / x(x^2 + 1)\, dx$ si $y > 0$. Demostrar que F satisface la ecuación diferencial $F''(y) - F(y) + \pi/2 = 0$ y deducir que $F(y) = \frac{1}{2}\pi(1 - e^{-y})$. Utilizar este resultado para deducir las siguientes igualdades, válidas para $y > 0$ y $a > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} xy}{x(x^2 + a^2)}\, dx = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-ay}), \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi e^{-ay}}{2a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xy}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ay}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

14-14. Demostrar que $\int_1^{\infty} [\int_1^{\infty} f(x, y)\, dx]\, dy \neq \int_1^{\infty} [\int_1^{\infty} f(x, y)\, dy]\, dx$ si

a) $\displaystyle f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3},$ b) $\displaystyle f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$

14-15. Demostrar que el orden de integración no puede ser invertido en las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dx \right] dy,$ b) $\int_0^1 \left[\int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy}) \, dy \right] dx.$

14-16. Consideremos $f(x, y) = \int_0^\infty dt/[(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)]$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Demostrar (con los métodos del cálculo elemental) que $f(x, y) = \frac{1}{2}\pi(x + y)^{-1}$. Calcular la integral reiterada $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) \, dx] \, dy$ para deducir la fórmula:

$$\int_0^\infty \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x^2} \, dx = \pi \log 2.$$

14-17. Consideremos $f(y) = \int_0^\infty \operatorname{sen} x \cos xy/x \, dx$ si $y \geq 0$. Demostrar (con los métodos del cálculo elemental) que $f(y) = \pi/2$ si $0 \leq y < 1$ y que $f(y) = 0$ si $y > 1$.

Calcular la integral $\int_0^a f(y) \, dy$ para deducir la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} x}{x^2} \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi a}{2}, & \text{si } 0 \leq a \leq 1, \\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } a \geq 1. \end{cases}$$

14-18. a) Utilizar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, y la fórmula $\int_0^\infty \operatorname{sen} x/x \, dx = \pi/2$, para calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

b) Utilizar la integración por partes en a) para deducir la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

c) Utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y al propio tiempo b), para obtener

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

d) Utilizar el resultado de c) para obtener

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \, dx = \frac{\pi}{3}.$$

14-19. Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$ para todo $b > a > 0$. Definamos g mediante la ecuación $xg(x) = \int_1^x f(t) \, dt$ si $x > 0$, supongamos que el límite $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ exista y representémoslo por B. Si a y b son números positivos fijos, probar que

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{x} \, dx = g(b) - g(a) + \int_a^b \frac{g(x)}{x} \, dx.$

b) $\displaystyle\lim_{T \to +\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} \, dx = B \log \frac{b}{a}.$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = B \log \frac{a}{b} + \int_a^b \frac{f(t)}{t} \, dt.$

d) Supongamos que existe el límite $\lim_{x\to 0+} x\int_x^1 f(t)t^{-2}\,dt$, y representémoslo por A. Demostrar que

$$\int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = A\log\frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

e) Combinar c) y d) para deducir

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (B-A)\log\frac{a}{b}$$

y utilizar este resultado para calcular las siguientes integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx.$$

14-20. Si $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$, demostrar que

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n(x)\,dx \neq \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\,dx.$$

14-21. Establecer y probar un teorema parecido al Teorema 14-31 para integrales impropias de segunda especie.

14-22. Justificar las siguientes igualdades:

a) $$\int_0^1 \log\frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_0^1 x^n\,dx = 1.$$

b) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x}\log\left(\frac{1}{x}\right)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+p)^2} \quad (p > 0).$$

14-23. a) Si $s > 0$ y $a > 0$, demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_a^\infty \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{x^s}\,dx$$

converge y probar que

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_a^\infty \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{x^s}\,dx = 0.$$

b) Consideremos $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \operatorname{sen}(2n\pi x)/n$. Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^s}\,dx = (2\pi)^{s-1}\zeta(2-s)\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t^s}\,dt, \qquad \text{si } 0 < s < 1,$$

donde ζ representa la función ζ de Riemann.

14-24. a) Deducir la siguiente fórmula de la derivada n-ésima de la función Gamma:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n\,dt \qquad (x > 0).$$

b) Cuando $x = 1$, demostrar que ésta puede escribirse así:

$$\Gamma^{(n)}(1) = \int_0^1 (t^2 + (-1)^n e^{t-1/t}) e^{-t} t^{-2} (\log t)^n \, dt.$$

c) Utilizar b) para demostrar que $\Gamma^{(n)}(1)$ tiene el mismo signo que $(-1)^n$.

NOTA. En los Ejercicios 14-25 y 14-26, se supone que existe y es finito el límite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Su valor se representa por $f(\infty)$.

14-25. Supongamos que f es de variación acotada en $[0, b]$ para todo $b > 0$. Demostrar que

$$\lim_{y\to 0+} y \int_0^\infty e^{-xy} f(x)\, dx = f(\infty).$$

[*Indicación*: Usar la integración por partes].

14-26. Deducir el resultado del Ejercicio 14-25 con la hipótesis más débil de que $f \in R$ en $[0, b]$ para todo $b > 0$. *Indicación*: Considerar $F(y) = y\int_0^\infty e^{-xy} f(x)\, dx$ y escribir

$$|F(y) - f(\infty)| \le y \int_0^B e^{-xy} |f(x) - f(\infty)|\, dx + y \int_B^\infty e^{-xy} |f(x) - f(\infty)|\, dx.$$

14-27. Supongamos que f es de variación acotada en $[0, 1]$. Demostrar que

$$\lim_{y\to 0+} y \int_0^1 x^{y-1} f(x)\, dx = f(0+).$$

14-28. Deducir el resultado del Ejercicio 14-27 en la hipótesis más débil de que $f \in R$ en $[0, 1]$ y que existe el límite $f(0+)$.

14-29. Demostrar el teorema siguiente (*teorema de Tannery*) ; *Dada una sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *y una sucesión de números reales* $\{p_n\}$ *de modo que:*

a) $f_n \to f$ *uniformemente en* $[a, b]$ *para todo* $b \ge a$,

b) $f_n \in R$ *en* $[a, b]$ *para todo* $b \ge a$,

c) $p_n \to +\infty$ *cuando* $n \to \infty$,

d) $|f_n(x)| \le g(x)$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots$ *y todo* $x \ge a$, *siendo* g *tal que la integral* $\int_a^\infty g(x)\, dx$ *converge*.

Entonces la integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *converge absolutamente y tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{p_n} f_n(x)\, dx = \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

14-30. Utilizar el resultado del Ejercicio 14-29 para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^p\, dx, \qquad \text{si } p > -1.$$

En los Ejercicios 14-31 y 14-32, Γ representa la función Gamma.

14-31. Demostrar que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ si $x > 0$ y que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Deducir que $\Gamma(n + 1) = n!$ y que $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (2n)!\sqrt{\pi}/4^n n!$ si $n = 0, 1, 2, \ldots$.

14-32. a) Demostrar que para $x > 0$ tenemos el desarrollo en serie

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n + x} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

siendo $c_n = (1/n!)\int_1^\infty t^{-1}e^{-t}(\log t)^n \, dt$. [*Indicación*: Escribir $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ y utilizar un desarrollo en serie de potencias adecuado en cada integral].

b) Demostrar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ converge para todo complejo z y que la serie $\sum_{n=0}^\infty [(-1)^n/n!]/(n + z)$ converge para todo complejo $z \neq 0, -1, -2, \ldots$.

14-33. Demostrar el *teorema de convergencia de Lebesgue para integrales impropias*: *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tales que cada integral impropia $\int_a^\infty f_n(x)\,dx$ converja. Supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente en $[a, +\infty)$ hacia una función f para la que la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge. Supongamos que existe una función no negativa g tal que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge y que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para cada $x \geq a$ y cada $n = 1, 2, \ldots$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\,dx = \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

[*Indicación*: Usar el Teorema 13-17].

CAPÍTULO 15

SERIES DE FOURIER E INTEGRALES DE FOURIER

15-1 Introducción. En 1807, FOURIER sorprendió a algunos de sus contemporáneos afirmando que una función « arbitraria » podía expresarse como una combinación lineal de senos y cosenos. Tales combinaciones lineales, llamadas ahora *series de Fourier*, han llegado a ser un instrumento indispensable en el análisis de ciertos fenómenos periódicos (tales como vibraciones, movimientos ondulatorios y planetarios) que son estudiados en física e ingeniería. Muchos problemas importantes de naturaleza puramente matemática que se han presentado en conexión con la teoría de las series de Fourier han sido objeto de un estudio intensivo por parte de un gran número de matemáticos famosos, y es un hecho histórico notable que el desarrollo del moderno análisis matemático ha sido, en gran parte, profundamente influenciado por la búsqueda de las soluciones a tales problemas. Para encontrar una breve pero excelente exposición histórica del tema de las series de Fourier y de su impacto en el desarrollo de las matemáticas puede verse Ref. 15-1.

15-2 Sistemas de funciones ortogonales. En la actualidad las series de Fourier constituyen una parte de una disciplina mucho más general conocida con el nombre de *teoría de los desarrollos ortogonales*. Ciertos aspectos de esta teoría tienen una semejanza notable con algunos de los resultados del análisis vectorial. Por ejemplo, el problema de expresar un vector arbitrario en un espacio n-dimensional como una combinación lineal de vectores base, tiene su contrapartida en la teoría de los desarrollos ortogonales, donde se precisa expresar una función más o menos « arbitraria » como una combinación lineal de individuos de alguna colección especial de funciones. Muchos de los medios utilizados en el estudio de los vectores tienen sus análogos en la teoría de los desarrollos ortogonales. El más importante de éstos es el *producto interior* de dos funciones (análogo al producto interior de dos vectores).

15—1 DEFINICIÓN. *Si f y g son funciones reales, ambas integrables-Riemann en $[a, b]$, la integral*

1) $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

se llama el producto interior de f y g, representado por (f, g). El número no negativo $(f, f)^{1/2}$, representado por $\|f\|$, se llama la norma de f.

NOTA. La integral 1) se parece a la suma $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ que define el producto interior de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Los valores de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en 1) desempeñan el papel de los componentes x_k e y_k, y la integración reemplaza a la suma. La norma de f es análoga a la longitud o módulo de un vector.

De 1) se deduce inmediatamente que el producto interior goza de las propiedades siguientes:

2) $$(f, g) = (g, f), \qquad (cf, g) = (f, cg) = c(f, g) \qquad (c = \text{constante}),$$

3) $$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g), \qquad (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2).$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver Ejercicio 9-13) toma la forma

4) $$|(f, g)| \leq \|f\| \, \|g\|.$$

Utilizando 4), es cosa fácil deducir la *desigualdad de Minkowski*:

5) $$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

(Ver Ejercicio 15-1). Esta, naturalmente, es análoga a la «desigualdad triangular» para los vectores. También tenemos la relación

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2(f, g).$$

Por consiguiente la ecuación $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ es equivalente a esta otra $(f, g) = 0$. Las funciones f y g que satisfacen $(f, g) = 0$ se llaman *ortogonales* (por analogía con el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos). El concepto de ortogonalidad es básico en esta teoría y se introduce para conjuntos infinitos de funciones como sigue:

15—2 DEFINICIÓN. *Sea $S = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ un conjunto de funciones, cada una de las cuales es integrable-Riemann en $[a, b]$. Si*

$$(\phi_n, \phi_m) = 0, \qquad \textit{siempre que } m \neq n,$$

se dice que el conjunto S es un sistema ortogonal en $[a, b]$. Si, además, cada ϕ_n tiene norma igual a 1, entonces se dice que S es ortonormal en $[a, b]$.

NOTA. Todo sistema ortogonal para el cual cada $\|\phi_n\| \neq 0$ puede convertirse en un sistema ortonormal dividiendo cada ϕ_n por su norma.

Nos ocuparemos particularmente del sistema especial trigonométrico $S = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ para el cual

6) $$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_{2n}(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Fácilmente se comprueba que S es ortonormal en el intervalo $[0, 2\pi]$ (o en cualquier otro intervalo de longitud 2π). (Ver Ejercicio 15-2).

NOTA. También puede extenderse la noción de un producto interior a las funciones *complejas* definidas e integrables-Riemann en un intervalo $[a, b]$. En este caso, (f, g) se define por la ecuación

7) $$(f, g) = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx,$$

donde $\overline{g(x)}$ representa la conjugada compleja de $g(x)$. La conjugada compleja se introduce con objeto de que el producto de f por sí misma sea una cantidad no negativa, es decir, $(f, f) = \int_a^b |f(x)|^2\, dx$. La norma de f es, como antes, $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Las igualdades 3) son aún ahora válidas pero las de 2) deben modificarse escribiendo

8) $$(f, g) = \overline{(g, f)}, \qquad (cf, g) = c(f, g), \qquad (f, cg) = \bar{c}(f, g),$$

donde ahora, como es natural, c puede ser una constante compleja. Las definiciones de sistemas ortogonal y ortonormal no se modifican. Probablemente, el ejemplo más importante de un sistema ortonormal de funciones complejas es la sucesión $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ dada por

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\cos nx + i \operatorname{sen} nx}{\sqrt{2\pi}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), [a, b] = [0, 2\pi].$$

La independencia lineal para funciones puede introducirse como en el caso de los vectores. Se dice que un conjunto de funciones $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m\}$ es *linealmente dependiente* en $[a, b]$ siempre que existen unas constantes $c_0, c_1, \dots, c_m$ (no todas nulas) tales que

9) $$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_m\phi_m(x) = 0, \qquad \text{para todo } x \text{ en } [a, b].$$

Si no es así, el conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m\}$ se llama *linealmente independiente* en $[a, b]$. Un conjunto infinito $\{\phi_2, \phi_1, \dots\}$ se llama linealmente independiente en $[a, b]$ si todo subconjunto finito es linealmente independiente en $[a, b]$. Es fácil ver que todo sistema ortonormal es linealmente independiente. Efectivamente, si es válida una ecuación como la 9), podemos multiplicar por $\overline{\phi_k(x)}$ e integrar entre a y b para obtener $c_k = 0$ para cada $k = 0, 1, 2, \dots, m$.

Esta analogía con los vectores hace pensar en la posibilidad de expresar una función « arbitraria » f como una combinación lineal de elementos de un conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$. Un tal « desarrollo » debería ser de la forma

10) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x),$$

válida para cada x en $[a, b]$. En realidad, aquí hay involucrados dos tipos de problemas. Primero, hemos de buscar condiciones, que impuestas a f y al

conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$, garanticen la efectiva existencia de un desarrollo como el 10). Segundo, suponiendo que *existe* el desarrollo, hay que encontrar un método para determinar los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ El segundo problema se tratará en primer lugar.

Operemos con 10) de una manera puramente formal, prescindiendo de momento de las cuestiones de convergencia. Si multiplicamos ambos miembros de 10) por $\overline{\phi_k(x)}$ e integramos la serie resultante término a término entre a y b, obtenemos

11) $$(f, \phi_k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\phi_n, \phi_k) = c_k.$$

Así pues, si podemos justificar estas operaciones formales, encontramos que el k-ésimo coeficiente en 10) no es otra cosa que el producto interior (f, ϕ_k). En el teorema que sigue se da una condición suficiente para la validez de esos pasos.

15—3 TEOREMA. *Sea* $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ *un sistema ortonormal en* $[a, b]$. *Supongamos que la serie*

12) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

converge uniformemente en $[a, b]$ *y designemos con* $f(x)$ *la suma de esa serie. Entonces la función* f *así definida es integrable-Riemann en* $[a, b]$ *y el coeficiente* n-*ésimo* c_n *viene dado por*

13) $$c_n = (f, \phi_n) = \int_a^b f(x)\,\overline{\phi_n(x)}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demostración. La convergencia uniforme implica la integrabilidad-Riemann de f y justifica los pasos operativos formales que llevan a 11). (Ver Teorema 13-22.)

Supongamos ahora que disponemos de una función f integrable-Riemann definida en $[a, b]$ y de un conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ortonormal en $[a, b]$. En tal caso siempre podemos definir los números $c_0, c_1, c_2, \ldots$ por medio de 13) y tiene sentido construir la serie 12). Surgen ahora dos preguntas : ¿Converge esta serie puntualmente en $[a, b]$? Si 12) converge para un x fijo ¿$f(x)$ es su suma? En general, la respuesta a esas preguntas es « No ». Para contestarlas en sentido afirmativo, es necesario imponer otras restricciones a la función f y al conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$. Más adelante ofreceremos una discusión detallada de esos problemas para el sistema trigonométrico particular descrito en 6). Por el momento nos ocuparemos de las propiedades de los números definidos por 13).

15-3 Serie de Fourier de una función relativa a un sistema ortonormal.

15—4 Definición. *Sea $S = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ortonormal en $[a, b]$ y supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. La notación*

14) $$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

significará que los números $c_0, c_1, c_2, \ldots$ están dados por las fórmulas siguientes:

15) $$c_n = (f, \phi_n) = \int_a^b f(x)\,\overline{\phi_n(x)}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La serie 14) se llama la serie de Fourier de f relativa al sistema S y los números $c_0, c_1, c_2, \ldots$ se llaman los coeficientes de Fourier de f relativos a S.

Nota. Cuando S es el conjunto ortonormal particular de funciones trigonométricas descrito en 6), la serie se llama simplemente la *serie de Fourier generada por f*. En este caso, escribimos 14) en la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

siendo los coeficientes los números dados por las siguientes fórmulas:

16) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt.$$

15-4 Aproximación media cuadrática. El Teorema 15-3 proporciona una cierta justificación para considerar la serie cuyos coeficientes vienen dados por 15). El siguiente teorema nos brinda aún otra justificación:

15—5 Teorema. *Sea $S = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ortonormal en $[a, b]$, supongamos que*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x).$$

Designemos por $s_n(x)$ la suma parcial

17) $$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\phi_k(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si $b_0, b_1, b_2, \ldots$, son números complejos arbitrarios, consideremos

18) $$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\phi_k(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Entonces tenemos la identidad siguiente:

19) $$\int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |c_k - b_k|^2,$$

de la cual se obtiene la desigualdad

20) $$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2\,dx \le \int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2\,dx.$$

NOTA. Cada combinación lineal t_n puede considerarse como una «aproximación» de f. La integral $\int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2\,dx = \|f - t_n\|^2$ mide el «error medio cuadrático» de esa aproximación. La desigualdad 20) establece que, entre todas las combinaciones lineales t_n posibles, la suma parcial s_n de la serie de Fourier de f da origen a la «mejor» aproximación de f (en el sentido de que el error medio cuadrático es menor).

Demostración. Es evidente que 19) implica 20) a causa de que el segundo miembro de 19) tiene su valor mínimo cuando $b_k = c_k$ para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Para demostrar 19), escribamos

$$\int_a^b |f - t_n|^2\,dx = (f - t_n, f - t_n)$$
$$= (f, f) - (f, t_n) - (t_n, f) + (t_n, t_n).$$

Utilizando 3) y 8), encontramos

$$(t_n, t_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\phi_k, \sum_{m=0}^{n} b_m\phi_m\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} b_k\bar{b}_m(\phi_k, \phi_m) = \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2$$

y

$$(f, t_n) = \left(f, \sum_{k=0}^{n} b_k\phi_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k(f, \phi_k) = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k.$$

También, $(t_n, f) = \overline{(f, t_n)} = \sum_{k=0}^{n} b_k\bar{c}_k$, y por lo tanto

$$\int_a^b |f - t_n|^2\,dx = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 - \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\bar{c}_k$$
$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |b_k - c_k|^2.$$

15—6 TEOREMA. *Sea* $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ *ortonormal en* $[a, b]$, *supongamos que* $f \in R$ *en* $[a, b]$, *y que*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x).$$

Entonces

a) *La serie* $\sum|c_n|^2$ *converge y satisface la desigualdad*

21) $$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \quad \textit{(desigualdad de Bessel)}.$$

b) *La igualdad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \quad \textit{(fórmula de Parseval)}$$

es válida si, y únicamente si, también se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0,$$

donde $\{s_n\}$ *es la sucesión de sumas parciales definidas en* 17).

Demostración. Haciendo $b_k = c_k$ en 19) y observando que el primer miembro es no negativo, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx.$$

Esto establece a). Para demostrar b), ponemos otra vez $b_k = c_k$ en 19), para obtener

$$\|f - s_n\|^2 = \int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2.$$

De esta igualdad resulta inmediatamente la parte b).

NOTA. La igualdad $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$ equivale a establecer que

$$\operatorname*{l.e.m.}_{n\to\infty} s_n = f \quad \text{en } [a, b].$$

(Ver Definición 13-18). La parte b) del Teorema 15-6 nos dice que la fórmula de Parseval es válida si la sucesión $\{s_n\}$ *converge en media* hacia f en $[a, b]$,

y recíprocamente. Como cosa interesante, podemos observar que la fórmula de Parseval puede escribirse en la forma

$$\|f\|^2 = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots,$$

que es análoga a la fórmula vectorial $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x^2$.

15—7 DEFINICIÓN. *Sea S un conjunto de funciones integrables-Riemann definidas en $[a, b]$. Sea $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ortonormal en $[a, b]$, supongamos que*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

y consideremos

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se dice que el conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ es completo para S si, para toda f en S, tenemos $\|s_n - f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Así pues, para un sistema ortonormal *completo* la fórmula de Parseval es válida para toda f en S. Demostraremos luego (Teorema 15-22) que el sistema trigonométrico 6) es completo para el conjunto S de todas las funciones que son continuas en $[0, 2\pi]$.

Como una nueva consecuencia de la parte a) del Teorema 15-6, observamos que los coeficientes de Fourier c_n de f relativos a cualquier sistema ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ deben tender hacia 0 cuando $n \to \infty$ (ya que $\sum |c_n|^2$ converge). En particular, cuando $\phi_n(x) = e^{inx}$, encontramos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = 0,$$

de la que obtenemos las importantes fórmulas:

22) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

15-5 Series trigonométricas de Fourier. Al llegar aquí abandonamos el estudio de los sistemas ortonormales en general y fijamos nuestra atención en el sistema trigonométrico particular descrito en 6). Desde el tiempo de FOURIER, han sido publicados en la literatura matemática gran cantidad de artículos referentes a las series trigonométricas de Fourier. El objetivo de gran parte de la investigación ha consistido en encontrar condiciones suficientes a las que una función integrable f debe satisfacer para que su serie de Fourier

converja, bien en todo el intervalo $[0, 2\pi]$ bien en ciertos puntos del mismo. Resulta que la convergencia o divergencia de la serie en un punto determinado depende en realidad del comportamiento de la función en un entorno arbitrariamente pequeño del punto. (Ver Teorema 15-17).

Los esfuerzos de FOURIER y DIRICHLET a principios del siglo XIX, seguidos por las contribuciones de RIEMANN, LIPSCHITZ, HEINE, CANTOR, DU BOIS-REYMOND, DINI, JORDAN, y DE LA VALLÉ-POUSSIN a fines de siglo, han desembocado en el descubrimiento de condiciones suficientes de amplio alcance para establecer la convergencia de las series, bien en puntos particuales, o bien en todo el intervalo. Todavía no han sido obtenidas condiciones *necesarias y suficientes* útiles para la convergencia de las series en cualquier punto del intervalo. A la vista de los resultados que hoy en día se conocen, parece poco probable que existan tales condiciones.

Después del descubrimiento de LEBESGUE, en 1902, de su teoría general de la medida y de la integración, el campo de la investigación fue considerablemente ampliado y los nombres principalmente ligados al tema desde entonces son los de FEJÉR, HOBSON, W. H. YOUNG, HARDY, y LITTELWOOD. FEJÉR demostró, en 1903, que pueden utilizarse series de Fourier *divergentes* considerando, en lugar de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$, la de medias aritméticas $\{\sigma_n\}$ donde

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}$$

El estableció el notable teorema de que la sucesión $\{\sigma_n\}$ es convergente y que su límite es $\frac{1}{2}\ [f(x+) + f(x-)]$ en todo punto de $[0, 2\pi]$ en el cual existan $f(x+)$ y $f(x-)$, con la sola restricción para f de que sea integrable-Riemann en $[0, 2\pi]$ o que la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$ exista como una integral impropia absolutamente convergente.

Sin el empleo de la integral de Lebesgue no puede emprenderse un estudio riguroso y completo de la teoría de las series de Fourier. Sin embargo, para la introducción à dicha teoría que aquí queremos ofrecer nos bastará la integral de Riemann. Además, los resultados contenidos en este capítulo son suficientes para la mayor parte de las aplicaciones de las series de Fourier a problemas de física e ingeniería.

Volvamos ahora al problema de la convergencia de las series de Fourier. Toda la teoría se apoya en dos fórmulas fundamentales de paso al límite que serán discutidas en los párrafos que siguen. Estas fórmulas, que constituyen también la base para la teoría de las integrales de Fourier, se refieren a las integrales que dependen de un parámetro real α, y nos interesará el comportamiento de dichas integrales cuando $\alpha \to +\infty$. La primera de ellas es una generalización de 22) y se conoce con el nombre de lema de Riemann-Lebesgue.

15-6 Lema de Riemann-Lebesgue.

15—8 TEOREMA. *Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. Entonces, para cada β real, tenemos*

23) $$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt = 0.$$

Demostración. Si f es constante en $[a, b]$, el resultado es evidente ya que tenemos

$$\left| \int_a^b \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt \right| = \left| \frac{\cos (\alpha a + \beta) - \cos (b\alpha + \beta)}{\alpha} \right| \leq \frac{2}{\alpha}, \quad \text{si } \alpha > 0$$

También es válido el resultado si f es constante en el intervalo abierto (a, b), prescindiendo de la forma en que se definan $f(a)$ y $f(b)$. Luego, 23) es válida si f es una función escalonada. Resulta ahora fácil demostrar 23) para toda función f integrable - Riemann. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos una partición P de $[a, b]$ tal que las correspondientes sumas de Riemann inferior y superior satisfagan la desigualdad $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon/2$. Escribamos ahora

$$L(P, f) = \int_a^b m(t)\, dt \quad \text{y} \quad U(P, f) = \int_a^b M(t)\, dt,$$

donde m y M son funciones escalonadas (determinadas de una manera evidente por la partición P) tales que la desigualdad $m(t) \leq f(t) \leq M(t)$ es válida en todo el intervalo $[a, b]$. Tenemos entonces

24) $$\left| \int_a^b [f(t) - m(t)] \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt \right| \leq \int_a^b |M(t) - m(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero, para este mismo ε, podemos elegir A de modo qne $\alpha \geq A$ implique

25) $$\left| \int_a^b m(t) \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando 24) con 25), obtenemos $|\int_a^b f(t) \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt| < \varepsilon$ siempre que $\alpha \geq A$. Esto demuestra 23).

NOTA. Haciendo $\beta = 0$ y $\beta = \pi/2$, encontramos

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen} \alpha t\, dt = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos \alpha t\, dt = 0.$$

El resultado del Teorema 15-8 se conoce con el nombre de *lema de Riemann-*

Lebesgue para integrales propias de Riemann. Puede también extenderse a las integrales impropias absolutamente convergentes.

15—9 Teorema. *Supongamos que $f \in R(a, b)$ para todo $b \geq a$ y que la integral impropia $\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge absolutamente. Entonces, para cada β real, tenemos*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^\infty f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\,dt = 0.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos b de modo que $\int_b^\infty |f(t)|\,dt < \varepsilon/2$. Elegido ya b, elijamos A de modo que $\alpha \geq A$ implique $|\int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\,dt| < \varepsilon/2$. Entonces

$$\left| \int_a^\infty f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\,dt \right| \leq \left| \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\,dt \right| + \int_b^\infty |f(t)|\,dt < \varepsilon.$$

En forma análoga podemos demostrar el lema de Riemann-Lebesgue para integrales impropias de segunda especie absolutamente convergentes.

15—10 Teorema. *Supongamos que $f \in R(a + \varepsilon, b)$ para todo $\varepsilon > 0$ y que la integral $\int_{a+}^b |f(t)|\,dt$ converge. Entonces, para cada β real, tenemos*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{a+}^b f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\,dt = 0.$$

15-7 Funciones absolutamente integrables. Al llegar aquí es conveniente introducir una clase de funciones con las que trabajaremos frecuentemente en la última parte de este capítulo. Las funciones de esta clase son las llamadas *absolutamente integrables* y se definen así:

15—11 Definición. *Se dice que una función f es absolutamente integrable en un intervalo $[a, b]$ (donde a y b pueden ser $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente) si existe un número finito de puntos en $[a, b]$, llamémosles $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$, tales que*

a) *$f \in R$ en todo subintervalo finito de $[a, b]$ que no contenga ninguno de los puntos $c_0, c_1, \ldots, c_n$.*

b) *Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, la integral $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(t)\,dt$ es una integral propia de Riemann o bien una integral impropia de Riemann absolutamente convergente.*

Cuando se satisfacen esas condiciones, escribimos $f \in R^*(a, b)$ y por definición es

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(t)\,dt.$$

NOTA. Es importante observar que una función absolutamente integrable está definida en todo el intervalo $[a, b]$, excepto acaso en un número finito de puntos. La función no está necesariamente acotada en $[a, b]$.

El siguiente es un ejemplo de una función que es absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$:

$$f(t) = \frac{e^t}{|t|^{1/2}} \text{ si } t < 0, \qquad f(t) = \frac{1}{8\sqrt{t(1-t)}} \; 0 < t < 1,$$

$$f(t) = \frac{\log(t-1)}{e^t} \quad \text{si } t > 1.$$

La figura 15-1 representa una aproximación de la gráfica de esta función.

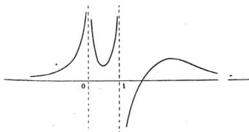


Fig. 15-1. Un ejemplo en el que $f \in R^*(-\infty, +\infty)$.

Los resultados del párrafo anterior pueden reunirse en un solo teorema que podemos citar como el *lema de Riemann-Lebesgue para funciones absolutamente integrables.*

15—12 TEOREMA. *Si* $f \in R^*(a, b)$ *(donde a y b pueden ser* $-\infty$ *y* $+\infty$ *respectivamente), entonces para cada* β *real tenemos*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)\, dt = 0.$$

Como una aplicación de este teorema, deducimos un resultado que luego será necesario en la teoría de las integrales de Fourier:

15—13 TEOREMA. *Si* $f \in R^*(-\infty, +\infty)$, *tenemos*

26) $$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1 - \cos \alpha t}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t}\, dt$$

siempre que la integral del segundo miembro sea absolutamente convergente.

Demostración. Para cada α fijo la integral del primer miembro de 26) converge absolutamente. [¿Por qué?] Luego podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} [f(t) - f(-t)]\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{f(t)-f(-t)}{t}\,dt - \int_{0}^{\infty} \frac{f(t)-f(-t)}{t}\cos\alpha t\,dt.$$

Cuando $\alpha \to +\infty$, la última integral tiende a 0, según el lema de Riemann-Lebesgue.

15-8 Integrales de Dirichlet. Las integrales de la forma $\int_0^\delta g(t)\,(\text{sen}\,\alpha t)/t\,dt$ (llamadas *integrales de Dirichlet*) desempeñan un papel muy importante en la teoría de las series de Fourier y también en la de las integrales de Fourier. Se supone que la función g del integrando tiene un límite a la derecha finito $g(0+) = \lim_{t\to 0+} g(t)$ y nos interesa formular aún otras condiciones para g que garantizarán la validez de la siguiente igualdad:

27) $$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\delta g(t)\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = g(0+).$$

Para hacerse una idea de la razón por la cual podemos esperar la validez de una fórmula como la 27), consideremos primero el caso en que g es constante ($g(t) = g(0+)$) en $[0, \delta]$. Entonces 27) es una consecuencia trivial de la igualdad $\int_0^\infty (\text{sen}\,t)/t\,dt = \pi/2$ (ver fórmula 14-15), ya que

$$\int_0^\delta \frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = \int_0^{\alpha\delta} \frac{\text{sen}\,t}{t}\,dt \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{cuando } \alpha \to +\infty.$$

Más general, si $g \in R$ en $[0, \delta]$ y si $0 < \varepsilon < \delta$, tenemos

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^\delta g(t)\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = 0,$$

en virtud del lema de Riemann-Lebesgue. Luego la validez de 27) está enteramente subordinada al *comportamiento local* de g en las proximidades de 0. Ya que $g(t)$ es «casi» $g(0+)$ cuanto t es «casi» 0, parece posible demostrar 27) sin imponer a g demasiadas restricciones adicionales. A primera vista

podría parecer que la continuidad de g en 0 debería ciertamente bastar para asegurar la existencia del límite en 27). Dirichlet demostró que la continuidad de g en $[0, \delta)$ es suficiente para probar 27), si, además, g tiene tan sólo un númerc finito de máximos o mínimos en $[0, \delta]$. Más tarde Jordan demostró 27) bajo la condición menos restrictiva de que g fuese de variación acotada en $[0, \delta]$. No obstante, todos los intentos de demostrar 27) con la sola hipótesis de la continuidad de g en $[0, \delta]$ han resultado infructuosos. Efectivamente, du Bois-Reymond encontró un ejemplo de una función continua en g para la que el límite 27) no existe. Aquí se discutirán el resultado de Jordan y un teorema relacionado con él debido a Dini.

15—14 Teorema. (*Jordan*). *Si g es de variación acotada en $[0, \delta]$, entonces*

28) $$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\delta g(t)\frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt = g(0+).$$

Demostración. Basta considerar el caso en que g es creciente en $[0, \delta]$, Si $\alpha > 0$ y si $0 < h < \delta$, tenemos

29) $$\begin{aligned}\int_0^\delta g(t)\frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt &= \int_0^h [g(t) - g(0+)]\frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt \\ &\quad + g(0+)\int_0^h \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt + \int_h^\delta g(t)\frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt \\ &= I_1(\alpha, h) + I_2(\alpha, h) + I_3(\alpha, h),\end{aligned}$$

donde para abreviar hemos empleado los símbolos $I_1(\alpha, h)$, $I_2(\alpha, h)$ e $I_3(\alpha, h)$. Podemos aplicar el lema de Riemann-Lebesgue a $I_3(\alpha, h)$ (ya que la integral $\int_h^\delta g(t)/t\,dt$ existe) y encontramos $I_3(\alpha, h) \to 0$ cuando $\alpha \to +\infty$. También

$$\begin{aligned}I_2(\alpha, h) &= g(0+)\int_0^h \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt \\ &= g(0+)\int_0^{h\alpha} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt \to \frac{\pi}{2}\,g(0+) \qquad \text{cuando } \alpha \to +\infty.\end{aligned}$$

A continuación, elijamos $M > 0$ de manera que $|\int_a^b (\operatorname{sen} t)/t\,dt| < M$ para todo $b \geq a \geq 0$. Se deduce que $|\int_a^b (\operatorname{sen} \alpha t)/t\,dt| < M$ para todo $b \geq a \geq 0$ si $\alpha > 0$. Fijemos ahora un $\varepsilon > 0$ y elijamos h en $(0, \delta)$ de modo que $|g(h) - g(0+)| < \varepsilon/(3M)$. Puesto que $g(t) - g(0+) \geq 0$ si $0 \leq t \leq h$, podemos aplicar el teorema de Bonnet (Teorema 9-34) a $I_1(\alpha, h)$ y escribir

$$I_1(\alpha, h) = \int_0^h [g(t) - g(0+)]\frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt = [g(h) - g(0+)]\int_c^h \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t}\,dt,$$

donde $c \in [0, h]$. La definición de h nos da

$$30) \qquad |I_1(a, h)| = |g(h) - g(0+)| \left| \int_c^h \frac{\operatorname{sen} at}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3M} M = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para el mismo h podemos elegir A de modo que $a \geq A$ implique

$$31) \qquad |I_2(a, h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left| I_3(a, h) - \frac{\pi}{2} g(0+) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, para $a \geq A$, podemos combinar 29), 30), y 31) para obtener

$$\left| \int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} at}{t} dt - \frac{\pi}{2} g(0+) \right| < \varepsilon.$$

Esto demuestra 28).

Otro tipo de condición para la validez de 28) fue encontrada por Dini y puede formularse así:

15—15 TEOREMA. (*Dini*). *Supongamos que existe $g(0+)$ y que para un cierto $\delta > 0$ la integral impropia*

$$\int_{0+}^{\delta} \frac{g(t) - g(0+)}{t} dt$$

converge absolutamente. Entonces tenemos

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} at}{t} dt = g(0+).$$

Demostración. Escribamos

$$\int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} at}{t} dt = \int_0^\delta \frac{g(t) - g(0+)}{t} \operatorname{sen} at \, dt + g(0+) \int_0^{a\delta} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

Cuando $a \to +\infty$, el primer término del segundo miembro tiende hacia 0 (en virtud del lema de Riemann-Lebesgue) y el segundo término tiende hacia $\frac{1}{2}\pi g(0+)$.

NOTA. Si $g \in R$ en $[a, \delta]$ para todo número positivo $a < \delta$, es fácil demostrar que se satisface la condición de Dini siempre que g satisfaga una condición de Lipschitz «a la derecha» de 0; esto es, siempre que existan dos constantes positivas M y p tales que

$$|g(t) - g(0+)| < Mt^p, \qquad \text{para todo } t \text{ en } (0, \delta].$$

(Ver Ejercicio 15-18). En particular, la condición de Lipschitz es válida con $p = 1$ siempre que g tenga derivada a la derecha de 0. Es interesante observar que existen funciones que satisfacen la condición de Dini y no, en cambio, la de Jordan. De la misma manera, hay funciones que satisfacen la condición de Jordan y no la de Dini. (Ver Ref. 15-12).

15-9 Representación de las sumas parciales de una serie de Fourier por medio de integrales.

15—16 TEOREMA. *Supongamos que $f \in R$ en $[0, 2\pi]$ y que f es periódica con periodo 2π. Designemos por $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier generada por f, pongamos*

$$32) \qquad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Tenemos entonces la representación integral

$$33) \qquad s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(x + 2t) + f(x - 2t)}{2} \frac{\operatorname{sen}(2n + 1)t}{\operatorname{sen} t} dt.$$

Demostración. Los coeficientes de Fourier de f vienen dados por las integrales de 16). Sustituyendo aquellas integrales en 32) se obtiene

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx)\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x)\right\} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(t - x)\, dt,$$

donde $D_n(t)$ representa la suma

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt.$$

Ya que f y D_n son ambas periódicas y de periodo 2π, podemos reemplazar el intervalo de integración por $[x - \pi, x + \pi]$. y efectuar un cambio de variable para obtener

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\, D_n(t - x)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + t)\, D_n(t)\, dt.$$

Utilizando la igualdad $D_n(-t) = D_n(t)$, encontramos

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t)\, dt$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} D_n(2t)\, dt.$$

Pero, según la fórmula (12-12), es

$$D_n(2t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{2\operatorname{sen} t}, & \text{si } t \neq m\pi \ (m \text{ entero}), \\ n + \dfrac{1}{2}, & \text{si } t = m\pi \ (m \text{ entero}). \end{cases}$$

Con lo cual queda demostrada 33).

15-10 Teorema de localización de Riemann. La fórmula 33) nos dice que la serie de Fourier generada por f convergerá en un punto x si, y únicamente si, existe el siguiente límite:

34) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{\operatorname{sen} t}\, dt,$$

en cuyo caso el valor de este límite será la suma de la serie. Esta integral es, en esencia, una integral de Dirichlet del tipo comentado en el párrafo anterior, salvo que sen t aparece en el denominador en lugar de t. No obstante, el lema de Riemann-Lebesgue nos permite reemplazar sen t por t en 34) sin afectar ni la existencia ni el valor del límite. Con mayor precisión, el lema de Riemann-Lebesgue implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{\operatorname{sen} t}\right] \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \operatorname{sen}(2n+1)t\, dt = 0,$$

debido a que la función F definida por la ecuación

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}, & \text{si } 0 < t \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

es continua en $[0, \pi/2]$. (El lector debería comprobar la continuidad en $t = 0$.) Por consiguiente, el problema de la convergencia para las series de Fourier consiste en encontrar condiciones para f que garanticen la existen del límite siguiente:

35)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{t}\,dt.$$

Utilizando una vez más el lema de Riemann-Lebesgue, necesitamos tan sólo considerar el límite de 35) cuando la integral $\int_0^{\pi/2}$ se reemplaza por $\int_0^{\delta}$, siendo δ cualquier número positivo $< \pi/2$, debido a que la integral $\int_{\delta}^{\pi/2}$ tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$. Por consiguiente podemos resumir los resultados del párrafo anterior en el teorema siguiente:

15–17 TEOREMA. *Supongamos que $f \in R$ en $[0, 2\pi]$ y que f tiene período 2π. Entonces la serie de Fourier generada por f convergerá para un valor dado de x si, y únicamente si, para algún número positivo $\delta < \pi/2$ existe el límite siguiente:*

36)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{t}\,dt,$$

en cuyo caso el valor de este límite es la suma de la serie de Fourier.

Este teorema se conoce con el nombre de *teorema de localización de Riemann*. Nos dice que la convergencia o divergencia de una serie de Fourier en un punto dado depende por completo del comportamiento de f en un entorno arbitrariamente pequeño de dicho punto. Esto constituye una sorpresa a la vista del hecho de que los coeficientes de la serie de Fourier dependen de los valores que la función alcanza en el intervalo completo $[0, 2\pi]$.

NOTA. En el Teorema 15-17 la hipótesis $f \in R$ en $[0, 2\pi]$ puede ser suavizada poniendo $f \in R^*(0, 2\pi)$. Las integrales de 16) que definen los coeficientes de Fourier existen todavía en esta hipótesis como integrales impropias absolutamente convergentes. Todo el análisis anterior puede repetirse como antes si aplicamos el lema de Riemann-Lebesgue en la forma dada en el Teorema 15-12.

15-11 Condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier.

15–18 TEOREMA. (*Jordan*). *Supongamos que $f \in R^*(0, 2\pi)$ y que f tiene período 2π. Admitamos que existen un punto x y un intervalo $[x-\delta, x+\delta]$ en el cual f es de variación acotada. En estas condiciones la serie de Fourier generada por f converge para aquel valor de x hacia la suma $[f(x+)+f(x-)]/2$. Si, además f es continua en x, la serie converge hacia $f(x)$.*

Demostración. Mantengamos x fijo y definamos g como sigue:

$$g(t) = \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}, \qquad \text{si } t \in [0, \delta/2].$$

Entonces g satisface la hipótesis del Teorema 15-14 y por lo tanto el límite de 36) existe y es igual a $g(0+)$. Esto demuestra el teorema.

15—19 TEOREMA (*Dini*). *Supongamos que* $f \in R^*(0, 2\pi)$ *y que* f *tiene período* 2π. *Supongamos que existen un punto* x *y un número positivo* $\delta < \pi/2$ *tales que existan los dos límites* $f(x+)$ *y* $f(x-)$ *y que las dos integrales impropias*

$$\int_{0+}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}\, dt \qquad y \qquad \int_{0+}^{\delta} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}\, dt$$

sean absolutamente convergentes. Entonces la serie de Fourier generada por f *converge en aquel punto* x *hacia el valor* $[f(x+) + f(x-)]/2$.

Demostración. Mantengamos fijo x y definamos g en $[0, \delta]$ como sigue:

$$g(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}.$$

Entonces g satisface la hipótesis del Teorema 15-15 y por lo tanto existe el límite 36) y es igual a $g(0+)$. Esto demuestra el teorema.

15-12 Sumabilidad Cesàro de las series de Fourier. La continuidad de una función f no es una hipótesis muy fecunda cuando interviene en el estudio de la convergencia de la serie de Fourier generada por f. En 1873, DU BOIS-REYMOND dio un ejemplo de una función, continua en todo el intervalo $[0, 2\pi]$, cuya serie de Fourier no converge en un *subconjunto no numerable* de $[0, 2\pi]$. Aun hoy no se sabe si la continuidad de una función en $[0, 2\pi]$ implica siempre o no la convergencia de su serie de Fourier *por lo menos en un punto* del intervalo. Sin embargo, la continuidad es suficiente para establecer la sumabilidad Cesàro de la serie. A continuación se discutirá este resultado (debido a FEJÉR) y algunas de sus consecuencias.

Ante todo nos proponemos obtener una representación integral de las medias aritméticas de las sumas parciales de una serie de Fourier.

15—20 TEOREMA. *Supongamos que* $f \in R^*(0, 2\pi)$ *y que* f *tiene período* 2π. *Designemos por* s_n *la suma parcial* n*-ésima de la serie de Fourier generada por* f *y consideremos*

37) $$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Entonces tenemos la representación integral

38) $$\sigma(x) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt.$$

Demostración. Si utilizamos la representación integral para s_n dada en 33)

y formamos la suma que define $\sigma_n(x)$, obtenemos inmediatamente el resultado deseado en virtud de la fórmula 12-16).

NOTA. Si aplicamos el Teorema 15-20 a la función constante cuyo valor es 1 en cada punto encontramos $\sigma_n(x) = s_n(x) = 1$ para cada n y por lo tanto 38) se convierte en

39) $$\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt = 1.$$

Por consiguiente, dado un cierto s, podemos combinar 39) con 38) y escribir

40) $$\sigma_n(x) - s = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2} - s\right\}\left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt.$$

Si podemos elegir un valor de s de modo que la integral del segundo miembro de 40) tienda hacia 0 cuando $n \to \infty$, resultará que $\sigma_n(x) \to s$ cuando $n \to \infty$. El teorema que sigue demuestra que basta tomar $s = [f(x+) + f(x-)]/2$.

15—21 TEOREMA (*Fejér*). *Supongamos que* $f \in R^*(0, 2\pi)$ *y que* f *tenga período* 2π. *Definamos una función* s *mediante la igualdad siguiente*:

$$s(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2},$$

siempre que exista el límite. Entonces, para todo x *en el que esté definida* $s(x)$, *la serie de Fourier generada por* f *es sumable Cesàro y tiene como suma* (C, 1) *precisamente* $s(x)$. *Esto es, tenemos*

41) $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = s(x),$$

donde $\{\sigma_n\}$ *es la sucesión de medias aritméticas definidas por* 37). *Si, además,* f *es continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$, *la sucesión* $\{\sigma_n\}$ *converge uniformemente hacia* f *en todo subintervalo* $[a', b']$ *siendo* $a < a' < b' < b$.

Demostración. Consideremos $g_x(t) = [f(x+2t) + f(x-2t)]/2 - s(x)$ cuando $s(x)$ está definida. Entonces $g_x(t) \to 0$ cuando $t \to 0+$. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta < \pi/2$ tal que $|g_x(t)| < \varepsilon/2$ cuando $0 < t \leq \delta$. (Obsérvese que δ depende de x así como de ε. Sin embargo, si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$ y existe un δ que sirve para *todo* x en $[a, b]$). Utilizando 39, tenemos

$$\left|\frac{2}{n\pi}\int_0^{\delta} g_x(t)\left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

También se tiene

$$\left|\frac{2}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} g_x(t)\left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt\right| \leq \frac{2}{n\pi}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \delta}\int_{\delta}^{\pi/2} |g_x(t)|\, dt \leq \frac{2}{n\pi}\frac{I}{\operatorname{sen}^2 \delta},$$

donde $I = \int_0^{\pi/2} |g_x(t)|\, dt$. (Nótese que la hipótesis $f \in R^*(0, 2\pi)$ implica la convergencia de $\int_0^{\pi/2} |g_x(t)|\, dt$ en el caso de ser ésta una integral impropia.) Ahora, elijamos N de manera que $2I/(N\pi \operatorname{sen}^2 \delta) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Entonces $n \geq N$ implica

$$|\sigma_n(x) - s(x)| = \left|\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2} g_x(t)\left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt\right| < \varepsilon.$$

En otras palabras, 41) es válida. Cuando f es continua en $[a, b]$, para todo subintervalo $[a', b']$ con $a < a' < b' < b$, existe un M tal que $|g_x(t)| \leq M$ para todo x en $[a', b']$ y todo t suficientemente pequeño y podemos reemplazar I por $\pi M/2$ en el razonamiento anterior. El N que resulta es entonces independiente de x y por lo tanto $\sigma \to s = f$ uniformemente en $[a', b']$. El teorema queda así demostrado.

15-13 Consecuencias del teorema de Fejér.

15—22 TEOREMA. *Sea f una función continua en $[0, 2\pi]$ y periódica de período 2π. Designemos por $\{s_n\}$ la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier generada por f, sea dicha serie*

42) $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Tenemos entonces:

a) $\text{l.e.m.}_{n\to\infty}\, s_n = f$ *en todo intervalo* $[a, b]$.

b) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ *(fórmula de Parseval)*.

c) $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)\, dt.$

NOTA. La serie de c) converge para todo x, aun cuando la serie 42) diverja. La convergencia es uniforme en todo intervalo $[a, b]$.

Demostración. Aplicando la fórmula 20) del Teorema 15-5, poniendo $t_n(x) = \sigma_n(x) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x)$, obtenemos la desigualdad

43) $$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(x)|^2\, dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2\, dx.$$

Pero, ya que $\sigma_n \to f$ uniformemente en $[0, 2\pi]$, se deduce que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} \sigma_n = f$ en $[0, 2\pi]$ y 43) implica a). (El resultado es legítimo para todo intervalo $[a, b]$ debido a la periodicidad.) La parte b) se deduce de a) en virtud del Teorema 15-6. Por último, la parte c) también se obtiene de a), por el Teorema 13-19.

15—23 Teorema (*Teorema de aproximación de Weierstrass*). *Sea f una función real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen un polinomio p (que puede depender de ε) tal que*

44) $$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo } x \textit{ en } [a, b].$$

Nota. Este teorema se expresa diciendo que toda función continua puede ser « aproximada uniformemente » por un polinomio.

Demostración. Si $t \in [0, \pi)$, consideremos $g(t) = f[a + t(b - a)/\pi]$; si en cambio $t \in [\pi, 2\pi]$, tomemos $g(t) = f[a + (2\pi - t)(b - a)/\pi]$ y definimos g fuera de $[0, 2\pi]$ de modo que tenga período 2π. Para el ε dado en el enunciado del teorema, podemos aplicar el teorema de Fejér y encontrar una función σ definida por una ecuación de la forma

$$\sigma(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos kt + B_k \operatorname{sen} kt)$$

de manera que $|g(t) - \sigma(t)| < \varepsilon/2$ para todo t en $[0, 2\pi]$. (Obsérvese que N, y por lo tanto σ, dependen de ε.) Puesto que σ es una suma finita de funciones trigonométricas, da origen a un desarrollo en serie de potencias en un entorno del origen que converge uniformemente en todo intervalo finito. Las sumas parciales de este desarrollo en serie de potencias constituyen una sucesión de polinomios, llamémosla $\{p_n\}$, de modo que $p_n \to \sigma$ uniformemente en $[0, 2\pi]$. En consecuencia, para el mismo ε, existe un m tal que

$$|p_m(t) - \sigma(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \text{ en } [0, 2\pi].$$

Por consiguiente tenemos

45) $$|p_m(t) - g(t)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \text{ en } [0, 2\pi].$$

Definamos ahora el polinomio p mediante la fórmula $p(x) = p_m[2\pi(x - a)/(b - a)]$. La desigualdad 45) se convierte en la 44) cuando ponemos $t = 2\pi(x - a)/(b - a)$.

15-14 Otras formas de series de Fourier. Utilizando las fórmulas $2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$ y $2i \operatorname{sen} nx = e^{inx} - e^{-inx}$, la serie de Fourier generada por f puede expresarse en función de exponenciales complejas como sigue:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}),$$

donde $\alpha_n = (a_n - ib_n)/2$ y $\beta_n = (a_n + ib_n)/2$. Si ponemos $\alpha_0 = a_0$ y $\alpha_{-n} = \beta_n$, podemos escribir la forma exponencial más brevemente así:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}.$$

Las fórmulas 16) para los coeficientes son ahora

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Si f tiene período 2π, el intervalo de integración puede reemplazarse por cualquier otro intervalo de longitud 2π.

Con mayor generalidad, si $f \epsilon R$ en $[0, p]$ y f tiene período p, escribimos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{p} \right)$$

para indicar que los coeficientes vienen dados por las fórmulas

$$a_n + \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi n t}{p}\, dt,$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi n t}{p}\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En forma exponencial podemos escribir

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i n x/p},$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) e^{-2\pi i n t/p}\, dt, \qquad \text{si } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Todos los teoremas de convergencia para series de Fourier de período 2π pueden también aplicarse al caso de un período cualquiera p efectuando un cambio de escala conveniente.

15-15 Teorema de la integral de Fourier. La hipótesis de la periodicidad, que aparece en todos los teoremas de convergencia relativos a las series de

Fourier, no es una restricción tan severa como a primera vista puede parecer. Si una función está inicialmente definida en un intervalo finito, por ejemplo $[a, b]$, siempre podemos extender la definición de f al exterior de $[a, b]$ imponiendo una cierta condición de periodicidad. Por ejemplo, si $f(a) = f(b)$, podemos definir f en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$ exigiendo que la igualdad $f(x + p) = f(x)$ sea válida para todo x, siendo $p = b - a$. (La condición $f(a) = f(b)$ siempre puede considerarse, pues si es necesario se cambia el valor de f en uno de los extremos. Esto no afecta a la existencia ni a los valores de las integrales que se usan en el cálculo de los coeficientes de Fourier de f). No obstante, si la función dada está ya definida en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y *no* es periódica, no cabe entonces esperar conseguir una serie de Fourier que represente la función en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Sin embargo, en tal caso la función puede ser representada algunas veces por una *integral infinita* mejor que por una serie. Estas integrales, en muchos aspectos análogas a las series de Fourier, son las *integrales de Fourier*, y el teorema que proporciona las condiciones suficientes para representar una función por medio de una de esas integrales se conoce con el nombre de *teorema de la integral de Fourier*. Los instrumentos básicos que se usan en la teoría son, como en el caso de las series de Fourier, las integrales de Dirichlet y el lema de Riemann-Lebesgue.

15–24 TEOREMA. (*Teorema de la integral de Fourier*). *Supongamos que $f \in R^*(-\infty, +\infty)$. Supongamos que existen un punto x en E_1 y un entorno de x $[x - \delta, x + \delta]$ de manera que o bien*

a) *f es de variación acotada en $[x - \delta, x + \delta]$,*

o

b) *existen los dos límites $f(x+)$ y $f(x-)$ y las dos integrales impropias*

$$\int_{0+}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}\,dt \quad \text{y} \quad \int_{0+}^{\delta} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}\,dt$$

son absolutamente convergentes.

Entonces tenemos la fórmula

$$46)\qquad \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u - x)\,du\right] dv.$$

Demostración. El primer paso de la demostración consiste en establecer la siguiente fórmula:

$$47)\qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

A tal fin escribimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\,\alpha t}{\pi t}\,dt = \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}.$$

Cuando $\alpha \to +\infty$, la primera de las cuatro integrales del segundo miembro tiende hacia 0, en virtud del lema de Riemann-Lebesgue. En la tercera integral podemos aplicar el Teorema 15—14 o bien el Teorema 15-15 (según se verifique a) o b)) y se obtiene

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{0}^{\delta} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\,\alpha t}{\pi t}\,dt = \frac{f(x+)}{2}.$$

Análogamente, tenemos

$$\int_{-\delta}^{0} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\,\alpha t}{\pi t}\,dt = \int_{0}^{\delta} f(x-t)\frac{\operatorname{sen}\,\alpha t}{\pi t}\,dt \to \frac{f(x-)}{2} \qquad \text{cuando } \alpha \to +\infty.$$

Así pues, hemos establecido 47). Si hacemos un cambio de variable, logramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\operatorname{sen}\,\alpha(u-x)}{u-x}\,du,$$

y si utilizamos la fórmula elemental

$$\frac{\operatorname{sen}\,\alpha(u-x)}{u-x} = \int_{0}^{\alpha} \cos v(u-x)\,dv,$$

la relación 47) se convierte en

$$48)\qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\int_{0}^{\alpha} \cos v(u-x)\,dv\right]du = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Pero la fórmula que queremos demostrar no es otra que 48) con el orden de integración invertido. A causa de las hipótesis más bien débiles que hemos impuesto a f, hay que tener la precaución de demostrar que tal inversión es legítima. El problema con el que nos enfrentamos consiste en justificar la igualdad

$$49)\qquad \int_{0}^{\alpha}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u-x)\,du\right]dv = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\alpha} f(u)\cos v(u-x)\,dv\right]du$$

para todo $\alpha > 0$. La hipótesis $f \in R^*(-\infty, +\infty)$ significa que, para cada $a > 0$, existe la integral $\int_0^a f(u)\,du$ bien como una integral propia de Riemann o bien como una suma finita de integrales impropias de Riemann absoluta-

mente convergentes. Si $\int_0^\alpha f(u)\,du$ es una integral propia de Riemann, la fórmula 49) es inmediata según el Teorema 14-26 [en la forma dada por la fórmula (14-19)]. Queda por demostrar que 49) es aún válida cuando $\int_0^\alpha f(u)\,du$ es una suma finita de integrales impropias. Para simplificar, supongamos que

$$\int_0^\alpha f(u)\,du = \lim_{\beta\to\alpha-}\int_0^\beta f(u)\,du,$$

donde $\int_0^\beta f(u)\,du$ es una integral propia de Riemann para cada $\beta < \alpha$. Entonces 49) es válida reemplazando α por β, y tan sólo tenemos que demostrar que

50) $$\lim_{\beta\to\alpha-}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\beta f(u)\cos v(u)-x)\,dv\right]du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\alpha f(u)\cos v(u-x)\,dv\right]du.$$

Consideremos $g(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty}[\int_0^\beta f(u)\cos v(u-x)\,dv]\,du$ si $0 \le \beta \le \alpha$. Entonces, para cada $\beta < \alpha$, tenemos

$$|g(\alpha)-g(\beta)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\left|\int_\beta^\alpha \cos v(u-x)\,dv\right| du$$
$$\le (\alpha-\beta)\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\,du.$$

Como la integral $\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\,du$ es finita (por hipótesis), vemos que $g(\beta)\to g(\alpha)$ cuando $\beta\to\alpha-$. Es decir, 50) es válida. Los casos restantes se estudian análogamente y el teorema queda demostrado.

15-16 Forma exponencial del teorema de la integral de Fourier.

15–25 Teorema. *Si f satisface las hipótesis del teorema de la integral de Fourier y si, además, la integral $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x-t)|/t\,dt$ es convergente, tenemos entonces*

51) $$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iv(u-x)}\,du\right]dv.$$

Demostración. Consideremos $F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u-x)\,du$. Entonces $F(v) = F(-v)$ y, por tanto, $\int_{-\infty}^0 F(v)\,dv = \int_0^\infty F(-v)\,dv = \int_0^\infty F(v)\,dv$. Por consiguiente la 46) se transforma en

52) $$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(v)\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos v(u - x)\, du \right] dv.$$

Definamos ahora G en $(-\infty, +\infty)$ mediante la igualdad

$$G(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \operatorname{sen} v(u - x)\, du.$$

Se trata de probar que las dos integrales $\int_0^\infty G(v)\,dv$ y $\int_{-\infty}^0 G(v)\,dv$ convergen y que su suma es cero. El mismo razonamiento utilizado para demostrar 49) nos prueba también que

53) $$\int_0^\alpha G(v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^\alpha f(u) \operatorname{sen} v(u - x)\,dv \right] du$$

para todo $\alpha > 0$. Con la fórmula elemental

$$\int_0^\alpha \operatorname{sen} v(u - x)\,dv = \frac{1 - \cos \alpha(u - x)}{u - x},$$

la igualdad 53) se convierte en

$$\int_0^\alpha G(v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{1 - \cos \alpha(u - x)}{u - x}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \frac{1 - \cos \alpha t}{t}\,dt.$$

Según el Teorema 15-13, encontramos

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \frac{1 - \cos \alpha t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{f(x + t) - f(x - t)}{t}\,dt,$$

ya que la integral del segundo miembro es absolutamente convergente (por hipótesis). La existencia del límite en esta igualdad demuestra que la integral $\int_0^\infty G(v)\,dv$ es convergente. Puesto que $\int_{-a}^0 G(v)\,dv = \int_0^a G(-v)\,dv = -\int_0^a G(v)\,dv$, la integral $\int_{-\infty}^0 G(v)\,dv$ también es convergente y su valor es $-\int_0^\infty G(v)\,dv$. Esto demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\,dv = 0$. Combinando este resultado con 52), encontramos

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F(v) + iG(v))\,dv.$$

Esta es la fórmula 51).

NOTA. La hipótesis de que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + t) - f(x - t)|/t\,dt$ converge tan sólo se utilizó para probar la convergencia de $\int_0^\infty G(v)\,dv$. Es importante poner de manifiesto que el valor principal de Cauchy de $\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\,dv$ existe sin esta

hipótesis. En efecto, tenemos $\int_{-a}^{a} G(v)\,dv = 0$ para todo a, ya que G es una función impar y por tanto $\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} G(v)\,dv = 0$. Por consiguiente, la igualdad 51) es aun válida en la hipótesis del teorema de la integral de Fourier con tal que interpretemos la integral externa de 51) como un valor principal de Cauchy. En otras palabras, con las hipótesis del teorema de la integral de Fourier tenemos

54) $$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iv(u-x)}\,du \right] dv.$$

Se debe observar además que el valor de la integral 54) no cambia cuando v se reemplaza por $-v$ en el integrando.

15-17 Transformadas integrales. Gran número de importantes funciones del análisis pueden expresarse como integrales impropias de la forma

55) $$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x)\,dx.$$

Una función g definida por una ecuación de este tipo (en la que y puede ser real o compleja) se llama una *transformada integral de f*. La función K que aparece en el integrando se denomina el *núcleo* de la transformada.

Las transformadas integrales se utilizan ampliamente en matemáticas puras y aplicadas. Son especialmente útiles en la resolución de ciertos problemas de contorno y de ciertos tipos de ecuaciones integrales. Algunas de las transformadas más corrientemente usadas son las siguientes:

Transformada exponencial de Fourier: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)\,dx.$

Transformada coseno de Fourier: $\int_{0}^{\infty} \cos xy\, f(x)\,dx.$

Transformada seno de Fourier: $\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen} xy\, f(x)\,dx.$

Transformada de Laplace: $\int_{0}^{\infty} e^{-xy} f(x)\,dx.$

Transformada de Mellin: $\int_{0}^{\infty} x^{y-1} f(x)\,dx.$

Ya que $e^{-ixy} = \cos xy - i \operatorname{sen} xy$, las transformadas seno y coseno son meros casos particulares de la transformada exponencial de Fourier en la cual

la función f se anula en el eje real negativo. Asimismo la transformada de Laplace está relacionada con la transformada exponencial de Fourier. Si consideramos un valor complejo de y, por ejemplo $y = u + iv$, donde u y v son reales, podemos escribir

$$\int_0^\infty e^{-xy} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-ixv} e^{-xu} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-ixv} \phi_u(x)\, dx,$$

donde $\phi_u(x) = e^{-xu} f(x)$. Luego la transformada de Laplace puede considerarse como un caso particular de la transformada exponencial de Fourier.

NOTA. Una ecuación como la 55) se escribe algunas veces más brevemente en la forma $g = K(f)$ o $g = Kf$, donde K representa el «operador» que convierte f en g. Ya que la integración está involucrada en esa ecuación, el operador K se designa con el nombre de *operador integral*. Es evidente que K es también un operador lineal. Esto es, $K(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 K f_1 + a_2 K f_2$, si a_1 y a_2 son constantes. El operador definido por la transformada de Fourier frecuentemente se representa por F y el definido por la transformada de Laplace por L.

La forma exponencial del teorema de la integral de Fourier puede expresarse en función de transformadas de Fourier como sigue. Designemos por g la transformada de Fourier de f, o sea

56) $$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itu}\, dt.$$

Entonces, en los puntos de continuidad de f, la fórmula 51) se convierte en

57) $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{ixu}\, du$$

y esta se llama la *fórmula de inversión* para la transformada de Fourier. Ella nos dice que una función continua f que satisface las condiciones del Teorema 15-25 está determinada en forma única por su transformada de Fourier g.

NOTA. Si F representa el operador definido por 56), es costumbre representar por F^{-1} el operador definido por 57). Las ecuaciones 56) y 57) pueden expresarse simbólicamente escribiendo $g = Ff$ y $f = F^{-1}g$. Hablando en forma poco rigurosa, la fórmula de inversión nos indica la manera de «resolver» la ecuación $g = Ff$ respecto a f en función de g.

Antes de seguir adelante en el estudio de las transformadas de Fourier, tenemos que introducir un nuevo concepto, la *convolución* de dos funciones. Esta puede interpretarse como una transformada integral de tipo especial en la que el núcleo $K(x, y)$ depende únicamente de la *diferencia* $x - y$.

15-18 Convoluciones

15—26 DEFINICIÓN. *Dadas dos funciones f y g, ambas absolutamente integrables en $(-\infty, +\infty)$, designemos por S el conjunto de valores de x para los cuales la integral impropia*

58) $$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)\, dt$$

converge. Esta integral define en S una función h llamada la convolución de f y g. Para designar esta función también escribimos $h = f * g$.

NOTA. Es fácil ver (por un cambio de variable) que $f*g = g*f$ siempre que la integral converge.

Se presenta un caso particular importante cuando ambas funciones f y g se anulan en el eje real negativo. En este caso, $g(x - t) = 0$ si $t > x$, y la 58) se transforma en

59) $$h(x) = \int_0^x f(t)g(x - t)\, dt.$$

En este caso, es evidente que la convolución estará definida en cada punto de un intervalo $[a, b]$ si f y g son ambas propiamente integrables-Riemann en $[a, b]$. No obstante, no hay seguridad de que eso ocurra si suponemos tan sólo que f y g son absolutamente integrables en $[a, b]$. Por ejemplo, consideremos

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t}}, \qquad \text{si } 0 < t < 1,$$

y tomemos $f(t) = g(t) = 0$ si $t \leq 0$ o si $t \geq 1$. Entonces f tiene una discontinuidad en $t = 0$. Sin embargo, la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \int_0^1 t^{-1/2}\, dt$ converge. Análogamente, la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = \int_0^1 (1 - t)^{-1/2}\, dt$ converge, a pesar de que g tiene una discontinuidad infinita en $t = 1$. No obstante, cuando formamos la integral de convolución de 58) correspondiente a $x = 1$, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(1 - t)\, dt = \int_0^1 t^{-1}\, dt.$$

Obsérvese que las dos discontinuidades de f y g se han «reunido» en *una* discontinuidad de tal naturaleza que la integral de convolución diverge.

Este ejemplo demuestra que pueden existir ciertos puntos sobre el eje real en los que la integral 58) no exista, aun cuando las funciones f y g sean ambas absolutamente integrables en $(-\infty, +\infty)$. Consideremos tales puntos como «singularidades» de h. Es fácil demostrar que tales singularidades no

pueden presentarse a menos que *ambas* funciones f y g tengan discontinuidades infinitas. Con mayor precisión, tenemos el teorema siguiente:

15–27 TEOREMA. *Si $f \in R^*(-\infty, +\infty)$ y $g \in R^*(-\infty, +\infty)$, y si una de las dos funciones f o g está acotada en $(-\infty, +\infty)$, entonces la integral de convolución $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$ converge absolutamente para todo x en E_1.*

Demostración. Ya que $f*g = g*f$, basta considerar el caso en el que f está acotada. Supongamos $|f(t)| \leq M$ para todo t en E_1. Entonces, para todo intervalo finito $[a, b]$ en el cual existe la integral $\int_a^b g(t)dt$ como una integral propia de Riemann, también existe $\int_a^b g(t)f(x-t)\,dt$, y tenemos

$$\int_a^b |g(t)f(x-t)|\,dt \leq M \int_a^b |g(t)|\,dt \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt.$$

La conclusión es ahora una sencilla consecuencia de los criterios de convergencia dados en los Teoremas 14–2 y 14–12.

Otra condición suficiente para la existencia de la convolución puede formularse como sigue:

15–28 TEOREMA. *Si $f \in R^*(-\infty, +\infty)$ y $g \in R^*(-\infty, +\infty)$ y si las dos integrales $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt$ convergen, la integral de convolución $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$ converge absolutamente para todo x de E_1.*

Demostración. Si $\int_a^b f(t)\,g(x-t)$ dt existe, podemos aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener

$$\left(\int_a^b |f(t)g(x-t)|\,dt\right)^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\,dt \int_a^b |g(x-t)|^2\,dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt.$$

La conclusión es una sencilla consecuencia de estas desigualdades.

En el siguiente teorema se consideran otras propiedades de la convolución.

15—29 TEOREMA. *Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $(-\infty, +\infty)$ y supongamos que se satisface una de las dos condiciones siguientes:*

I) *una por lo menos de las dos funciones f o g está acotada en $(-\infty, +\infty)$,*

o bien

II) *las integrales $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$ e $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,dt$ son ambas convergentes.*

Existe entonces la integral de convolución $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$ para todo x real y goza de las propiedades siguientes:

a) *h está acotada en $(-\infty, +\infty)$,*
b) *$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$ converge uniformemente en $(-\infty, +\infty)$,*
c) *h es continua y $h \in R^*(-\infty, +\infty)$ si una de las funciones f o g es continua en $(-\infty, +\infty)$.*

Demostración. Cada una de las condiciones I) y II) asegura la convergencia absoluta, para todo x real, de la integral que define $h(x)$. Si se satisface I), podemos suponer que f está acotada, y escribamos $|f(t)| \leq M$ para todo t. Para establecer las propiedades a) y b) en este caso utilizaremos la desigualdad

60) $$\int_a^b |g(t)\, f(x-t)|\, dt \leq M \int_a^b |g(t)|\, dt$$

que es válida para todo intervalo $[a, b]$ en el que $g \in R$.

Es fácil ver que esta desigualdad también subsiste cuando las integrales son impropias (de primera o de segunda especie o de tipo mixto). Puesto que $\int_a^b |g(t)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt$, la desigualdad 60) implica que h está acotada en $(-\infty, +\infty)$. Lo cual demuestra que la parte a) es consecuencia de I).

Asimismo la desigualdad 60) nos permite deducir b). Por ejemplo, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $B > 0$ tal que $b > a > B$ implica $\int_a^b |g(t)|dt < \varepsilon/M$. Para el mismo B, 60) nos da $\int_a^b |g(t)f(x-t)|dt < \varepsilon$ para todo x, y esto establece la convergencia uniforme de las integrales impropias de la forma $\int_c^{\infty} f(t)g(x-t)dt$. Mediante un razonamiento parecido conseguiremos justificar la convergencia uniforme de las integrales impropias de segunda especie con lo cual queda probado que I) implica b). Cuando se satisface la hipótesis II), el razonamiento para demostrar a) y b) es esencialmente el mismo salvo que en lugar de 60) utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, como hicimos en la demostración del Teorema 15—28.

Para demostrar la parte c) hacemos uso de la parte b) y aplicamos el Teorema 14—22 y su análogo para las integrales impropias de segunda especie. Supongamos que f es continua en $(-\infty, +\infty)$. Puesto que la integral para $h(x)$ converge uniformemente en todo intervalo finito $[a, b]$, se deduce que h es continua en todo $[a, b]$ y por consiguiente en $(-\infty, +\infty)$.

Queda por demostrar que $h \in R^*(-\infty, +\infty)$. Podemos suponer que f y g son ambas no negativas, ya que únicamente interesa aquí la convergencia absoluta. También es entonces h no negativa. Elegimos un intervalo finito $[a, b]$. Según la discusión que sigue al Teorema 14—26 podemos escribir

61)
$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_a^b g(x-t)\,dx\right]dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_{a-t}^{b-t} g(y)\,dy\right]dt \le \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy.$$

El criterio de convergencia del Teorema 14—2 establece la existencia de $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$.

15—19 Teorema de convolución para transformadas de Fourier. En el Teorema que sigue se pone de manifiesto la importancia de las convoluciones en la teoría de las transformadas de Fourier.

15—30 TEOREMA. *Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $(-\infty, +\infty)$ y supongamos que se satisface una de las hipótesis I) o II) del Teorema 15—29. Designemos por h la convolución $h = f*g$, y supongamos que por lo menos una de las dos funciones f o g es continua en $(-\infty, +\infty)$. Entonces para todo u real tenemos*

62)
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ixu}\,dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itu}\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iyu}\,dy\right).$$

NOTA. En notación simbólica, (62) puede escribirse así:

$$F(f*g) = F(f)\cdot F(g).$$

En otras palabras, la transformada de Fourier de la convolución $f*g$ es el producto de las transformadas $F(f)$ y $F(g)$.

Demostración. En virtud del Teorema 15—29, h es acotada y absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$. Consideremos cualquier intervalo finito $[a, b]$. Razonando como en la demostración de 61), tenemos

63)
$$\int_a^b h(x)e^{-ixu}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_a^b e^{-ixu}g(x-t)\,dx\right]dt.$$

Considerando que $h \to +\infty$, encontramos

64)
$$\int_a^b h(x)e^{-ixu}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_a^b e^{-ixu}\,g(x-t)\,dx\right]dt.$$

Admitamos, por el momento, que podemos invertir la operación del paso al límite con la integración en el segundo miembro de 64). Entonces obtenemos

65) $$\int_a^\infty h(x)e^{-ixu}\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(t)\left[\int_a^\infty e^{-ixu}\,g(x-t)\,dx\right]dt.$$

Si, ahora, consideramos que $a \to -\infty$ e invertimos otra vez el paso al límite con la integración, obtenemos

66) $$\int_{-\infty}^\infty h(x)e^{-ixu}\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(t)\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-ixu}\,g(x-t)\,dx\right]dt,$$

El cambio de variable $y = x - t$ en la integral interior del segundo miembro de 60) da origen a la igualdad 62).

Por consiguiente, para completar la demostración quedan por justificar las inversiones del paso al límite con la integración que hemos admitido para pasar de 64) a 65) y de 65) a 66). Los dos pasos son completamente análogos, con lo que sólo trataremos el primero. El problema aquí es justificar la relación

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-\infty}^\infty f(x)\left[\int_a^b e^{-iyu}g(y-x)\,dy\right]dx$$
$$= \int_{-\infty}^\infty f(x)\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-iyu}g(y-x)\,dy\right]dx.$$

Escribiendo $\alpha(x) = \int_0^x f(v)dv$, $F(x, y) = e^{-iyu}g(y-x)$, y $G(x, t) = \int_a^t F(x, y)\,dy$, la relación anterior se convierte en

67) $$\lim_{b\to+\infty}\int_{-\infty}^\infty G(x, b)\,d\alpha(x) = \int_{-\infty}^\infty \lim_{b\to+\infty} G(x, b)\,d\alpha(x).$$

La forma de esta igualdad es la de la 26) del Teorema 14—28, y para deducir la 67) tan solo necesitamos verificar que se satisfacen las hipótesis a), b) y c) del Teorema 14—28. La hipótesis a) exige la convergencia uniforme de la integral

$$\int_{-\infty}^\infty G(x, t)\,d\alpha(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\left[\int_a^t e^{-iyu}g\,(y-x)\,dy\right]dx$$

en $[a, +\infty)$. Esto resulta de la desigualdad 60) en el caso I) yde la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el caso II). Análogamente se verifican las hipótesis b) y c) del Teorema 14—28 lo cual completa la demostración.

15-20 Transformada de Laplace. Si f es una función real definida en $(-\infty, +\infty)$ tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$, la función F definida por la ecuación

68) $$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$$

se llama la *transformada de Laplace* de f, también designada por $L(f)$ o Lf. Aquí z es un número complejo, $z = x + iy$, y $F(z)$ está definida para aquellos valores de z en el plano complejo para los cuales converge la integral. Veremos

inmediatamente que el conjunto de tales z es un *semi-plano*, esto es, un conjunto de la forma $\{x + iy | x > a\}$. Como

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-iyt} \phi_x(t)\, dt,$$

donde $\phi_x(t) = e^{-xt} f(t)$, vemos que para cada x fijo la transformada de Laplace es lo mismo que la transformada de Fourier de ϕ_x. Este hecho es útil al desarrollar alguna de las propiedades de la transformada de Laplace. Por ejemplo, el lector puede fácilmente comprobar que el teorema de convolución para transformadas de Fourier, cuando se establece en función de transformadas de Laplace, da origen a la fórmula

69) $$L\,(f*g) = L\,(f) \cdot L(g)$$

(ver Ejercicio 15-29), en la que ahora la convolución $f*g$ está dada por la integral

70) $$(f*g)(x) = \int_0^x f(t) g(x - t)\, dt.$$

Siempre que pensamos en la transformada de Laplace de 68) considerándola como una transformada de Fourier, en realidad estamos imponiendo una restricción al número complejo z, la de permanecer sobre una recta vertical fija. Es más natural estudiar la transformada de Laplace como una función de una variable compleja «no restringida», y éste es el punto de vista que adoptaremos en lo que queda de este capítulo.

NOTA. Para simplificar, limitaremos nuestro estudio de las transformadas de Laplace a funciones f que satisfagan las siguientes restricciones:

a) $f \in R$ en todo intervalo finito.

b) Existen constantes positivas M, a, t_0, tales que

71) $$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Bajo estas restricciones, la integral de 68) converge *absolutamente* para cada $z = x + iy$ que tenga la parte real $x > a$. En efecto, cuando $x > a$, tenemos

$$|e^{-zt} f(t)| = e^{-xt} |f(t)| \leq Me^{-(x-a)t}$$

siempre que $t \geq t_0$. Como $\int_{t_0}^\infty e^{-(x-a)t}\, dt$ converge, se deduce que

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

converge absolutamente cuando $x > a$.

15—31 TEOREMA. *Supongamos que la integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$ es convergente para $z = z_0 = x_0 + iy_0$. Para cada $K > 0$ definamos el sector $S(K)$ con vértice z_0 como el conjunto*

$$S(K) = \left\{ x + iy \mid x > x_0, \left| \frac{y - y_0}{x - x_0} \right| < K \right\}.$$

Entonces la integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$ *converge uniformemente en* $S(K)$.

Demostración. Definamos β mediante la ecuación.

72) $$\beta(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t)\, dt - \int_0^\infty e^{-z_0 t} f(t)\, dt, \qquad \text{si } x \geq 0.$$

Según el Teorema 9-36, podemos escribir

73) $$\int_0^x e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^x e^{-(z-z_0)t} d\beta(t).$$

La igualdad 73) es válida para todo complejo z y para todo $x \geq 0$. Observemos que $\beta(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir t_0 de manera que

74) $$|\beta(t)| < \varepsilon', \qquad \text{para todo } t \geq t_0,$$

siendo $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon/(1 + \sqrt{1 + K^2})$. A la vista de 73), el teorema quedará probado si podemos demostrar que $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ implica

75) $$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t} d\beta(t) \right| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } z \text{ en } S(K).$$

Para ello utilizamos el método de integración por partes y obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t}\, d\beta(t) = e^{-(z-z_0)t_2}\beta(t_2) - e^{-(z-z_0)t_1}\beta(t_1)$$
$$+ (z - z_0) \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t}\beta(t)\, dt.$$

Cuando $z \in S(K)$, tenemos $x > x_0$ y por tanto $|e^{-(z-z_0)t}| = e^{-(x-x_0)t} \leq 1$. Utilizando esta desigualdad en unión de 74), obtenemos

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t}\, d\beta(t) \right| \leq \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon'|z - z_0| \int_{t_1}^{t_2} e^{-(x-x_0)t}\, dt$$
$$= 2\varepsilon' + \varepsilon' \frac{|z - z_0|}{x - x_0} \left(e^{-(x-x_0)t_1} - e^{-(x-x_0)t_2}\right)$$
$$< 2\varepsilon' \left(1 + \frac{|z - z_0|}{x - x_0}\right) = 2\varepsilon'(1 + \sec\theta),$$

donde $\theta = \arg(z - z_0)$. (Ver Fig. 15-2.) Ya que $\sec\theta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} < \sqrt{1 + K^2}$, tenemos $2\varepsilon'(1 + \sec\theta) < 2\varepsilon'(1 + \sqrt{1 + K^2}) < \varepsilon$. Esto demuestra 75).

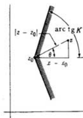


Fig. 15-2. El sector $S(K)$ con vértice en z_0.

Como quiera que todo punto del semiplano $x > x_0$ está situado dentro de *algún* sector $S(K)$ con vértice en x_0, podemos enunciar el siguiente corolario de Teorema 15-31:

15—32 Teorema. *Si la integral* $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt$ *converge para* $z = z_0 = x_0 + iy_0$, *también converge para cada* $z = x + iy$ *en el semiplano* $x > x_0$.

Nota. La convergencia puede ser o no uniforme en el semiplano $x > x_0$. Asimismo, la integral puede o no ser convergente en los puntos de la recta $x = x_0$ distintos del z_0.

El inf. del conjunto de todos los x_0 tales que $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$ converge para $z = z_0 + iy_0$ se llama la *abscisa de convergencia* de la integral y se representa por $\sigma(f)$. [La abscisa puede ser $-\infty$, pero no puede ser $+\infty$ debido a la restricción 71)]. El semiplano $x > \sigma(f)$ se llama *semiplano de convergencia* de la integral.

15—33 Teorema. *Designemos por* $\sigma(f)$ *la abscisa de convergencia de la integral*

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

Para cada $z = x + iy$ *con* $x > \sigma(f)$, *existe la derivada* $F'(z)$ *y viene dada por la integral*

76)
$$F'(z) = -\int_0^\infty e^{-zt}\, t f(t)\, dt.$$

La integral de 76) *converge uniformemente en todo sector* $S(K)$ *interior al semiplano* $x > \sigma(f)$.

Nota. La aplicación reiterada de este teorema nos dice que F tiene derivadas de cualquier orden y que vienen dadas por la fórmula

77)
$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-zt} t^n f(t)\, dt,$$

si z pertenece al semiplano de convergencia.

Demostración. Primero, establecemos la convergencia de la integral 76) en

el semiplano $x > \sigma(f)$. Para hacerlo, consideremos $z_0 = x_0 + iy_0$, donde $x_0 > \sigma(f)$, definamos β por medio de 72), y apliquemos el Teorema 9-36 para escribir

78)
$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-zt}f(t)\,dt &= \int_0^T te^{-(z-z_0)t}\,d\beta(t)\\ &= Te^{-(z-z_0)T}\beta(T) - \int_0^T \beta(t)\,d(te^{-(z-z_0)t})\\ &= Te^{-(z-z_0)T}\beta(T) - \int_0^T e^{-(z-z_0)t}\beta(t)\,dt\\ &\quad + (z-z_0)\int_0^T t\beta(t)e^{-(z-z_0)t}\,dt.\end{aligned}$$

La función β está acotada, pongamos $|\beta(t)| \leq M$ si $t \geq 0$. Si $z = x + iy$, siendo $x > x_0$, podemos elegir $h > 0$ de manera que $x_0 < x_0 + h < x$. Entonces, para $t \geq 0$, tenemos

$$|e^{-(z-z_0)t}\,t\beta(t)| \leq Mte^{-(x-x_0)t} \leq Mte^{-ht},$$

y el criterio M de Weierstrass nos dice que la integral $\int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}t\beta(t)\,dt$ converge (en realidad, converge *uniformemente* en el semiplano $x \geq x_0 + h$). Cuando $T \to +\infty$ en 78), cada término del segundo miembro tiende hacia un límite y esto establece la convergencia de la integral de 76) siempre que $x > x_0$. Pero, ya que x_0 sólo está sujeto a la restricción $x_0 > \sigma(f)$, se deduce que esa integral converge para cada z en el semiplano $x > \sigma(f)$. Aplicando el Teorema 15-31 a esa integral, encontramos que converge *uniformemente* en todo sector $S(K)$ interior a este semiplano.

Para probar la existencia de la derivada $F'(z)$ y la validez de 76), escribimos $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde

$$u(x, y) = \int_0^\infty e^{-tx}\cos ty\,f(t)\,dt, \qquad v(x, y) = -\int_0^\infty e^{-tx}\operatorname{sen} ty\,f(t)\,dt.$$

También podemos escribir $-\int_0^\infty e^{-zt}t\,f(t)\,dt = U(x, y) + iV(x, y)$, donde

$$U(x, y) = -\int_0^\infty te^{-tx}\cos ty\,f(t)\,dt, \qquad V(x, y) = \int_0^\infty te^{-tx}\operatorname{sen} ty\,f(t)\,dt.$$

Según lo que acabamos de demostrar, las integrales para U y V convergen uniformemente en todo sector $S(K)$ interior al semiplano $x > \sigma(f)$. Por otra parte, esas integrales son también el resultado de la diferenciación bajo el signo integral (con respecto a x) de las integrales para u y v. Luego, según el

teorema 14-24, debe ser $U = D_1 u$ y $V = D_1 v$. Análogamente, $V = -D_2 u$ y $U = D_2 v$. De esto se deduce que $D_1 u = D_2 v$ y $D_2 u = -D_1 v$. En otras palabras, u y v satisfacen las igualdades de Cauchy-Riemann en todo el semiplano $x > \sigma(f)$. Puesto que las derivadas parciales (siendo iguales a U y V) son continuas (según el Teorema 14-22), se deduce del Teorema 6-25 que existe la derivada $F'(z)$ para cada z en este semiplano. Además, según el Teorema 6-24, tenemos

$$F'(z) = D_1 u(x, y) + i D_1 v(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$$

$$= -\int_0^\infty te^{-zt} f(t)\, dt.$$

Y con esto queda demostrado el teorema.

15-21 Fórmula de inversión para transformadas de Laplace.

15—34 Teorema. *Sea c un número positivo tal que la integral*

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

converge absolutamente para cada $z = x + iy$ siendo $x > c$. Sea t un punto en el cual f satisface una de las condiciones «locales» a) o b) del teorema de la integral de Fourier (Teorema 15-24). *Entonces, para cada $a > c$, tenemos*

79) $$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t} F(a + iv)\, dv.$$

Nota. La integral del segundo miembro puede expresarse como una *integral de contorno* tomada a lo largo de un segmento rectilíneo que une $a - iT$ con $a + iT$, en cuyo caso 79) se escribe así:

80) $$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to +\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} e^{zt} F(z)\, dz.$$

Algunas veces se usa el símbolo $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}$ como una abreviación de $\lim_{T\to+\infty} \int_{a-iT}^{a+iT}$.

Demostración. Consideremos $g(t) = e^{-at} f(t)$ si $t \geq 0$, $g(t) = 0$ si $t < 0$. Podemos entonces aplicar la fórmula 54) con lo que obtenemos

$$\frac{g(t+) + g(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iv(t-u)}\, du \right] dv.$$

Cuando esta fórmula se escribe en función de f, se convierte en

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t}\left[\int_0^{\infty} e^{(a+iv)u}f(u)\,du\right]dv,$$

que coincide con 79).

En el Capítulo 16 se da aún otra discusión de esta fórmula. (Ver Teorema 16-21).

EJERCICIOS

Sistemas ortonormales.

15-1. Deducir la desigualdad de Minkowski $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

15-2. Comprobar que el sistema trigonométrico 6) es ortonormal en $[0, 2\pi]$.

15-3. Demostrar que el método de Gram-Schmidt para los vectores (ver Ejercicio 11-1) puede aplicarse a un sistema de funciones linealmente independientes $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ para obtener un sistema ortogonal.

15-4. Si $x \in E_1$ y $n = 1, 2, \dots,$ consideremos $f_n(x) = (x^2-1)^n$ y definamos

$$\phi_0(x) = 1, \qquad \phi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(x).$$

Es evidente que ϕ_n es un polinomio. Se llama el *polinomio de Legendre* de orden n. Los cuatro primeros son

$$\phi_1(x) = x, \qquad \phi_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},$$
$$\phi_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - x, \qquad \phi_4(x) = \tfrac{35}{8}x_4 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}.$$

Deducir las siguientes propiedades de los polinomios de Legendre:

a) $\phi'_n(x) = x\phi'_{n-1}(x) + n\phi_{n-1}(x)$.

b) $\phi_n(x) = x\phi_{n-1}(x) + \dfrac{x^2-1}{n}\phi'_{n-1}(x)$.

c) $(n+1)\phi_{n+1}(x) = (2n+1)x\phi_n(x) - n\phi_{n-1}(x)$.

d) ϕ_n satisface la ecuación diferencial $[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$.

e) $[(1-x^2)\,\Delta(x)]'[m(m+1) - n(n+1)]\phi_m(x)\phi_n(x) = 0$, donde $\Delta = \phi_n\phi'_m - \phi_m\phi'_n$.

f) El conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ es ortogonal en $[-1, 1]$.

g) $\displaystyle\int_{1-}^{1} \phi^2\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} \phi_{n-1}^2\,dx.$

h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \phi_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}.$

15-5. Sea $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ortonormal en $[a, b]$ y supongamos que este conjunto es completo para S. Si $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ y $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n\phi_n(x)$, perteneciendo f y g a S, demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{b}_n$ converge y tiene una suma igual a (f, g). [*Indicación:* $4fg = (f + \bar{g})^2 - (f - \bar{g})^2$].

Series trigonométricas de Fourier.

15-6. Supongamos que $f \in R$ en $[-\pi, \pi]$ y que tiene período 2π. Demostrar que la serie de Fourier generada por f adopta las siguientes formas particulares bajo las condiciones que se establecen:

a) Si $f(-x) = f(x)$ cuando $0 < x < \pi$, entonces

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad \text{siendo} \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt.$$

b) Si $f(-x) = -f(x)$ cuando $0 < x < \pi$, entonces

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \qquad \text{siendo} \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt.$$

En los Ejercicios del 15-7 al 15-13, demostrar la validez de cada desarrollo en el intervalo indicado. *Sugerencia*: Utilizar el Ejercicio 15-6 y el Teorema 12-22 c) cuando sea posible.

15-7. a) $x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$, si $0 < x < 2\pi$.

b) $\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, si $0 \le x \le 2\pi$.

15-8. a) $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$, si $0 < x < \pi$.

b) $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, si $0 \le x \le \pi$.

15-9. a) $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} nx}{n}$, si $-\pi < x < \pi$.

b) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$, si $-\pi \le x \le \pi$.

15-10. $x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \operatorname{sen} nx}{n}\right)$, si $0 < x < 2\pi$.

15-11. a) $\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} 2nx}{4n^2 - 1}$, si $0 < x < \pi$.

b) $\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$, si $0 \le x \le \pi$.

15-12. a) $x \cos x = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \operatorname{sen} nx}{n^2 - 1}$, si $-\pi < x < \pi$.

b) $x \operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1}$, si $-\pi \leq x \leq \pi$.

15-13. a) $\log \left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, si $x \neq 2k\pi$ (k entero).

b) $\log \left| \cos \frac{x}{2} \right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n}$, si $x \neq (2k+1)\pi$.

c) $\log \left| \tan \frac{x}{2} \right| = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{2n-1}$, si $x \neq k\pi$.

15-14. Una sucesión $\{\overline{B}_n\}$ de funciones periódicas (de período 1) se define en E_1 como sigue:

$$\overline{B}_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi k x}{k^{2n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\overline{B}_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi k x}{k^{2n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

($\overline{B}_n$ se llama la *función de Bernoulli* de orden n). Demostrar que:

a) $\overline{B}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ si x no es entero. ($[x]$ es el mayor entero $\leq x$.)

b) $\int_0^1 \overline{B}_n(x)\, dx = 0$ si $n \geq 1$ y $\overline{B}'_n(x) = n\overline{B}_{n-1}(x)$ si $n \geq 2$.

c) $\overline{B}_n(x) = P_n(x)$ si $0 < x < 1$, siendo P_n el n-ésimo polinomio de Bernoulli. (Ver el Ejercicio 13-35 para la definición de P_n).

d) $\overline{B}_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

15-15. a) Demostrar que la fórmula de Parseval para series de Fourier ofrece el aspecto siguiente

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

b) Utilizar una serie de Fourier adecuada en unión de la fórmula de Parseval para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

15-16. Sea f una función de período 2π cuyos valores en $[-\pi, \pi]$ son

$f(x) = 1 \quad$ si $0 < x < \pi, \qquad f(x) = -1 \quad$ si $-\pi < x < 0,$

$f(x) = 0 \quad$ si $x = 0$ o $x = \pi.$

a) Demostrar que $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\,(2n-1)x}{2n-1}$, para todo x.

Este es un ejemplo de un tipo de series de Fourier que tienen una curiosa propiedad llamada *fenómeno de Gibbs*. Este ejercicio está pensado para ilustrar este fenómeno. En lo que sigue, $s_n(x)$ representa la n-ésima suma parcial de la serie de la parte a).

b) Demostrar que $s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\text{sen}\ 2nt}{\text{sen}\ t}\, dt.$

c) Demostrar que, en $(0, \pi)$, s_n tiene máximos locales en $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ y mínimos locales en $x_2, x_4, \ldots, x_{2n-2}$, siendo $x_m = \frac{1}{2}m\pi/n$ $(m = 1, 2, \ldots, 2n-1)$.

d) Demostrar que $s_n(\frac{1}{2}\pi/n)$ es el mayor de los números

$$s_n(x_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n-1.)$$

e) Interpretar $s_n(\frac{1}{2}\pi/n)$ como una suma de Riemann y probar que

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\ t}{t}\, dt.$$

El valor del límite de la parte e) es aproximadamente 1,179. Así pues, a pesar de que f tiene un salto igual a 2 en el origen, las gráficas de las curvas aproximantes s_n van aproximándose a un segmento vertical de longitud 2,358 en la vecindad del origen. Este es el fenómeno de Gibbs.

15-17. Si $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \text{sen}\ nx)$ y f es de variación acotada en $[0, 2\pi]$, demostrar que $a_n = O(1/n)$ y $b_n = O(1/n)$. *Indicación:* Escribir $f = g - h$, siendo g y h crecientes en $[0, 2\pi]$. Entonces

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, d(\text{sen}\ nx) - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} h(x)\, d(\text{sen}\ nx).$$

Aplicar ahora el Teorema 9-30.

15-18. Supongamos que $g \in R$ en $[a, \delta]$ para todo a en $(0, \delta)$ y que g satisface una condición de Lipschitz «por la derecha» en 0. (Ver la Nota que sigue al Teorema 15-15.) Demostrar que la integral impropia $\int_{0+}^{\delta} |g(t) - g(0+)|/t\, dt$ converge.

15-19. Utilizar el Ejercicio 15-18 para demostrar que la diferenciabilidad de f en un punto implica la convergencia de su serie de Fourier en dicho punto.

15-20. Supongamos que $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \text{sen}\ nx)$ y sea $\{\sigma_n\}$ la sucesión de medias aritméticas de las sumas parciales de esa serie, como se definió en 37). Demostrar que:

a) $\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k \cos kx + b_k \text{sen}\ kx).$

b) $$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2\,dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$$
$$- \frac{\pi}{2}a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2)$$
$$+ \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2(a_k^2 + b_k^2).$$

c) Si f es continua en $[0, 2\pi]$ y tiene período 2π, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) = 0.$$

15-21. El teorema de Fejér puede emplearse para probar que una función de variación acotada en $[0, 2\pi]$ tiene una serie de Fourier convergente utilizando el Ejercicio 15-17, junto con el siguiente:

Teorema de Hardy y Landau. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *una serie cuyos términos satisfacen una desigualdad de la forma*

$$|f_n(x)| < \frac{M}{n}, \qquad \textit{para todo } x \textit{ en } [a, b].$$

Consideremos $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ *y* $\sigma_n(x) = (1/n) \sum_{k=1}^{n} s_k(x)$. *Si, para algún* x *en* $[a, b]$ *existe el límite* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ *y tiene el valor* $s(x)$, *entonces la serie* $\sum f_n(x)$ *converge y tiene por suma* $s(x)$. *Si, además, la sucesión* $\{\sigma_n\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$, *la serie* $\sum f_n(x)$ *también converge uniformemente en* $[a, b]$.

Esbozo de la demostración: Si $m > n$, tenemos la identidad

$$(m - n)s_m(x) - (m - n)s(x) = m(\sigma_m(x) - s(x)) - n(\sigma_n(x) - s(x))$$
$$+ \sum_{r=n+2}^{m} (r - 1 - n) f_r(x).$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$, elegir N de modo que $n > N$ implique $|\sigma_n(x) - s(x)| < \varepsilon$. Cuando $m > n > N$ la identidad origina

$$|s_m(x) - s(x)| < \frac{m+n}{m-n}\varepsilon + \frac{M}{n(m-n)} \sum_{r=n+2}^{m} (r - 1 - n)$$
$$= \frac{m+n}{m-n}\varepsilon + \frac{M}{n(m-n)} \sum_{k=1}^{m-n-1} k$$
$$< \frac{m+n}{m-n}\varepsilon + \frac{M}{n}\frac{(m-n)^2}{m-n}$$
$$= \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{(m/n - 1)} + M\left(\frac{m}{n} - 1\right).$$

Tomar $m > 6/\sqrt{\varepsilon}$, $m > (1 + 2\sqrt{\varepsilon})N$, elegir n que satisfaga $m/(1 + 2\sqrt{\varepsilon}) < n < m/(1 + \sqrt{\varepsilon})$. Entonces $|s_m(x) - s(x)| < \varepsilon + (2 + 2M)\sqrt{\varepsilon}$. (Obsérvese que N es independiente de x si $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$).

Integrales de Fourier y transformadas de Laplace.

15-22. Si f satisface las hipótesis del teorema de la integral de Fourier, demostrar que:

a) Si f es par, esto es, si $f(-t) = f(t)$ para todo t, entonces

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos vx\left[\int_0^\infty f(u)\cos vu\,du\right]dv.$$

b) Si f es impar, esto es, si $f(-t) = -f(t)$ para todo t, entonces

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} vx\left[\int_0^\infty f(u)\operatorname{sen} vu\,du\right]dv.$$

Utilizar el teorema de la integral de Fourier para calcular las integrales impropias de los Ejercicios 15-23 al 15-25. *Sugerencia*: Hacer uso del Ejercicio 15-22 cuando ello sea posible.

15-23. $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} v \cos vx}{v}\,dv = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

15-24. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}e^{-|a|b}, \qquad \text{si } b > 0.$$

Indicación: Aplicar el Ejercicio 15-22 poniendo $f(u) = e^{-|b|u}$.

15-25. $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{1 + x^2}\,dx = \frac{a}{|a|}\frac{\pi}{2}e^{-|a|}, \qquad \text{si } a \neq 0.$$

15-26. Deducir las siguientes propiedades de la convolución, suponiendo que todas las funciones que entran en consideración son absolutamente integrables en $(-\infty, +\infty)$.

a) $f*g = g*f$.

b) $f*(g*h) = (f*g)*h = g*(f*h)$.

c) $\delta(f*g) = f*\delta g + g*\delta f$, donde $\delta f(t) = tf(t)$, $\delta g(t) = tg(t)$, etc.

15-27. Designemos por $F = Lf$ y $G = Lg$ las transformadas de Laplace de f y g, respectivamente. Indiquemos con c una constante positiva. Demostrar que para cada z en un semiplano conveniente tenemos:

a) $G(z) = \dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{z}{c}\right)$, si $g(t) = f(ct)$.

b) $G(z) = e^{-cz}F(z)$, si $g(t) = f(t - c)$ cuando $t \geq c$, $g(t) = 0$ cuando $t < c$.

c) $G(z) = (-1)^n F^{(n)}(z)$, si $g(t) = t^n f(t)$, $n = 1, 2, \ldots$.

d) $G(z) = z^n F(z) - \sum_{k=1}^{n} z^{n-k} f^{(k-1)}(0+)$, si $g(t) = f^{(n)}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$.

NOTA. En la parte d) se supone que $e^{-zt}f^{(k)}(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

15-28. Comprobar la siguiente tabla de transformadas de Laplace.

$f(t)$	$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt,$	$z = x + iy.$
$e^{\alpha t}$	$(z - \alpha)^{-1}$	$(x > \alpha)$
$\cos \alpha t$	$z/(z^2 + \alpha^2)$	$(x > 0)$
$\operatorname{sen} \alpha t$	$\alpha/(z^2 + \alpha^2)$	$(x > 0)$
$t^p e^{\alpha t}$	$\Gamma(p + 1)/(z - \alpha)^{p+1}$	$(x > \alpha,\ p > 0)$

15-29. Demostrar que la convolución $h = f * g$ adopta la forma

$$h(t) = \int_0^t f(x) g(t - x)\, dx$$

cuando f y g son ambas nulas en el eje real negativo. Utilizar el teorema de la convolución para transformadas de Fourier para demostrar que $L(f*g) = L(f)\cdot L(g)$.

15-30. Sea g continua en $[0, 1]$ y supongamos que $\int_0^1 t^n g(t)\,dt = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Demostrar que:

a) $\int_0^1 g(t)^2\,dt = \int_0^1 g(t)(g(t) - P(t))\,dt$ para todo polinomio P.

b) $\int_0^1 g(t)^2\,dt = 0$. [*Indicación*: Utilizar el Teorema 15-23].

c) $g(t) = 0$ para todo t en $[0, 1]$.

15-31. Sea f continua en $(0, +\infty)$ y supongamos que $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ converge para $s > \sigma(f)$. Si $s_0 > \sigma(f)$ y $a > 0$, demostrar que:

a) $F(s_0 + a) = a\int_0^\infty g(t) e^{-at}\,dt$, donde $g(x) = \int_0^x e^{-s_0 t} f(t)\,dt$.

b) Si $F(s_0 + na) = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $f(t) = 0$ para $t > 0$.

c) Si h es continua en $(0, +\infty)$ y si f y h tienen la misma transformada de Laplace, $f(t) = h(t)$ para todo $t > 0$.

15-32. Si $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ converge absolutamente para $s = s_0$, siendo $s_0 \geq 0$. Demostrar que:

a) F no puede ser una constante $\neq 0$.

b) F no puede ser un polinomio de grado positivo.

15-33. Designemos por p una constante positiva. Definamos $f(t) = t^{p-1}$ si $t > 0$, $f(t) = 0$ si $t \leq 0$. Demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt = \Gamma(p) z^{-p} \qquad \text{si } z = x + iy,\ x > 0.$$

15-34. Designemos por p y q dos constantes positivas. Si $t > 0$, definamos $f(t) = t^{p-1}$, $g(t) = t^{q-1}$, y pongamos $f(t) = g(t) = 0$ si $t \leq 0$.

a) Considerar $h = f * g$ y utilizar el teorema de la convolución para demostrar que

$$h(t) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\, t^{p+q-1}, \qquad \text{si } t > 0.$$

b) Utilizar la parte a) para deducir la fórmula

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

15-35. a) Hacer uso del Ejercicio 15-34 b) para deducir la fórmula.

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = 2\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx.$$

b) Efectuar en a) un cambio de variable adecuado y deducir la *fórmula de duplicación* de la función Gamma:

$$\Gamma(2p)\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\tfrac{1}{2}).$$

REFERENCIAS

15-1. CARSLAW, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.* 3.ª ed. London: Macmillan, 1930.

15-2. HARDY, G. H. y ROGOSINSKI, W. W., *Fourier Series* (Cambridge Tracts in Mathematics y Mathematical Physics, No. 38). Cambridge: University Press, 1950.

15-3. HOBSON, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series.* Cambridge: University Press, 1921.

15-4. JACKSON, D., *Fourier Series and Orthogonal Polynomials* (Carus Mathematical Monographs, No. 6). Menasha, Wisconsin: Mathematical Association of America, 1941.

15-5. VAN DER POL, B. y BREMMER, H., *Operational Calculus.* Cambridge: University Press, 1950.

15-6. ROGOSINSKI, W. W., *Fourier Series*, H. Cohn y F. Steinhardt, traductores. New York: Chelsea, 1950.

15-7. SZEGÖ, G., *Orthogonal Polynomials* (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 23). New York: American Mathematical Society, 1939.

15-8. TITCHMARSH, E. C., *Eigenfunction Expansions.* Oxford: University Press, 1946.

15-9. TITCHMARSH, E. C., *Theory of Fourier Integrals.* Oxford: University Press, 1937.

15-10. WIDDER, D., *The Laplace Transform.* Princeton: University Press, 1941.

15-11. WIENER, N., *The Fourier Integral.* Cambridge: University Press, 1933.

15-12. ZYGMUND, A., *Trigonometrical Series.* Warsaw, 1935.

CAPÍTULO 16

TEOREMA DE CAUCHY Y CÁLCULO DE RESIDUOS

16-1 Funciones analíticas. El concepto de derivada para funciones de variable compleja fué introducido en la última parte del Capítulo 6 (Definición 6-23). Las funciones que resultan ser más importantes en la teoría de variable compleja son aquellas que poseen derivada continua en cada punto de un conjunto abierto. Estas se llaman funciones *analíticas*.

16—1 DEFINICIÓN. *Sea $f = u + iv$ una función de variable compleja definida en un conjunto abierto S de E_2. Se dice que la función f es analítica en S si existe la derivada f' y es continua* * *en todo punto de S.*

NOTA. También se usa la expresión « f es analítica en un punto z_0 ». Esto indica que existe un entorno $N(z_0)$ en el que f es analítica. Puede ocurrir que una función posea derivada en un punto sin ser analítica en él. Por ejemplo, la función f definida por $f(z) = |z|^2$ tiene derivada en 0 pero no en otro punto de E_2.

En el Capítulo 6 ya se han dado algunos ejemplos de funciones analíticas. La función f definida mediante la ecuación $f(z) = z^n$ (donde n es un entero positivo) es analítica en todo E_2 y su derivada es $f'(z) = nz^{n-1}$. Cuando n es un entero negativo, la ecuación $f(z) = z^n$ si $z \neq 0$ define una función analítica en todo el plano complejo salvo en 0. Los polinomios son analíticos en todo E_2, y las funciones racionales son analíticas en todo el plano salvo en los puntos en los que el denominador se anula. La función exponencial definida por la fórmula $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, si $z = x + iy$, es analítica en todo E_2 y coincide con su derivada. Las funciones complejas seno y coseno (siendo combinaciones lineales de exponenciales) son también analíticas en todo E_2.

La función f definida por la ecuación $f(z) = \operatorname{Log} z$ si $z \neq 0$, donde $\operatorname{Log} z$ representa el logaritmo principal de z (ver Definición 1-36), es analítica en todo E_2 excepto para aquellos puntos $z = x + iy$ para los que $x \leq 0$ e $y = 0$. En esos puntos, el logaritmo principal deja de ser continuo.

---

* Puede demostrarse que la existencia de f' en S implica automáticamente la continuidad de f' en S (un hecho descubierto por GOURSAT en 1900). En consecuencia una función analítica puede definirse como aquella que tan sólo posee derivada en todo el conjunto S. No obstante, consideraremos la continuidad de f' como formando parte de la definición de analiticidad, ya que esto permite desarrollar con mayor facilidad algunas de las demostraciones.

Más adelante veremos que la analiticidad en un punto z_0 introduce una restricción muy severa a una función. Ella implica la existencia de *todas las derivadas superiores* en un entorno de z_0 y también garantiza la existencia de una serie de potencias convergente que representa la función en un entorno de z_0. Esto está en marcado contraste con el comportamiento de las funciones reales, en las que es posible que la primera derivada exista y sea continua y en cambio no exista segunda derivada.

16-2 Teorema de la integral de Cauchy. Un aspecto peculiar de la teoría de la derivada compleja es la forma con que la integración compleja interviene en ella. Ya en el siglo XIX, CAUCHY desarrolló la teoría de la integración compleja y la utilizó para demostrar que la analiticidad de f en z_0 implica la existencia de todas las derivadas superiores en un entorno de z_0. Hasta hoy nadie ha sido capaz de deducir este resultado sin el uso de la integración de contorno. El principal instrumento en esta clase de investigación es el *teorema de la integral de Cauchy*, que establece que la integral de contorno $\int_\Gamma f(z)\,dz$ vale 0 si Γ es una curva rectificable de Jordan, con tal de que f sea continua sobre Γ y sea derivable en toda la región interior de Γ. Queremos demostrar una versión menos exigente de este teorema en la que suponemos la analiticidad de f en una región un poco mayor. Esta hipótesis añadida, convierte el teorema de Cauchy en una consecuencia inmediata del teorema de Green.

16—2 TEOREMA. (*Teorema de la integral de Cauchy*). *Supongamos que $f = u + iv$ es analítica en una región S de E_2. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que tanto Γ como su región interior están contenidas íntegramente en S. En estas condiciones*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Demostración. Si escribimos $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\Gamma (v\,dx + u\,dy)$ y aplicamos el teorema de Green (Teorema 10-43) a cada integral real de línea, encontramos

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -\int_R (D_1v + D_2u)\,d(x, y) + i\int_R (D_1u - D_2v)\,d(x, y),$$

donde $R = I(\Gamma) \cup \Gamma$, siendo $I(\Gamma)$ la región interior de Γ. (Ver Fig. 16-1). La región R es un subconjunto de S (por hipótesis) y las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en R. (Ver Teorema 6-24). Por consiguiente, cada integral doble es 0. Como queríamos demostrar.

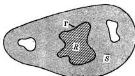


Fig. 16-1. Teorema de la integral de Cauchy.

A modo de recíproco del teorema de Cauchy, tenemos:

16—3 TEOREMA. *Sea $f = u + iv$ continua en una región abierta S de E_2 y supongamos que u y v admitan derivadas parciales D_1u, D_2u, D_1v, D_2v continuas en S. Si la integral de contorno $\int_\Gamma f(z)\,dz$ es nula para todo camino poligonal cerrado en S, entonces f es analítica en S.*

Demostración. Sean z_1 y z_2 dos puntos cualesquiera de S y $\Gamma(z_1, z_2)$ una curva poligonal que une z_1 con z_2. La hipótesis implica que las dos integrales de línea $\int_{\Gamma(z_1,z_2)} (u\, dx - v\, dy)$ e $\int_{\Gamma(z_1,z_2)} (v\, dx + u\, dy)$ son ambas independientes del camino para todo par de puntos z_1, z_2 elegidos en S. Según el Teorema 10-38, existen una función ϕ tal que $D_1\phi = u$, $D_2\phi = -v$, y una función ψ tal que $D_1\psi = v$, $D_2\psi = u$, en toda la región S. Pero $D_2u = D_{2,1}\phi$ y $D_1v = -D_{1,2}\phi$. Puesto que D_2u y D_1v se han supuesto continuas, debe ser $D_{2,1}\phi = D_{1,2}\phi$, lo que significa que $D_2u = -D_1v$. Del mismo modo, $D_2v = D_1u$. Por consiguiente las igualdades de Cauchy-Riemann son válidas en S y (según el Teorema 6-25) existe la derivada $f'(z)$ en cada punto z de S. La continuidad de la derivada se deduce de la continuidad de las parciales de u y v.

16-3 Deformación del contorno. En lo que sigue tendremos frecuentemente ocasión de considerar integrales de contorno tomadas a lo largo de curvas rectificables de Jordan que encierran uno o más puntos aislados en los cuales el integrando no es analítico. (Tales puntos se llaman «singularidades» del integrando.) En el Capítulo 9 encontrábamos un ejemplo, a saber, la integral $\int_{\Gamma[z]} (z - z_0)^{-1}\, dz$, que se utilizó para definir el número de giros del camino $\Gamma[z]$ con respecto a z_0. El integrando es, en este caso, analítico en todo E_2 excepto en z_0, donde la derivada no existe. En el Teorema 9-68 demostrábamos que el número de giros es $+1$ ó -1 probando que la curva Γ podía reemplazarse por un círculo C con centro en z_0 situado enteramente dentro de Γ, teniendo la integral a lo largo de C el mismo valor que la integral a lo largo de Γ. Usando exactamente el mismo tipo de razonamiento que el seguido en la demostración del Teorema 9-68, podemos demostrar el teorema siguiente:

16—4 TEOREMA. *Sea S una región abierta en E_2. Supongamos que $z_0 \in S$ y que exista un entorno $N(z_0) \subset S$ tal que f sea analítica en cada punto de $S - \overline{N}(z_0)$. Sea Γ una curva rectificable de Jordan, que contenga $N(z_0)$ en su interior, y tal que Γ y su región interna estén contenidas en S. Sea C un círculo con centro en z_0 situado enteramente dentro de Γ y también de $S - \overline{N}(z_0)$. Entonces*

$$\int_{\Gamma[z]} f(z)\, dz = \int_{C[w]} f(w)\, dw,$$

con tal que los caminos $\Gamma[z]$ y $C[w]$ estén orientados positivamente o ambos negativamente.

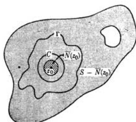


Fig. 16-2. Deformación del contorno.

Este teorema se expresa algunas veces diciendo que el valor de una integral de contorno a lo largo de una curva cerrada simple no varía deformando el contorno en un círculo, con la condición de que el contorno permanezca, durante la deformación, en el interior de la región de analiticidad del integrando. (Ver Fig. 16-2.) La utilidad del teorema radica en el hecho de que una integral a lo largo de un círculo es mucho más manejable que a lo largo de una curva de Jordan más general. Esto se pone de manifiesto en el teorema que sigue.

16-4 Fórmula de la integral de Cauchy.

16—5 TEOREMA. (*Fórmula de la integral de Cauchy*). *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que Γ y su región interior estén contenidas en S. Entonces para todo punto z_0 dentro de Γ, tenemos*

1) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

con tal que el camino $\Gamma[z]$ esté orientado positivamente.

NOTA. La fórmula 1) nos revela un fenómeno notable. Nos dice que los valores de una función analítica en el interior de una curva de Jordan están completamente determinados por sus valores sobre la misma curva.

Demostración. En virtud del Teorema 16-4, basta demostrar el teorema para el caso en el que $\Gamma[z]$ es un círculo orientado positivamente con centro en z_0. (El radio del círculo puede ser cualquiera, con tal que quede dentro de la curva de Jordan original.) Definamos una nueva función g en S como sigue:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), & \text{si } z \neq z_0, \\ 0, & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

En tal caso g es continua en toda la región S y tenemos

2) $$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g(z),$$

igualdad que es válida para todo z en S. Puesto que $g(z_0) = 0$, existe un entorno $N(z_0; \delta) \subset S$ tal que $|g(z)| < 1$ para cada z en dicho entorno. Tomemos el círculo Γ lo suficientemente pequeño para que su radio R sea menor que δ. Utilizando 2), podemos escribir

$$\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_{\Gamma[z]} \frac{1}{z - z_0}\, dz + f'(z_0) \int_{\Gamma[z]} dz + \int_{\Gamma[z]} g(z)\, dz$$

$$= 2\pi i f(z_0) + \int_{\Gamma[z]} g(z)\, dz.$$

Luego tenemos

$$\left| \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \int_{\Gamma[z]} g(z)\, dz \right| \leq 2\pi R$$

(según el Teorema 9-60). El número del primer miembro es independiente de R y por tanto debe ser 0, ya que el segundo miembro tiende a 0 cuando $R \to 0$.

16-5 Valor medio de una función analítica sobre un círculo. Apliquemos la fórmula de la integral de Cauchy al caso en que Γ es un círculo con centro en z_0 descrito por una función z, siendo

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad \text{si } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

siendo r el radio del círculo. La integral de 1) se convierte en

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f[z(t)]}{z(t) - z_0}\, dz(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z(t) - z_0}\, z'(t)\, dt.$$

Como $z'(t) = ire^{it} = i(z(t) - z_0)$, obtenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Este resultado puede interpretarse como un *Teorema del Valor Medio* que expresa el valor de f en el centro de Γ como un «promedio» de los valores sobre Γ. Es válido siempre que f es analítica en cada punto de Γ y de su región interior.

16-6 Fórmula integral de Cauchy para la derivada de un función analítica. La derivación bajo el signo integral en la fórmula de Cauchy 1) (con respecto a z_0) da origen a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz.$$

Vamos a demostrar que esta integral representa la derivada $f'(z_0)$.

16—6 Teorema. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que Γ y su región interior estén contenidas en S. Entonces, para todo punto z_0 dentro de Γ, tenemos*

3) $$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz,$$

con tal que el camino $\Gamma[z]$ esté orientado positivamente.

Demostración. Si z_1 es interior a Γ, $z_1 \neq z_0$, podemos aplicar 1) dos veces y escribir

$$\frac{fz_1 - fz_0}{(z_1) - (z_0)} = \frac{1}{2\pi i(z_1 - z_0)}\int_{\Gamma[z]} f(z)\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_0}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_0)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

$$+ \frac{(z_1 - z_0)}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_1)}\, dz.$$

Cuando $z_1 \to z_0$, el primer miembro tiende hacia $f'(z_0)$. Por consiguiente, para demostrar el teorema, basta probar que

4) $$\lim_{z_1 \to z_0} (z_1 - z_0) \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_1)} dz = 0.$$

Para esto tan sólo necesitamos demostrar que la integral que multiplica a $(z - z_0)$ permanece acotada cuando $z \to z_0$.

Supongamos que $|f(z)| \leq M$ para cada z en Γ, representemos por $\Lambda(\Gamma)$ la longitud de Γ, y consideremos $\delta = \inf \{|z - z_0| \; z \in \Gamma\}$. Entonces $\delta > 0$. Si $|z_1 - z_0| < \delta$ y $z \in \Gamma$, tenemos

$$|z - z_1| = |(z - z_0) - (z_1 - z_0)| \geq \delta - |z_1 - z_0|,$$

y en consecuencia

$$\left| \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_1)} dz \right| \leq \frac{M\Lambda(\Gamma)}{\delta^2(\delta - |z_1 - z_0|)}.$$

Como este segundo miembro permanece acotado cuando $z_1 \to z_2$, obtenemos 4) y por consiguiente 3).

16-7 Existencia de las derivadas superiores de una función analítica. El método demostrativo seguido en el teorema anterior puede utilizarse para establecer la existencia de la derivada segunda $f''(z_0)$ y, en realidad, de todas las derivadas superiores.

16—7 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que Γ y su región interior estén contenidas en S. Para todo punto z_0 dentro de Γ y para todo entero $n \geq 1$, existe la derivada $f^{(n)}(z_0)$ y viene dada por la integral.*

5) $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Demostración. Si z_1 es interior a Γ, $z_1 \neq z_0$, podemos aplicar 3) dos veces y escribir

$$\frac{f'(z_1) - f'(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{1}{2\pi i(z_1 - z_0)} \int_{\Gamma[z]} f(z) \left\{ \frac{1}{(z - z_1)^2} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right\} dz$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

$$+ \frac{z_1 - z_0}{2\pi i} \int_{\Gamma[z]} f(z) \frac{3(z - z_0) - 2(z_1 - z_0)}{(z - z_1)^2(z - z_0)^3} dz.$$

Razonando como en la demostración de Teorema 16-6, podemos demostrar que el último término tiende a 0 cuando $z_1 \to z_0$. Esto demuestra que

$$\lim_{z_1 \to z_0} \frac{f'(z_1) - f'(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz,$$

formando parte de la demostración la existencia del límite. Pero esto significa que existe $f''(z_0)$ y viene dada por la fórmula 5) poniendo $n = 2$. Con el mismo razonamiento y empezando con la fórmula para $n = 2$, podemos demostrar que existe $f'''(z_0)$ y viene dada por 5) cuando $n = 3$. El resultado para un n cualquiera se demuestra por inducción.

16-8 Desarrollos en serie de potencias para funciones analíticas. En el Teorema 13-24 demostrábamos que una serie de potencias convergente en un entorno $N(z_0)$ define una función que posee derivadas de todo orden en dicho entorno. Una tal función es por consiguiente analítica en z_0. Utilizando las fórmulas integrales del párrafo anterior, podemos demostrar el recíproco de este resultado.

16—8 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2 y sea z_0 un punto de S. Entonces, en todo entorno $N(z_0)$ tal que $N(z_0) \subset S$, puede representarse f mediante una serie de potencias convergente*

6) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

NOTA. Esto se conoce con el nombre de *desarrollo de Taylor* de f alrededor de z_0.

Demostración. Sea Γ un círculo con centro en z_0 y radio $r > 0$, habiendo elegido r de manera que Γ y su región interior estén contenidos en S. Si z_1 es un punto cualquiera dentro de Γ, podemos emplear la fórmula de Cauchy y escribir

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{z - z_1} dz,$$

donde el camino $\Gamma[z]$ está orientado positivamente. Puesto que $|z_1 - z_0| < |z - z_0|$ si $z \in \Gamma$, tenemos

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - [(z_1 - z_0)/(z - z_0)]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

siendo la serie uniformemente convergente en Γ. Por ser f acotada en Γ tenemos

$$\frac{f(z)}{z - z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} (z_1 - z_0)^n \quad \text{(uniformemente en } \Gamma).$$

Según el Teorema 13-12, podemos integrar término a término y obtener

$$f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Lo que demuestra el teorema.

Los Teoremas 16-8 y 13-24 reunidos nos dicen que una condición necesaria y suficiente para que una función compleja f sea analítica en un punto z_0 es que f sea representable por una serie de potencias en algún entorno de z_0. Cuando existe una tal serie de potencias, su radio de convergencia es, por los menos, tan grande como el radio de cualquier entorno $N(z_0)$ que esté contenido en la región de analiticidad de f. Ya que el círculo de convergencia no puede contener en su interior ningún punto en el que f no sea analítica, se deduce que el radio de convergencia es exactamente igual a la distancia desde z_0 hasta el punto más próximo en el que f deja de ser analítica.

Esta observación explica algunas de las dificultades que se presentan cuando intentamos encontrar desarrollos en series de potencias para funciones reales de una variable real. Por ejemplo, consideremos $f(x) = 1/(1 + x^2)$ si x es real. Esta función está definida en todo E_1 y posee derivada de cualquier orden en cada punto de E_1. Asimismo, posee un desarrollo en serie de potencias en torno al origen, a saber,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

No obstante, la representación de f mediante esta serie, tan sólo es válida en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Desde el punto de vista de la teoría de variable real, no hay nada en el comportamiento de f que explique este hecho. Pero cuando examinamos el caso en el plano complejo, vemos al momento que la función f definida por $f(z) = 1/(1 + z^2)$ (si $z^2 + 1 \neq 0$) es analítica en todo E_2 salvo en los puntos $z = \pm i$. Por consiguiente, el radio de convergencia del desarrollo en serie de potencias en torno al 0 debe ser 1.

EJEMPLOS.

Los siguientes desarrollos en serie de potencias son válidos para todo z en E_2:

a) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, b) $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

c) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

16-9 Ceros de las funciones analíticas. Si f es analítica en z_0 y si $f(z_0) = 0$, el desarrollo de Taylor de f en torno a z_0 no tiene término constante y adopta por tanto la forma siguiente:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Esto es válido para cada z de algún entorno $N(z_0)$. Si f es idénticamente nula en este entorno [esto es, si $f(z) = 0$ para todo z en $N(z_0)$], cada $a_n = 0$, ya que $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. Si en cambio f no es idénticamente nula en ese entorno, existirá en el desarrollo un primer coeficiente a_k no nulo, en cuyo caso el punto z_0 se llama un *cero* de f de orden k. A continuación demostramos que existe un entorno de z_0 que no contiene ningún otro cero de f.

16—9 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Supongamos asimismo que $f(z_0) = 0$ para algún punto z_0 de S y que f no es idénticamente nula en ningún entorno de z_0. Existe entonces un entorno reducido $N'(z_0) \subset S$ en el cual f no toma el valor* 0.

Demostración. El desarrollo de Taylor en torno a z_0 se convierte en $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $k \geq 1$, $g(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \cdots$, y $g(z_0) = a_k \neq 0$. Ya que g es continua en z_0, existe un entorno $N(z_0) \subset S$ en el que g no se anula. Por consiguiente, f nunca es cero en el correspondiente entorno reducido $N'(z_0)$.

Este teorema tiene varias consecuencias importantes. Por ejemplo, podemos utilizarlo para demostrar que una función analítica en una región abierta S no puede ser nula en ningún subconjunto abierto no vacío de S sin ser idénticamente nula en toda la región S.

16—10 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Designemos por A el conjunto de aquellos puntos z de S para los que existe un entorno $N(z)$ en el cual f es idénticamente nula y consideremos $B = S - A$. Entonces uno de los dos conjuntos A o B es vacío y el otro es el mismo S.*

Demostración. Tenemos $S = A \cup B$, siendo A y B conjuntos disjuntos. El conjunto A es abierto por su misma definición. Si demostramos que B es también abierto, se deducirá de la conexión de S que por lo menos uno de los dos conjuntos A o B es vacío. (Ver Definiciones 8-29 y 8-39.)

Para probar que B es abierto, sea z_0 un punto de B y consideremos las dos posibilidades: $f(z_0) \neq 0$, $f(z_0) = 0$. Si $f(z_0) \neq 0$, existe un entorno $N(z_0) \subset S$ en el que f no se anula. Cada punto de este entorno debe pertenecer por tanto a B. Luego, z_0 es un punto interior de B si $f(z_0) \neq 0$. Pero, si $f(z_0) = 0$, el Teorema 16-9 nos proporciona un entorno reducido $N'(z_0) \subset S$ en el cual f no se anula. Esto significa que $N(z_0) \subset B$. Luego, en los dos casos z_0 es un punto interior de B. Por consiguiente, B es abierto y uno de los dos conjuntos A o B debe ser vacío.

16-10 Teorema de identidad para funciones analíticas.

16—11 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Sea T un subconjunto de S que tenga un punto de acumulación z_0 en S. Si $f(z) = 0$ para todo z de T, entonces $f(z) = 0$ para todo z de S.*

Demostración. Existe una sucesión $\{z_n\}$, cuyos términos son puntos de T, de manera que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Por la continuidad $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} (z_n) = 0$. Vamos a demostrar a continuación que existe un entorno de z_0 en el que f es idénticamente nula. Supongamos que no existe tal entorno. En tal caso el Teorema 16-9 nos dice que debe existir un entorno reducido $N'(z_0)$ en el que f no toma el valor 0. Pero esto es imposible, ya que todo entorno reducido contiene puntos de T. En consecuencia debe existir un entorno de z_0 en el que f se anula idénticamente. Luego el conjunto A del Teorema 16-10 no puede ser vacío. Por lo tanto, $A = S$, y esto significa que $f(z) = 0$ para todo z de S.

Como corolario tenemos el siguiente resultado importante, citado algunas veces como el *teorema de identidad para funciones analíticas*:

16—12 TEOREMA. *Sean f y g analíticas en una región abierta S de E_2. Si T es un subconjunto de S que tiene un punto de acumulación z_0 en S y si $f(z) = g(z)$ para todo z en T, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en S.*

Demostración. Aplicar el Teorema 16-11 a $f - g$.

16-11 Desarrollo de Laurent para funciones analíticas en un anillo.

16—13 DEFINICIÓN. *Si $z_0 \in E_2$ y $0 < r_1 < r_2$, el conjunto*

$$A(z_0; r_1, r_2) = \{z \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

se llama un anillo en torno a z_0.

Si una función es analítica en un anillo $A(z_0; r_1, r_2)$, pero *no* lo es en todo el entorno $N(z_0; r_2)$, no puede ser representada por una serie de potencias de $z - z_0$. LAURENT descubrió (en 1843) que una tal función puede representarse siempre por medio de *dos* series, una de las cuales es una serie de potencias de $z - z_0$ y la otra una serie de potencias de $(z - z_0)^{-1}$. El teorema de Laurent es el siguiente:

16—14 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en un anillo $A(z_0; r_1, r_2)$. En tal caso, para todo punto z en este anillo, tenemos*

7) $$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

donde

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

Los coeficientes vienen dados por las fórmulas

8) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

siendo el camino $\Gamma[z]$ cualquier círculo orientado positivamente con centro en z_0 y radio r, donde $r_1 < r < r_2$. La función f_1 (llamada parte regular de f en z_0) es analítica en el entorno $N(z_0; r_2)$. La función f_2 (que se llama la parte principal de f en z_0) es analítica en el conjunto $E_2 - N(z_0; r_1)$.

NOTA. La suma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ se escribe también $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y se denomina *desarrollo de Laurent* de f en torno a z_0. La fórmula 8) demuestra que una función puede tener a lo sumo un desarrollo de Laurent en un anillo dado.

Demostración. Supongamos $z_1 \in A(z_0; r_1, r_2)$ y sea $N(z_1; r)$ un entorno contenido en $A(z_0; r_1, r_2)$. Tracemos un círculo C con centro en z_0 y radio R_1, siendo $r_1 < R_1 < |z_1 - z_0| - r$. El camino a lo largo de C y orientado positivamente.

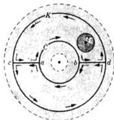


Fig. 16-3. Demostración del teorema de Laurent.

designémoslo por C^+, y el orientado negativamente por C^-. Análogamente, sea K un círculo con centro en z_0 y radio R_2, siendo $|z_1 - z_0| + r < R_2 < r_2$,

y designemos por K^+ el camino a lo largo de K y orientado positivamente. Entonces $N(z_1; r) \subset A(z_0; R_1, R_2)$. Elijamos en C dos puntos a y b diametralmente opuestos, y en K otros dos c y b (a, b, c, d alineados), de manera que los segmentos rectilíneos $L[b, d]$ y $L[c, a]$ no tengan puntos comunes con el entorno $N(z_1; r)$. (Ver Fig. 16-3).

Los caminos C^- y K^+, en unión de los segmentos de recta, determinan dos curvas de Jordan Γ_1 y Γ_2 orientadas positivamente, una de las cuales precisamente, sea Γ_1, contiene el entorno $N(z_1; r)$ en su interior. Según la fórmula de la integral de Cauchy, tenemos

$$2\pi i f(z_1) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz.$$

Por otra parte, el entorno $N(z_1; r)$ es exterior a Γ_2 y por tanto

$$\int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz = 0.$$

Podemos escribir, por consiguiente

9) $$2\pi i f(z_1) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz.$$

Pero $\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_{K^+} + \int_{C^-}$, ya que las integrales a lo largo de los segmentos rectilíneos se destruyen unas con otras. En consecuencia, la 9) se convierte en

10) $$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K^+} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz = f_1(z_1) + f_2(z_1),$$

donde para abreviar hemos puesto $f_1(z_1)$ y $f_2(z_2)$. La integral correspondiente a $f_1(z_1)$ puede expresarse como una serie de potencias de $z_1 - z_0$ razonando exactamente como en la demostración del Teorema 16-8. Así pues tenemos

$$f_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n,$$

siendo

11) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (n = 0, 2, 1, \dots).$$

En virtud del Teorema 16-4, el círculo K^+ puede reemplazarse en 11) por cualquier otro círculo orientado positivamente (con centro en z_0) que esté contenido en el anillo $A(z_0; r_1, r_2)$. (Es importante hacer notar que no podemos escribir $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ en este caso, a menos que f sea también analítica en todo el interior de K).

La integral que corresponde a $f_2(z_1)$ se trata en forma análoga, salvo que utilizamos el desarrollo en serie

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1-z_0}\frac{1}{1-[(z-z_0)/(z_1-z_0)]} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{n-1}}{(z_1-z_0)^n},$$

que converge uniformemente en C ya que $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ si $z \in C$. Multiplicando por $f(z)$ e integrando término a término, obtenemos

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-z_1}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z_1-z_0)^{-n},$$

donde

12) $$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{1-n}}\,dz \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

El círculo C^+ puede reemplazarse en 12) por cualquier otro círculo concéntrico orientado positivamente contenido en el anillo $A(z_0; r_1, r_2)$. Si tomamos el mismo círculo en 11) y en 12) y ponemos a_{-n} en lugar de b_n, ambas fórmulas pueden combinarse en una sola, como se indicó en 8). Como z_1 era un punto cualquiera del anillo, queda 8) demostrada.

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es una serie de potencias de $z-z_0$ que converge para cada z en el anillo $A(z_0; r_1, r_2)$, debe tener un círculo de convergencia que incluye la totalidad del entorno $N(z_0; r_2)$ y, por lo tanto, la función f_1 definida por esta serie debe ser analítica en dicho entorno. Análogamente, podemos demostrar que la función f_2 es analítica en el conjunto $E_2 - \bar{N}(z_0; r_1)$ considerando f_2 como una función compuesta $f_2(z) = g[h(z)]$, donde $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ y $h(z) = (z-z_0)^{-1}$.

16-12 Singularidades aisladas.

16—15 DEFINICIÓN. *Se dice que un punto z_0 es una singularidad aislada de f si*

a) *f es analítica en un entorno reducido de z_0,*

b) *f no es analítica en z_0.*

NOTA. No es necesario que f esté definida en z_0.

En virtud de a), existe un anillo $A(z_0; r_1, r_2)$ en el que f es analítica y tiene un desarrollo (único) de Laurent, sea éste

13) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

[Ya que el radio interior r_1 puede ser arbitrariamente pequeño, la 13) es válida en el entorno reducido $N'(z_0; r_2)$]. La singularidad z_0 se clasifica en uno de los tres tipos siguientes (dependiendo de la forma de la parte principal):

Si no aparecen potencias negativas en 13), esto es, si $a_{-n} = 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, el punto z_0 se llama una *singularidad evitable*. En este caso, puede evitarse la singularidad definiendo f en z_0 atribuyéndole el valor $f(z_0) = a_0$. (Ver el Ejemplo 1 que sigue).

Si $a_{-n} \neq 0$ para algún n pero $a_{-m} = 0$ para todo $m > n$, el punto z_0 se llama un *polo* de orden n. En este caso, la parte principal se reduce a una suma finita, a saber,

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Un polo de orden 1 se llama ordinariamente polo *simple*.

Finalmente, si $a_{-n} \neq 0$ para una infinidad de valores de n, el punto z_0 se llama una *singularidad esencial*.

EJEMPLO 1. Consideremos $f(z) = \operatorname{sen} z/z$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta función es analítica en todo el plano excepto en 0. (Es discontinua en 0, ya que $\operatorname{sen} z/z \to 1$ cuando $z \to 0$.) El desarrollo de Laurent en torno a 0 tiene la forma

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \cdots.$$

Como no aparecen potencias negativas de z, el punto 0 es una singularidad evitable. Si definimos de nuevo f dándole el valor 1 en 0, la función así modificada se hace analítica en 0.

EJEMPLO 2. Consideremos $f(z) = \operatorname{sen} z/z^5$ si $z \neq 0$. El desarrollo de Laurent en torno a 0 es

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^5} = z^{-4} - \frac{1}{3!} z^{-2} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} z^2 + \cdots.$$

En este caso, el punto 0 es un polo de orden 4. Obsérvese que no se ha dicho nada respecto al valor de f *en* 0.

EJEMPLO 3. Consideremos $f(z) = e^{1/z}$ si $z \neq 0$. El punto 0 es una singularidad esencial, ya que

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \cdots.$$

16—16. TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2 y definamos g mediante la ecuación $g(z) = 1/f(z)$ si $f(z) \neq 0$.*

Entonces f tiene un cero de orden k en el punto z_0 de S si g tiene un polo de orden k en z_0, y recíprocamente.

Demostración. Si f tiene un cero de orden k en z_0, existe un entorno reducido $N'(z_0)$ en el cual f no se anula. En el entorno $N(z_0)$ tenemos $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$, siendo $h(z) \neq 0$ si $z \in N(z_0)$. Luego, $1/h$ es analítica en $N(z_0)$ y tiene un desarrollo

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots, \qquad \text{donde } b_0 = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0.$$

Por consiguiente, si $z \in N'(z_0)$, tenemos

$$g(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k h(z)} = \frac{b_0}{(z - z_0)^k} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots,$$

y, por tanto, z_0 es un polo de orden k para g. El recíproco se demuestra de la misma manera.

16-13 Residuo de una función en un punto singular aislado. Si z_0 es un punto singular aislado de f, existe un entorno reducido $N'(z_0)$ en el cual f tiene un desarrollo de Laurent, sea éste

14) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

El coeficiente a_{-1} que multiplica a $(z - z_0)^{-1}$ se llama el *residuo* de f en z_0 y se representa con el símbolo

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

La fórmula 8) nos dice que

15) $$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

si Γ es un círculo orientado positivamente con centro en z_0 tal que $\Gamma \subset N'(z_0)$.

Resulta relativamente fácil en muchos casos calcular el residuo en un punto sin emplear la integración. Por ejemplo, si z_0 es un polo simple, podemos usar la fórmula 14) para obtener

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Análogamente, si z_0 es un polo de orden 2, es fácil demostrar que

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = g'(z_0), \qquad \text{siendo } g(z) = (z - z_0)^2 f(z).$$

En casos parecidos a éstos, en los que el residuo se puede calcular fácilmente, la igualdad 15) nos brinda un poderoso método para calcular integrales de contorno a lo largo de caminos cerrados.

CAUCHY fue el primero en comprobar que la teoría de los residuos tiene gran número de aplicaciones. (Algunas de éstas serán discutidas en párrafos posteriores). Todas éstan basadas en el *teorema del residuo* (*Cauchy*), que es una generalización de 15) al caso en el cual el camino Γ incluye más de un punto singular aislado.

16-14 Teorema del residuo. (Cauchy).

16—17 TEOREMA. *Sea f una función analítica en todos los puntos de una región abierta S de E_2, excepto en un número finito de puntos singulares aislados. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que Γ y su región interior estén contenidas en S. Supongamos que Γ contiene un cierto número de singularidades de f en su interior, sean éstas $z_1, \ldots, z_n$, pero que no existen singularidades sobre Γ. Tenemos entonces*

17) $$\int_{\Gamma[z]} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

con tal que el camino $\Gamma[z]$ esté orientado positivamente.

Demostración. Cuando solamente existe una singularidad z_1 dentro de Γ, el Teorema 16-4 nos permite reemplazar el contorno Γ por un círculo alrededor de z_1, y la fórmula 17) se reduce a la 15).

El teorema general puede demostrarse por inducción respecto al número n de singularidades. Indicaremos el camino para deducir el caso $n = 2$ a partir del caso $n = 1$.

Supongamos que existen exactamente dos singularidades z_1 y z_2 dentro de Γ. En tal caso existe un entorno reducido $N'(z_1)$ contenido dentro de Γ en el que podemos escribir $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, siendo f_1 la parte regular y f_2 la parte principal de f en z_1. Según el teorema de Laurent, f_2 es analítica en todo E_2 excepto en z_1, y por lo tanto, en particular, f_2 es analítica en $S - \{z_1\}$. Sea ahora g la función definida en $S - \{z_2\}$ como sigue:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) - f_2(z), & \text{si } z \in S,\ z \neq z_1,\ z \neq z_2, \\ f_1(z_1), & \text{si } z = z_1. \end{cases}$$

De este modo g es analítica en $S - \{z_2\}$.

Calculemos la integral $\int_\Gamma g(z)\, dz$ de dos maneras. Ya que z_1 no está sobre Γ, podemos escribir

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz - \int_\Gamma f_2(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz - 2\pi i \operatorname*{Res} f_2(z)$$
$$= \int_\Gamma f(z)\,dz - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z).$$

Por otra parte, podemos reemplazar Γ por un círculo C orientado positivamente con centro en z_2 y contenido dentro de Γ, pero de tal manera que z_1 no sea interior a C. Obtenemos entonces

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = \int_C g(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z).$$

Comparando las dos expresiones de $\int_\Gamma g(z)\,dz$, obtenemos

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Esto demuestra 17) para $n = 2$. El caso general se demuestra en forma parecida.

En los próximos párrafos se ofrecen algunas de las aplicaciones del Teorema de Cauchy referente al residuo.

16-15 Diferencia entre el número de ceros y el número de polos en el interior de un contorno cerrado.

16—18 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2 excepto, acaso, en un número finito de polos. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que Γ y su región interior estén contenidas en S. Supongamos además que ninguno de los ceros o polos de f estén sobre Γ. Sean $z_1, \ldots, z_q$ los ceros de f que están dentro de Γ y designemos por n_k el orden de z_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$. Sean $p_1, \ldots, p_r$ los polos de f que están dentro de Γ y designemos por m_k el orden de p_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Se verifica*

18)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{q} n_k - \sum_{k=1}^{r} m_k.$$

NOTA. El segundo miembro de 18) es la diferencia entre el número de ceros y el número de polos situados en el interior de Γ, con tal que cada cero o càda polo se cuente tantas veces como indique su orden.

Demostración. Supongamos que en un entorno reducido de un punto z_0 tenemos $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, siendo g analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, y n un entero (positivo o negativo). Existe entonces un entorno reducido de z_0 en el que podemos escribir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

siendo el cociente g'/g analítico en z_0. Esta igualdad nos dice que un cero de f de orden n es un polo simple de f'/f con residuo n. Análogamente, un polo de f de orden n es un polo simple de f'/f con residuo $- n$. Este hecho, unido al teorema del residuo, da lugar a 18).

16-16 Cálculo de integrales reales mediante los residuos. El teorema del residuo puede emplearse algunas veces para calcular ciertos tipos de integrales de Riemann reales. Se dispone de varias técnicas, que dependen de la forma particular de la integral a calcular. Vamos a describir brevemente dos de esos métodos.

El primer método se refiere a integrales de la forma $\int_0^{2\pi} R(\text{sen } t, \cos t)\, dt$, donde R es una función racional*, de dos variables.

16—19 TEOREMA. *Sea R una función racional de dos variables y consideremos*

$$f(z) = R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)$$

siempre que la expresión del segundo miembro sea finita. Designemos por $\Gamma[z]$ el círculo unidad orientado positivamente con centro en 0. Entonces

19)
$$\int_0^{2\pi} R(\text{sen } t, \cos t)\, dt = \int_{\Gamma[z]} \frac{f(z)}{iz}\, dz,$$

con tal que f no tenga polos sobre Γ.

Demostración. Una función z que describa $\Gamma[z]$ viene dada por $z(t) = e^{it}$ si $0 \le t \le 2\pi$. Para esta función tenemos

$$z'(t) = iz(t), \qquad \frac{z(t)^2 - 1}{2iz(t)} = \text{sen } t, \qquad \frac{z(t)^2 + 1}{2z(t)} = \cos t,$$

y 19) se deduce inmediatamente del Teorema 9-62.

---

* Una función P definida en $E_2 \times E_2$ mediante una ecuación de la forma

$$P(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{q} a_{m,n} z_1^m z_2^n$$

se llama *polinomio de dos variables*. Los coeficientes $a_{m,n}$ pueden ser reales o complejos. El cociente de dos de esos polinomios se llama *función racional de dos variables*.

NOTA. Para calcular la integral del segundo miembro de 19), necesitamos tan sólo calcular los residuos del integrando en aquellos polos que son interiores a Γ.

EJEMPLO. Calcular $I = \int_0^{2\pi} dt/(a + \cos t)$, donde a es real, $|a| > 1$. Aplicando 19), encontramos

$$I = -2i \int_\Gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

El integrando tiene polos simples en las raíces de la ecuación $z^2 + 2az + 1 = 0$. Estos son los puntos $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$, $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$. Los correspondientes residuos R_1 y R_2 vienen dados por

$$R_1 = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_1 - z_2},$$

$$R_2 = \lim_{z \to z_2} \frac{z - z_2}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_2 - z_1}.$$

Si $a > 1$, z_1 es interior a Γ, z_2 es exterior a Γ, e $I = 4\pi/(z_1 - z_2) = 2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$. Si $a < -1$, z_2 es interior a Γ, z_1 es exterior a Γ, y obtenemos $I = -2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$.

Muchas integrales impropias pueden tratarse por medio del teorema siguiente:

16—20 TEOREMA. *Designemos por $T = \{x + iy \mid y \geq 0\}$ el semiplano superior. Sea S una región abierta en E_2 que contiene T y supongamos que f es analítica en S, excepto, acaso, en un número finito de polos. Supongamos además que ninguno de estos polos está sobre el eje real. Si*

20) $$\lim_{R \to +\infty} \int_0^\pi f(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta}\, d\theta = 0,$$

entonces el valor principal de Cauchy de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)$ existe y es igual a

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

donde $z_1, \ldots, z_n$ son los polos de f contenidos en T.

Demostración. Sea C el camino orientado positivamente formado tomando una porción del eje real desde $-R$ a R y un semicírculo en T que tenga

$[-R, R]$ como diámetro, habiendo tomado R lo bastante grande para que incluya todos los polos $z_1, \ldots, z_n$. Entonces

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \int_C f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + i \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta}\, d\theta.$$

Cuando $R \to +\infty$, la última integral tiende hacia cero y obtenemos

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

NOTA. La igualdad 20) se satisface automáticamente si f es el cociente de dos polinomios, pongamos, por ejemplo, $f = P/Q$, con tal que el grado de Q exceda al grado de P por lo menos en 2. (Ver Ejercicio 16-34.)

EJEMPLO. Para calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(1 + x^4)$, consideremos $f(z) = 1/(z^4 + 1)$. Entonces $P(z) = 1$, $Q(z) = 1 + z^4$, y, por lo tanto, la 20) es válida. Los polos de f son las raíces de la ecuación $1 + z^4 = 0$. Estas son z_1, z_2, z_3, z_4, siendo

$$z_k = e^{(2k-1)\pi i/4} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

De éstos, tan sólo z_1 y z_2 están en el semiplano superior. El residuo en z_1 es

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i}.$$

De la misma manera, encontramos $Res_{z=z_2} f(z) = (1/4i)e^{\pi i/4}$. Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{2\pi i}{4i} (e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}) = \pi \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

16-17 Aplicación del teorema del residuo a la fórmula de inversión para transformadas de Laplace. El teorema siguiente es, en muchos casos, el método más fácil para calcular la integral de contorno que aparece en la fórmula de inversión para las transformadas de Laplace. (Ver Teorema 15-34.)

16—21 TEOREMA. *Sea F una función analítica en todo E_2, excepto, en un número finito de polos. Supongamos que existen tres constantes positivas M, b, c tales que*

$$|F(z)| < \frac{M}{|z|^c}, \qquad \textit{siempre que } |z| \geq b.$$

Sea a un número positivo tal que la recta vertical $x = a$ no contenga polos de F y designamos por $z_1, \ldots, z_n$ los polos de F situados a la izquierda de esa recta. Entonces, para cada número real $t > 0$, tenemos

21) $$\lim_{R\to+\infty}\int_{a-iR}^{a+iR} e^{zt}F(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k}[e^{zt}F(z)].$$

Demostración. Aplicamos el teorema del residuo al camino orientado positivamente Γ representado en la Fig. 16-4, donde el radio R de la porción circular se toma lo bastante grande para que en ella queden incluidos todos los polos de F que están a la izquierda de la recta $x = a$ y también $R > b$.

El teorema del residuo nos da

22) $$\int_\Gamma e^{zt}F(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k}[e^{zt}F(z)].$$

Escribamos ahora

$$\int_\Gamma = \int_{\Gamma(A,B)} + \int_{\Gamma(B,C)} + \int_{\Gamma(C,D)} + \int_{\Gamma(D,E)} + \int_{\Gamma(E,A)},$$

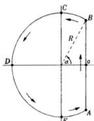


Figura 16-4.

donde A, B, C, D, E son los puntos indicados en la Fig. 16-4, y representemos estas integrales por I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. Vamos a demostrar que $I_k \to 0$ para $R \to +\infty$ cuando $k > 1$.

Ante todo, tenemos

$$|I_2| < \frac{M}{R^c}\int_\alpha^{\pi/2} e^{tR\cos\theta}R\,d\theta \le \frac{M e^{at}}{R^{c-1}}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{Me^{at}}{R^c}R\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{a}{R}\right).$$

Como R arc sen $(a/R) \to a$ cuando $R \to +\infty$, se deduce que $I_2 \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Por el mismo procedimiento demostramos $I_5 \to 0$ cuando $R \to +\infty$.

A continuación, consideremos I_3. Tenemos

$$|I_3| < \frac{M}{R^{c-1}}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR\cos\theta}\,d\theta = \frac{M}{R^{c-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-tR\operatorname{sen}\phi}\,d\phi.$$

Pero, sen $\phi \ge 2\theta/\pi$ si $0 \le \phi \le \pi/2$, y por lo tanto

$$|I_3| < \frac{M}{R^{c-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-2tR\phi/\pi}\,d\phi = \frac{\pi M}{2tR^c}(1-e^{-tR}) \to 0 \quad \text{cuando } R \to +\infty.$$

Análogamente, encontramos $I_4 \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Pero, cuando $R \to +\infty$ en 22), el segundo miembro es independiente de R. Luego, $\lim_{R\to+\infty} I_1$ existe y tiene el valor indicado en 21).

EJEMPLO. Consideremos $F(z) = z/(z^2 + a^2)$, donde a es real. En este caso F tiene polos simples en $\pm\, ia$. Como $z/(z^2 + a^2) = \frac{1}{2}[1/(z + ia) + 1/(z - ia)]$, encontramos

$$\operatorname*{Res}_{z=ia} [e^{zt}F(z)] = \tfrac{1}{2}e^{iat}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-ia} [e^{zt}F(t)] = \tfrac{1}{2}e^{iat}.$$

Por lo tanto el límite de 21) tiene el valor $2\pi i \cos at$. Del Teorema 15-34. se deduce que la función f, continua en $(0, +\infty)$, cuya transformada de Laplace es F, viene dada por $f(t) = \cos at$.

16-18 Funciones analíticas uno a uno. En el Capítulo 7 se indicó que el Jacobiano J_f de una función compleja f está relacionado con la derivada f' mediante la igualdad

$$J_f(z) = |f'(z)|^2$$

en aquellos puntos en que f' es continua. Los resultados concernientes a las funciones vectoriales con Jacobiano no nulo se aplican, por consiguiente, a las funciones analíticas con derivada no nula. En particular, el Teorema 7-4 nos dice que si f es analítica en un conjunto abierto S de E_2 y si $f'(z_0) \neq 0$ para algún z_0 en S, existe un entorno $N(z_0)$ en el cual f es uno a uno. La Nota que sigue al Teorema 7-4 demuestra que este es un teorema local y no global. Deducimos ahora una condición para que una función sea uno a uno.

16—22 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Sea Γ una curva de Jordan regular a trozos tal que Γ y su región interior estén contenidas dentro de S. Si f es uno a uno sobre Γ, también lo es en el interior de Γ.*

Demostración. Supongamos que el camino a lo largo de Γ orientado positivamente está descrito por una función z regular a trozos definida en $[a, b]$. Sea $C = f(\Gamma)$ la imagen de Γ originada por f. El hecho de ser f uno a uno sobre Γ demuestra que C es una curva de Jordan. Sea w la función compuesta dada por

$$w(t) = f[z(t)], \qquad \text{si } a \le t \le b.$$

Entonces $w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$ en los puntos donde existe $z'(t)$, y por lo tanto w es una función regular a trozos que describe C. Elijamos un punto w_0 en el interior de C. Vamos a demostrar que existe un punto z_0, y sólo uno, dentro de Γ en el cual $f(z_0) = w_0$.

A tal fin sea $g(z) = f(z) - w_0$ y consideremos la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma[z]} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\,dz,$$

donde $\Gamma[z]$ está orientado positivamente. El valor de esta integral es un entero N no negativo que cuenta el número de ceros de g dentro de Γ (ya que g no tiene polos dentro de Γ). El teorema quedará demostrado si probamos que $N = 1$. La integral relativa a N puede expresarse como una integral de Riemann (según el Teorema 9-62) y obtenemos

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'[z(t)]z'(t)}{f[z(t)] - w_0}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{w'(t)}{w(t) - w_0}\,dt.$$

Pero la integral para el número de giros del camino $C[w]$ con respecto al punto w_0 es

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C[w]} \frac{1}{w - w_0}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{w'(t)}{w(t) - w_0}\,dt = N.$$

Según el Teorema 9-68, el valor de esta integral es $+1$ ó -1. Ya que $N \geq 0$, resulta que $N = +1$ y el teorema está demostrado.

NOTA. En el curso de la demostración hemos demostrado que el número de giros del camino $C[w]$ con respecto a w_0 es $+1$. Por consiguiente, $C[w]$ está orientado positivamente. Dicho de otra manera, f aplica los caminos orientados positivamente sobre caminos orientados positivamente. Si bien hemos demostrado esto únicamente para caminos regulares a trozos, el resultado es válido para caminos rectificables arbitrarios en virtud del Teorema 9-63. Algunas veces se expresa esta propiedad diciendo que f *conserva el sentido*.

A continuación, deducimos una condición necesaria global para que una función sea uno a uno.

16—23 TEOREMA. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2. Si f es uno a uno en S, la derivada $f'(z) \neq 0$ para cada z en S.*

Demostración. Supongamos $f'(z_0) = 0$ para algún z_0 en S. Vamos a demostrar que esto conduce a una contradicción. Sea $w_0 = f(z_0)$. Entonces, en algún entorno $N(z_0) \subset S$, tenemos el desarrollo de Taylor de la forma

$$f(z) - w_0 = \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

y, por tanto, $f - w_0$ tienen e z_0 un cero de orden $N \geq 2$. Pero, si Γ es un círculo alrededor de z_0 situado dentro de $N(z_0)$, su imagen $C = f(\Gamma)$ es una curva

de Jordan regular a trozos que contiene w_0 en su interior. El mismo razonamiento que se aplicó en el teorema anterior demuestra que $N = 1$. Esta contradicción implica $f'(z_0) \neq 0$ para todo punto z_0 en S.

16-19 Aplicaciones conformes. Sean Γ_1 y Γ_2 dos arcos regulares de Jordan en E_2 que se cortan en un punto z_0. Sean z_1 y z_2 las funciones regulares, definidas respectivamente en $[a, b]$ y $[c, d]$, que describen Γ_1 y Γ_2. Supongamos que $z_0 = z_1(t_1)$, $z_0 = z_2(t_2)$, $z'_1(t_1) \neq 0$, $z'_2(t_2) \neq 0$. Entonces la diferencia $\arg [z'_2(t_2)] - \arg [z'_1(t_1)]$ es el ángulo comprendido entre Γ_1 y Γ_2 en z_0. (Ver Fig. 16-5.)

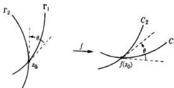


Fig. 16-5. Aplicación conforme

16—24 DEFINICIÓN. *Sea f una función compleja definida en una región abierta S de E_2. Se dice que f es conforme en el punto z_0 de S. si todo par de arcos regulares de Jordan Γ_1 y Γ_2 que se cortan en z_0, es aplicado por f sobre un par correspondiente de arcos regulares de Jordan $C_1 = f(\Gamma_1)$ y $C_2 = f(\Gamma_2)$ de tal manera que el ángulo formado por C_1 y C_2 en $f(z_0)$ difiera del ángulo formado por Γ_1 y Γ_2 en z_0 en $2\pi n$, siendo n un entero.*

16—25 TEOREMA. *Sea f analítica en una región abierta S de E_2. En cada punto z_0 de S en el cual $f(z'_0) \neq 0$, es f conforme.*

Demostración. Sean z_1 y z_2 las funciones regulares definidas en $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente, que describen los arcos de Jordan Γ_1 y Γ_2 que se cortan en z_0, siendo $z_0 = z_1(t_1) = z_2(t_2)$, $z'_1(t_1) \neq 0$, $z'_2(t_2) \neq 0$. Sean w_1 y w_2 las funciones compuestas dadas por

$$w_1(t) = f[z_1(t)] \quad \text{si } t \in [a, b], \quad w_2(t) = f[z_2(t)] \quad \text{si } t \in [c, d].$$

Entonces ocurre que

$$w'_1(t_1) = f'(z_0)z'_1(t_1) \neq 0 \quad \text{y} \quad w'_2(t_2) = f'(z_0)z'_2(t_2) \neq 0.$$

Según el Teorema 1-31, existen dos enteros n_1 y n_2 tales que

$$\arg [w_1'(t_1)] = \arg [f'(z_0)] + \arg [z_1'(t_1)] + 2\pi n_1,$$
$$\arg [w_2'(t_2)] = \arg [f'(z_0)] + \arg [z_2'(t_2)] + 2\pi n_2.$$

Restando estas igualdades obtenemos el resultado deseado.

Los ángulos no son conservados en los puntos donde la derivada es cero. Por ejemplo, si $f(z) = z^2$, una recta por el origen que forma un ángulo α con el eje real es aplicada por f sobre una recta que forma un ángulo 2α con dicho eje real. En general, cuando $f'(z_0) = 0$, el desarrollo de Taylor de f adopta la forma

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k [a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \cdots],$$

donde $k \geq 2$. Utilizando esta igualdad, es fácil ver que los ángulos entre curvas que se cortan en z_0 quedan multiplicados por un factor k en la aplicación determinada por f.

Entre los ejemplos importantes de aplicaciones conformes figuran las *transformaciones de Möbius*. Se trata de funciones f definidas así: Si $a, b, c, d,$ son cuatro números complejos tales que $ad - bc \neq 0$, definimos

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{23}$$

siempre que $cz + d \neq 0$. Es conveniente definir f en todo el plano ampliado E_2^* poniendo $f(-d/c) = \infty$ y $f(\infty) = a/c$. (Si $c = 0$, estas dos últimas igualdades se reemplazan por la igualdad única $f(\infty) = \infty$.) Ahora puede resolverse 23) respecto a z en función de $f(z)$ obteniendo

$$z = \frac{-df(z) + b}{cf(z) - a}.$$

Esto significa que existe la función inversa f^{-1} y viene dada por

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a},$$

teniendo en cuenta que $f^{-1}(a/c) = \infty$ y $f^{-1}(\infty) = -d/c$. Así vemos pues que las transformaciones de Möbius son aplicaciones uno a uno de E_2^* sobre sí mismo. Son también conformes en cada valor finito $z \neq -d/c$, ya que

$$f'(z) = \frac{bc - ad}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Una de las propiedades más importantes de estas aplicaciones es que aplican círculos sobre círculos (incluyendo las rectas como casos particulares de

círculos). La demostración de esto se esboza en el Ejercicio 16-40. En los ejercicios del final del capítulo se describen otras propiedades de las transformaciones de Möbius.

EJERCICIOS

Fórmulas integrales de Cauchy; desarrollos de Taylor.

16-1. Supongamos que f es analítica en un entorno $N(z_0; R)$. Si $0 < r < R$, designemos por $C(r)$ el círculo de radio r con centro en z_0 y por $M(r)$ el máximo de $|f|$ sobre $C(r)$. Deducir las *desigualdades de Cauchy*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M(r)\, n!}{r^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

16-2. Una función analítica en todo E_2 se llama función *entera* (ejemplos de estas son los polinomios, el seno, el coseno y la exponencial).

a) Demostrar el *teorema de Liouville*: *Si f es una función entera que está acotada en E_2, es una constante.*

b) Demostrar la siguiente versión más fuerte del teorema de Liouville: *Si f es una función entera tal que* $\lim_{z\to\infty} |f(z)|/|z| = 0$, *entonces f es una constante.*

c) ¿Qué puede afirmarse respecto a una función entera que satisface una desigualdad de la forma $|f(z)| \leq M|z|^c$ para todo z en E_2, siendo $c > 0$?

16-3. Sea $f = u + iv$ una función analítica en un entorno $N(z_0; R)$. Si $0 < r < R$, demostrar que

$$f'(z_0) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) e^{-i\theta}\, d\theta$$

16-4. Supongamos que f tiene el desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) z^n$, válido en $N(0; R)$. Consideremos

$$g(z) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(ze^{2\pi ik/p}).$$

Demostrar que g tiene el desarrollo de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(pn) z^{pn},$$

válido en $N(0; R)$.

16-5. Supongamos que f tiene el desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, válido en $N(0; R)$. Consideremos $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Si $0 < r < R$ y si $|z_0| < r$, demostrar que

$$s_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\frac{z^{n+1} - z_0^{n+1}}{z - z_0}\,dz,$$

donde C es el círculo orientado positivamente con centro en 0 y radio r.

16-6. Supongamos que f es analítica en el disco cerrado $\overline{N}(0; 1)$. Si $|z_0| < 1$, demostrar que

$$(1 - |z_0|^2)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{1 - z\bar{z}_0}{z - z_0}\,dz,$$

donde G es el círculo unidad de centro en 0 y orientado positivamente. Deducir la desigualdad

$$(1 - |z_0|^2)|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

16-7. Dados los desarrollos de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, válidos en $\overline{N}(0;\ R_1)$ y $N(0;\ R_2)$, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z}\, g\left(\frac{z_0}{z}\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z_0^n$$

si $|z_0| < R_1 R_2$, siendo Γ el círculo orientado positivamente de radio R_1 y centro en 0.

16-8. Supongamos que f es analítica en $N(0;\ R)$. Designemos por C el círculo orientado positivamente con centro en 0 y radio r, siendo $0 < r < R$. Si z_0 es interior a C demostrar que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left\{\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - r^2/\bar{z}_0}\right\} dz.$$

Si $z_0 = Ae^{i\alpha}$, demostrar que este resultado se reduce a la fórmula

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - A^2)f(re^{i\theta})}{r^2 - 2rA\cos(\alpha - \theta) + A^2}\,d\theta.$$

Igualando las partes reales de esta igualdad se obtiene una expresión llamada la *fórmula de la integral de Poisson.*

16-9. Supongamos que f tiene el desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, válido en $N(z_0;\ R)$.

a) Si $0 \le r < R$, deducir la *identidad de Parseval*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

b) Utilizar a) para deducir la desigualdad $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le M(r)^2$, donde $M(r)$ es el máximo de $|f|$ sobre el círculo $|z - z_0| = r$.

16-10. Probar el *teorema del módulo máximo*: *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de E_2 y que no es constante. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que Γ y su región interior estén contenidas en S. Si $|f(z)| \le M$ sobre Γ, entonces $|f(z)| < M$ en todos los puntos interiores a Γ.*

[*Indicación*: Suponer que $|f(z_0)| = M$ en algún punto interior. Utilizando la notación del Ejercicio 16-9, deducir la desigualdad $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \leq |a_0|^2$. Esto implica que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, y por lo tanto f es constante en un entorno de z_0].

16-11. Sean Γ una curva rectificable de Jordan y g una función compleja, definida y continua sobre Γ. Para cada z_0 interior a Γ, definamos $f(z_0)$ mediante la igualdad

$$f(z_0) = \int_\Gamma \frac{g(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Demostrar que f tiene derivada en cada punto z_0 interior a Γ dada por

$$f'(z_0) = \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^2}\, dz.$$

Demostrar también que existe la derivada segunda dentro de Γ y que

$$f''(z_0) = 2\int_\Gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^3}\, dz$$

si z_0 es interior a Γ. [*Indicación*: Razonar como en la demostración del Teorema 16-6.]

16-12. Probar el *teorema del límite* (*Weierstrass*): *Dada una sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones analíticas en una región abierta* S *de* E_2. *Sea* Γ *una curva rectificable de Jordan tal que* Γ *y su región interior* $I(\Gamma)$ *estén contenidas en* S, *y supongamos que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente sobre* Γ. *En estas condiciones,* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $I(\Gamma)$ *y la función límite* f *es analítica en* $I(\Gamma)$.

Esbozo de la demostración: La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $I(\Gamma)$ se deduce aplicando la condición de Cauchy (Teorema 13-4) en unión del teorema del módulo máximo. Para demostrar que f es analítica en $I(\Gamma)$, elegir z_0 en $I(\Gamma)$ y poner

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Debido a la convergencia uniforme, se puede reemplazar en esta fórmula f_n por f. (Ver el Teorema 13-12). Ahora aplicar el Ejercicio 16-11.

16-13. Demostrar el *lema de Schwarz*: *Sea* f *analítica en el entorno* $N(0; 1)$. *Supongamos que* $f(0) = 0$ *y* $|f(z)| \leq 1$ *si* $|z| < 1$. *Entonces*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad y \quad |f(z)| \leq |z|, \quad si\ |z| < 1.$$

Si $|f'(0)| = 1$ *o si* $|f(z_0)| = |z_0|$ *por lo menos para un* z_0 *en* $N(0; 1)$, *entonces*

$$f(z) = e^{i\alpha}z, \quad \textit{siendo } \alpha \textit{ real.}$$

[*Indicación*: Aplicar el teorema del módulo máximo a g, siendo $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = f(z)/z$ si $z \neq 0$].

Desarrollos de Laurent, singularidades, residuos.

16-14. Sean f y g analíticas en una región abierta S de E_2. Sea Γ una curva rectificable de Jordan tal que Γ y su región interior estén contenidas en S. Supongamos que $|g(z)| < |f(z)|$ para todo z sobre Γ.

a) Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

[*Indicación*: Considerar $m = \inf\{|f(z)| - |g(z)| \mid z \in \Gamma\}$. Entonces $m > 0$ y por lo tanto $|f(z) + tg(z)| \geq m > 0$ para cada t en $[0, 1]$ y cada z sobre Γ. Se considera ahora

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\,dz, \qquad \text{si } 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces ϕ es continua, y por tanto constante, en $[0, 1]$. Así pues, $\phi(0) = \phi(1)$].

b) Utilizar a) para demostrar que f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros dentro de Γ (*teorema de Rouché*).

16-15. Sea p un polinomio de grado n, por ejemplo $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, siendo $a_n \neq 0$. Tomar en el teorema de Rouché, $f(z) = a_nz^n$, $g(z) = p(z) - f(z)$, y demostrar que p tiene exactamente n ceros en E_2 (*teorema fundamental del Algebra*).

16-16. Sea f analítica en el disco cerrado $\overline{N}(0; 1)$ y supongamos $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Demostrar que existe un punto z_0 y solo uno en $N(0; 1)$ en el que $f(z_0) = z_0$.

[*Indicación*: Utilizar el teorema de Rouché].

16-17. Designemos por $p_n(z)$ la n-ésima suma parcial del desarrollo de Taylor $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ Utilizando el teorema de Rouché (o de otra manera), demostrar que para todo $r > 0$ existe un N (que solo depende de r) tal que $n \geq N$ implica $p_n(z) \neq 0$ para todo z en $N(0; r)$.

16-18. Demostrar que cada uno de los siguientes desarrollos de Laurent es válido en la región que se indica:

a) $$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \qquad \text{si } 1 < |z| < 2.$$

b) $$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1 - 2^{n-1}}{z^n}, \qquad \text{si } |z| < 2.$$

16-19. Para cada t fijo en E_2, definamos $J_n(t)$ como el coeficiente de z^n en el desarrollo de Laurent

$$e^{(z-1/z)t/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)z^n.$$

Demostrar que para $n \geq 0$ tenemos

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t \operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta$$

y que $J_{-n}(t) = (-1)^nJ_n(t)$. Deducir el desarrollo en serie de potencias

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{2}t)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \qquad (n \geq 0).$$

La función J_n se llama la *función* de *Bessel* de orden n.

16-20. Demostrar el *teorema de Riemann*: *Si z_0 es una singularidad aislada de f y si $|f|$ está acotado en algún entorno reducido $N'(z_0)$, el punto z_0 es una singularidad evitable.*

[*Indicación*: Aproximar las integrales que dan los coeficientes a_n del desarrollo de Laurent de f y demostrar que $a_n = 0$ para cada $n < 0$.]

16-21. Demostrar el teorema de *Casorati-Weierstrass*: *Supongamos que z_0 es una singularidad esencial de f y sea c un número complejo arbitrario. Para todo $\varepsilon > 0$ y todo entorno $N(z_0)$, existe un punto z_0 en $N(z_0)$ tal que $|f(z) - c| < \varepsilon$.*

[*Indicación*. Suponer el teorema falso y llegar a una contradicción aplicando el Ejercicio 16-20 a g, siendo $g(z) = 1/[f(z) - c]$.

16-22. (*El punto del infinito*). Se dice que una función f es analítica en el ∞ si la función g definida por la ecuación $g(z) = f(1/z)$ es analítica en el origen. Análogamente, decimos que f tiene un cero, un polo, una singularidad evitable, o una singularidad esencial en el ∞ si g tiene un cero, un polo, etc., en 0. El teorema de Liouville (ver Ejercicio 16-2) establece que una función que es analítica en todo E_2^* debe ser constante. Demostrar que

a) f es un polinomio, si y únicamente si, la única singularidad de f en E_2^* es un polo en ∞, y en este caso el orden del polo es igual al grado del polinomio.

b) f es una función racional si no tiene otras singularidades que polos en E_2^*, y recíprocamente.

16-23. Probar las siguientes reglas prácticas para el cálculo de residuos:

a) Si z_0 es un polo de primer orden de f,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z).$$

b) Si z_0 es un polo de orden 2 de f.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = g'(z_0), \qquad \text{siendo } g(z) = (z - z_0)^2 f(z).$$

c) Supongamos que f y g son ambas analíticas en z_0, que $f(z_0) \neq 0$ y que z_0 es un cero de primer orden de g. Demostrar que

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{[g(z)]^2} = \frac{f'(z_0)g'(z_0) - f(z_0)g''(z_0)}{[g'(z_0)]^3}$$

d) Si f y g cumplen las condiciones de c), salvo que z_0 es un cero de segundo orden de g, entonces es

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{6f'(z_0)g''(z_0) - 2f(z_0)g'''(z_0)}{3[g''(z_0)]^2}.$$

16-24. Calcular los residuos y los polos de f si

a) $f(z) = \dfrac{ze^z}{z^2 - 1}$, b) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$,

c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z \cos z}$, d) $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$,

e) $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^n}$ (donde n es un entero positivo).

16-25. Si $C(z_0; r)$ representa la circunferencia orientada positivamente con centro en z_0 y radio r, demostrar que

a) $\displaystyle\int_{C(0;4)} \frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\,dz = 6\pi i$, b) $\displaystyle\int_{C(0;2)} \frac{2z}{z^2+1}\,dz = 4\pi i$,

c) $\displaystyle\int_{C(0;2)} \frac{z^3}{z^4-1}\,dz = 2\pi i$, d) $\displaystyle\int_{C(2;1)} \frac{e^z}{(z-2)^2}\,dz = 2\pi i e^2$.

Calcular las integrales en los Ejercicios del 16-26 al 16-33 mediante los residuos.

16-26. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$, si $0 < b < a$.

16-27. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t\,dt}{1-2a\cos t + a^2} = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}$, si $a^2 < 1$.

16-28. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3t\,dt}{1-2a\cos t + a^2} = \frac{\pi(a^2-a+1)}{1-a}$, si $0 < a < 1$.

16-29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t\,dt}{a+b\cos t} = \frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^2}$, si $0 < b < a$.

16-30. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

16-31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^2}\,dx = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$.

16-32. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{200}$.

16-33. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n} \Big/ \operatorname{sen}\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)$, si m, n son enteros, $0 < m < n$.

16-34. Demostrar que la fórmula 20) es válida si f es el cociente de dos polinomios, pongamos por ejemplo $f = P/Q$, donde el grado de Q excede al de P en 2 unidades o más.

16-35. Demostrar que la fórmula 20) es válida si $f(z) = e^{imz}P(z)/Q(z)$, donde $m > 0$ y P y Q son polinomios tales que el grado de Q excede al de P en una unidad o más. Esto hace posible calcular integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

por el método descrito en el Teorema 16-20.

16-36. Utilizar el método sugerido en el Ejercicio 16-35 para calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{x(a^2 + x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-am}),$ si $m \geq 0,\ a > 0.$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^4 + a^4}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}e^{-ma/\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{ma}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right),$ si $m > 0,\ a > 0.$

Funciones analíticas uno a uno.

16-37. Supongamos que f tiene el desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, válido en $N(0;\ r)$. Si $|a_1| \geq \sum_{n=2}^\infty n|a_n|r^{n-1}$, demostrar que f es uno a uno en $N(0;\ r)$ si f no es una constante.

[*Indicación*. Suponer que $f(z_1) = f(z_2)$, siendo z_1 y z_2 dos puntos distintos de $N(0;\ r)$. Entonces

$$\sum_{n=1}^\infty a_n(z_2^n - z_1^n) = 0.$$

Demostrar que esto contradice la desigualdad relativa a $|a_1|$ si f no es una constante].

16-38. Si f y g son dos transformaciones de Möbius, demostrar que la función compuesta fg es también una transformación de Möbius.

16-39. Describir geométricamente lo que le ocurre al punto z en E_2 cuando se le somete a las siguientes transformaciones particulares de Möbius:

a) $f(z) = z + b$ (Traslación).

b) $f(z) = az$, siendo $a > 0$ (Homotecia).

c) $f(z) = e^{i\alpha}z$, siendo α real (Rotación).

d) $f(z) = 1/z$ (Inversión).

16-40. Si $c \neq 0$, tenemos

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}.$$

Por lo tanto, toda transformación de Möbius puede expresarse como una composición de los casos particulares descritos en el Ejercicio 16-39. Utilizar este hecho para demostrar que las trasnformaciones de Möbius transforman círculos en círculos (considerando las rectas como casos particulares de círculos).

16-41. a) Demostrar que todas las transformaciones de Möbius que aplican el semiplano superior $T = \{x + iy | y \geq 0\}$ sobre el disco cerrado $\overline{N}(0;\ 1)$ pueden expresarse en la forma $f(z) = e^{i\alpha}(z - a)/(z - \bar{a})$, donde α es real y $a \in T$.

b) Demostrar que a y α pueden siempre elegirse para aplicar tres puntos dados cualesquiera del eje real sobre tres puntos cualesquiera del círculo unidad.

16-42. Encontrar todas las transformaciones de Möbius que aplican el semiplano de la derecha $S = \{x + iy | x \geq 0\}$ sobre el disco cerrado $N(0;\ 1)$.

16-43. Encontrar todas las transformaciones de Möbius que aplican el disco cerrado $\overline{N}(0;\ 1)$ sobre sí mismo.

REFERENCIAS

16-1. AHLFORS, L. V., *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1953.

16-2. CARATHÉODORY, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*. 2 vols. F. Steinhardt, traductor. New York: Chelsea, 1954.

16-3. COPSON, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*. London: Oxford University Press, 1935.

16-4. KNOPP, K., *Theory of Functions*. 2 vols. F. Bagemihl, traductor. New York Dover, 1945.

16-5. SAKS, S. y ZYGMUND, A., *Analytic Functions*. E. J. Scott, traductor. New York: Hafner, 1952.

16-6. THRON, W. J., *Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*. New York: Wiley, 1953.

16-7. TITCHMARSH, E. C., *Theory of Functions*. Oxford: University Press, 1939

ÍNDICE DE SÍMBOLOS ESPECIALES

$\in$, pertenece a, es un elemento de,

$\notin$, no pertenece a,

$\{x \mid x$ satisface $P\}$, el conjunto de valores x que satisfacen la propiedad P,

inf, infimum, la mayor cota inferior,

sup, supremum, la menor cota superior,

$\subset$, es un subconjunto de,

$A \times B$, producto cartesiano de A y B,

$F(S)$, imagen de S originada por F,

$\{F_n\}$, sucesión cuyo n-ésimo término es F_n,

$\bigcup$, $\cup$, reunión,

$\bigcap$, $\cap$, intersección,

$B - A$, complemento de A con relación a B, el conjunto de puntos de B que no pertenecen a A,

E_1, la recta real,

E_2, el plano complejo,

(a, b), intervalo abierto de extremos a y b,

$[a, b]$, intervalo cerrado de extremos a y b,

$[a, b)$, $(a, b]$, intervalos semi-abiertos,

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, intervalos infinitos,

$N(x)$, $N(x; h)$, entorno de x (de radio h),

E_n, espacio Euclideo n-dimensional,

$(x_1, \ldots, x_n)$, punto de E_n,

$\mathbf{u}_k$, k-ésimo vector coordenado unitario,

$\delta_{k,j}$, delta de Kronecker,

$N(\mathbf{x}; r)$, entorno de $\mathbf{x}$ de radio r,

$N'(\mathbf{x})$, entorno reducido de $\mathbf{x}$,

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, intervalos n-dimensionales,

E_1^*, sistema de números reales ampliado,

E_2^*, sistema de números complejos ampliado,

$\overline{S}$, clausura de S, (Ej. 3-12)

$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, función vectorial

$\lim_{x \to a+}$, $\lim_{x \to a-}$, límite a la derecha (a la izquierda),

$\mathbf{f}^{-1}(Y)$, imagen inversa de Y originada por $\mathbf{f}$,
$f(c+)$, $f(c-)$, límite de f en c por la derecha (por la izquierda),
$\Omega_f(T)$, oscilación de f en T, (Ej. 4-14),
$\omega_f(x)$, oscilación de f en x, (Ej. 4-14),
$f'(x_0)$, derivada de f en x_0,
D_kf, derivada parcial de f con respecto a la k-ésima coordenada,
$D_{\mathbf{u}}f$, derivada de f en la dirección $\mathbf{u}$,
df, diferencial de f,
∇f, gradiente de f,
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, producto interior de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$,
$L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $L[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, segmento rectilíneo abierto (cerrado) que une $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$,
$D_{r,k}f$, derivada parcial de segundo orden,
$\mathbf{f} \in C'$, los componentes de $\mathbf{f}$ tienen derivadas parciales de primer orden continuas,
$J_{\mathbf{f}}$, Jacobiano de $\mathbf{f}$,
det $[a_{ij}]$, determinante de la matriz $[a_{ij}]$,
V_f, variación total de f,
$\Gamma[a]$, $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, camino dirigido a lo largo de una curva Γ,
$\Lambda(\Gamma)$, longitud de una curva Γ,
∂S, frontera de un conjunto S,
$S(P, f, \alpha)$, suma de Riemann-Stieltjes,
$f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, f es integrable Riemann con respecto a α en $[a, b]$,
$f \in R$ en $[a, b]$, f es integrable Riemann en $[a, b]$,
$[x]$, el mayor entero $\leq x$,
$\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, f es creciente en $[a, b]$,
$U(P, f, \alpha)$, $L(P, f, \alpha)$, sumas de Stieltjes superiores (inferiores),
$\underline{c}(S)$, $\bar{c}(S)$, contenido Jordan interior (exterior) de S,
$c(S)$, contenido Jordan de S,
$\overline{m}(S)$, medida exterior de Lebesgue del conjunto S,
$\int_{\Gamma[z]} F(z)\,dz$, integral de contorno de F a lo largo del camino $\Gamma(z)$,
$W(\Gamma[z]; z_0)$, número de giros del camino $\Gamma[z]$ con respecto a z_0,
$\int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, integral múltiple,
$\int_{\Gamma[\mathbf{a}]} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{a}$, integral de línea de $\mathbf{f}$ con respecto a $\mathbf{a}$,
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, producto exterior de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$,
grad ϕ, gradiente de ϕ,

rot $\mathbf{f}$, rotacional de $\mathbf{f}$,
div $\mathbf{f}$, divergencia de f,
$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, integral de superficie,
lím sup, límite superior,
lím inf, límite inferior,
$\underset{n\to\infty}{\text{l.e.m.}}\, f_n = f$, $\{f_n\}$ converge en media hacia f,
$f \in C^\infty$, f tiene derivadas de todo orden,
$f \in R(\alpha;\, a,\, b)$, f es integrable Riemann con respecto a α en $[a,\, b]$,
$(f,\, g)$, producto interior de las funciones f y g,
$\|f\|$, norma de f,
$f \in R^*(a,\, b)$, f es absolutamente integrable en $[a,\, b]$,
$f * g$, convolución de f y g,
$\sigma(f)$, abscisa de convergencia de $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$,
$A(z_0;\, r_1,\, r_2)$, anillo alrededor de z_0,
$\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z)$, residuo de f en z_0,

ÍNDICE ALFABÉTICO

ÍNDICE ANALÍTICO

CAPÍTULO 8. FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA, CURVAS RECTIFICABLES Y CONJUNTOS CONEXOS 157

CAPÍTULO 9. TEORÍA DE LA INTEGRACIÓN DE RIEMANN-STIELTJES 185

FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MODERNO

J. DIEUDONNÉ

Un volumen de 368 páginas, de 22 × 16 cm, con numerosos problemas

Este volumen es el desarrollo de un curso proyectado para estudiantes graduados del primer año, o para pregraduados aventajados de los años junior y senior. El propósito del curso fue doble: (a) proporcionar los fundamentos necesarios en todas las ramas de la Matemática moderna relacionadas con el Análisis; (b) adiestrar al estudiante en el uso del instrumento matemático más fundamental de nuestro tiempo: el método axiomático.

El lector se dará cuenta inmediatamente, de que en todas partes se ha puesto de relieve el aspecto conceptual de cada noción, en vez de presentar su aspecto algorítmico, es decir, como un ente de cálculo que era el principal objetivo del Análisis clásico. Esta preocupación se manifiesta no sólo en lo que se refiere al texto, sino también en la mayor parte de los problemas. Se observará que se han incluido gran número de problemas como suplemento del texto y muchos de ellos orientan hacia otros desarrollos interesantes. Los problemas a su vez, proporcionan al estudiante una oportunidad para comprobar si ha comprendido la materia expuesta.

Aunque en este volumen se desarrollan muchas cuestiones tratadas ordinariamente en cursos más elementales (incluidos los de Cálculo) el punto de vista desde el que se las considera es completamente distinto.

Los conceptos fundamentales de la Teoría de funciones y del Cálculo se han presentado dentro del armazón de una teoría que es lo suficientemente general para mostrar la finalidad, la potencia y la naturaleza verdadera de estos conceptos, mucho mejor que bajo las restricciones usuales del «Análisis clásico».

EXTRACTO DEL INDICE

OTRAS PUBLICACIONES DE ESTA EDITORIAL

Análisis matemático. *Introducción moderna al cálculo superior,* por T. M. APOSTOL. Un volumen de 550 páginas, de 22 × 16 cm, con 88 figuras.

Fundamentos de la Física moderna. *Introducción histórico-filosófica al estudio de la Física,* por G. HOLTON y D. H. D. ROLLER. Un volumen de 820 páginas, de 22 × 16 cm, con 270 ilustraciones.

Introducción a la Física del estado sólido. *Tratado moderno destinado al estudio de los modelos físicos de los cuerpos sólidos,* por CH. KITTEL. Un volumen de 650 páginas, de 22 × 16 cm, con 363 figuras.

Matemática básica para técnicos. Volumen I. *Introducción, con vectores y geometría analítica.* Volumen II. *El cálculo en varias variables con aplicaciones a las probabilidades y al análisis vectorial,* por T. M. APOSTOL. Un total de 1.070 páginas, de 22 × 16 cm, con 348 figuras.

Introducción a la Termodinámica, teoría cinética de los gases y mecánica estadística. *Estudio de la Termodinámica fenomenológica y estadística y de su aplicación,* por F. W. SEARS. Un volumen de 384 páginas, de 22 × 16 cm, con 146 ilustraciones.

Principios y aplicaciones de la Física. *Versión moderna de la Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería,* por H. MARGENAU, W. W. WATSON y C. G. MONTGOMERY. Un volumen de 760 páginas de 22 × 16 cm, con 648 figuras y 104 tablas.

Física. *Método piloto para la enseñanza de esta materia,* por el P.S.S.C. Dos volúmenes de 700 páginas en total, de 26 × 19 cm, con 750 figuras y numerosas tablas.

Principios de los procesos químicos. Volumen I. *Balances de materia y energía.* Volumen II. *Termodinámica,* por O. A. HOUGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ. Dos volúmenes de 1.100 páginas en total, de 22 × 16 cm, con 278 ilustraciones y numerosas tablas.

Química Física. *Conceptos básicos de la Química Física y fundamento de las técnicas en los campos de investigación y metodológico,* por G. M. BARROW. Un volumen de 800 páginas, de 22 × 16 cm, con 287 ilustraciones.

Fenómenos de transporte. *Un estudio sistemático de las leyes básicas del transporte de materia, energía y cantidad de movimiento,* por R. B. BIRD, W. E. STEWART y E. N. LIGHTFOOT. Un volumen de 850 páginas, de 22 × 16 cm, con 267 ilustraciones y numerosas tablas.

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

BARCELONA - BUENOS AIRES - MÉXICO


S REVERTÉ A